Infinitesimi

x_0 pt. di accumulazione per $f : A \to B$ con $A, B \subseteq \mathbb{R}$

$f(x)$ è INFINITESIMA se $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$

date 2 funzioni a valori reali $f(x)$, $g(x)$

$f(x)$ è infinitesima di ordine superiore a $g(x)$ se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

per cui $f(x) = o(g(x))$ f è o piccolo di $g(x)$

In generale

date $f(x)$ e $g(x)$ infinitesime per $x \to x_0$

ovvero $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$

$\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$

sono possibili 4 casi :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} \begin{cases} = 0 \\ = \infty \\ = 1 \\ = \nexists \end{cases}$$

$= 0 \Rightarrow$ $f(x)$ è infinitesimo di ordine superiore a $g(x)$

$= \infty \Rightarrow$ $f(x)$ è infinitesimo di ordine inferiore a $g(x)$

$= 1 \Rightarrow$ $f(x)$ e $g(x)$ sono infinitesime dello stesso ordine

$= \nexists \Rightarrow$ $f(x)$ e $g(x)$ non sono confrontabili

- Se $f(x)$ è infinitesimo equivalente a $g(x)$

$$f(x) \sim g(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

- Si dice che $f(x)$ è infinitesimo di ordine $\alpha > 0$ rispetto ad un infinitesimo $g(x)$ se:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{[g(x)]^\alpha} = K \neq 0$$

$\Rightarrow$ 1. Principio di sostituzione con coppie di infinitesimi equivalenti alle funzioni date

2. Teorema delle somme di infinitesimi. $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) + f_1(x)}{g(x) + g_1(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$

ALGEBRA $o(g(x))$

$\forall c \neq 0 \quad e \ \lambda > 0$

$o(g(x)) \pm o(g(x)) = o(g(x))$ somme algebrica o piccolo

$o(g(x)) \cdot o(g(x)) = o(g^2(x))$ prodotto

$o(g_1(x)) \pm o(g_2(x)) = o(g_1(x) + g_2(x))$ somma algebrica di due o piccolo

$c \cdot o(g_1(x)) = o(g_1(x))$ moltiplicazione per una costante

$o(g_1(x)) \cdot o(g_2(x)) = o(g_1(x) \cdot g_2(x))$ prodotto

$g_1(x) \cdot o(g_2(x)) = o(g_1(x) \cdot g_2(x))$ prodotto per funzione

$|o(g(x))|^\lambda = o(|g(x)|^\lambda)$

N.B. CONDIZIONI EQUIVALENTI
$$\begin{cases} 1.\ f(x) \sim g(x) & \text{per } x \to x_0 \\ 2.\ f(x) = g(x) + o(g(x)) & \text{per } x \to x_0 \end{cases}$$

In particolare se è confronto effettuato con $f(x) = x^{\alpha}$

ALGEBRA DEGLI INFINITESIMI

$o(x^n) + o(x^n) = o(x^n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$o(x^n) - o(x^n) = o(x^n)$

$a \cdot o(x^n) = o(a(x^n)) = o(x^n) \quad \forall a \in \mathbb{R}$

$x^m \cdot o(x^n) = o(x^{m+n}) \quad \forall m \in \mathbb{N}$

$o(o(x^n)) = o(x^n)$

$o(x^m + o(x^n)) = o(x^n)$

approssimazione (al I ordine) per $x \to 0$

$$\sin x = x + o(x)$$

$$\cos x = 1 + o(x)$$

$$\log(1+x) = x + o(x)$$

$$e^x = 1 + x + o(x)$$

$$\operatorname{sh} x = x + o(x)$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + o(x)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

uso degli $o(x)$ e calcolo:

$$(x+o(x))^2 = x^2 + 2x\,o(x) + (o(x))^2 =$$

• svolgo il quadrato del binomio

$$= x^2 + 2\,o(x^2) + o(x^2) =$$

• prodotto funzione · o piccolo

$$= x^2 + o(x^2) + o(x^2) =$$

• prodotto per una costante

$$= x^2 + o(x^2)$$

$$(x+o(x))\,(x^2+o(x^3)) =$$

• svolgo il prodotto termine a termine

$$= x^3 + x^2\,o(x) + x\cdot o(x^3) + o(x)\cdot o(x^3) =$$

$$= x^3 + o(x^3) + o(x^4) + o(x^4)$$

$$= x^3 + o(x^3) \underbrace{+\, o(x^4)}_{\text{TRASCURABILE}} =$$

$$= x^3 + o(x^3)$$

$$\bullet \quad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\log(1+x)} = \frac{0}{\underbrace{\log 1}_{=0}} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x + o(x)}{x + o(x)} = 1$$

pari grado   funzione e $o(x)$

$$\lim_{x \to 0} \frac{o(x)}{x} = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x}\left(1 + \frac{o(x)}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1 + \frac{o(x)}{x}\right)} =$$

$$\bullet \quad \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{\log(1+x)} \cdot \frac{x}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \left[\frac{\operatorname{sen} x}{x} \cdot \frac{x}{\log(1+x)} \right] = \lim_{x \to 0} \Bigg[\underbrace{\frac{\operatorname{sen} x}{x}}_{\to 1} \cdot \Bigg(\underbrace{\frac{\log(1+x)}{x}}_{\to 1} \Bigg)^{-1} \Bigg] = 1$$

con i limiti notevoli

• $$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\operatorname{sen}^3 x} - 1}{\log(1 - x^3)} =$$

$$\operatorname{sen} x = x + o(x)$$

$$\operatorname{sen}^3 x = \left(x + o(x)\right)^3$$

$$e^{\operatorname{sen}^3 x} = e^{(x+o(x))^3} = e^{\left(x^3 + o(x^3) + 3x^2 o(x) + 3x\, o(x^2)\right)} =$$

$$= e^{\left(x^3 + o(x^3) + 3\, o(x^3) + 3\, o(x^3)\right)} =$$

$$= e^{x^3 + o(x^3)}$$

poiché $\operatorname{sen}^3 x = x^3 + o(x^3)$

analogamente se si sviluppa $e^{f(x)} = e^{\operatorname{sen}^3 x} = 1 + \operatorname{sen}^3(x) + o(\operatorname{sen}^3 x) =$

$$NUM = 1 + \operatorname{sen}^3 x + o(\operatorname{sen}^3 x) - 1 =$$

$$= \cancel{1} + x^3 + \underbrace{o(x^3) + \underbrace{o(x^3 + o(x^3))}_{o(x^3)}}_{o(x^3)} - \cancel{1} = x^3 + o(x^3)$$

tornando al limite:

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 + x^3 + o(x^3) - 1}{\underbrace{-x^3 + o(x^3)}_{\log(1+t)}} = \lim_{x \to 0} \frac{+x^3 + o(x^3)}{-x^3 + o(x^3)} = -1$$

---

sviluppandolo con il limite notevole:

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{\operatorname{sen}^3 x} - 1}{\log(1 - x^3)} = \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{e^{\operatorname{sen}^3 x} - 1}{\operatorname{sen}^3 x}}_{1} \cdot \underbrace{\frac{\operatorname{sen}^3 x}{-x^3}}_{-1} \cdot \underbrace{\frac{-x^3}{\log(1 - x^3)}}_{1} = -1$$

$$\bullet \quad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos 2x}{\log(1-x) + \log(1+x)} = \qquad 1-\cos 2x \to 2\,\text{sen}^2 x$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos 2x)(1 + \cos 2x)}{\{\log[(1-x)(1+x)]\} \cdot (1+\cos 2x)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 2x}{\log(1-x^2)\,(1+\cos 2x)} = \qquad 1-\cos^2 2x \to \text{sen}^2 2x$$

Oppure

$$\to \; = \lim_{x \to 0} \frac{2\,\text{sen}^2 x}{\log(1-x^2)} =$$

Oppure

$1 - \cos 2x =$

$= 1 - (1 - 2\,\text{sen}^2 x)$

$= 1 - 1 + 2\,\text{sen}^2 x =$

$= 2\,\text{sen}^2 x$

$\sim$

$1 + \cos 2x =$

$= \cancel{1}\cancel{-1} - 2\,\text{sen}^2 x$

sviluppando

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2\left[x + o(x)\right]^2}{-x^2 + o(x^2)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2\left[x^2 + \overbrace{o(x^2) + 2\,x\,\overset{o(x^2)}{o(x)}}^{o(x^2)}\right]}{-x^2 + o(x^2)} =$$

$$= -2 \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{x^2 + o(x^2)}{x^2 \underset{+}{-} o(x^2)}}_{1} = -2$$

$$\bullet \quad \lim_{x \to 0} \frac{2x^2 \cdot \log^2(1+x)}{x^\alpha}$$

stabilire il valore di α ? ($\alpha \neq 0$)

$$= 2 \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cdot \log^2(1+x)}{x^\alpha} =$$

$$\log(1+x) = x + o(x)$$

$$\log^2(1+x) = [x + o(x)]^2 = x^2 + o(x^2)$$

$$= 2 \lim_{x \to 0} \frac{x^2 \cdot (x^2 + o(x^2))}{x^\alpha} =$$

$$= 2 \lim_{x \to 0} \frac{x^4 + \overbrace{x^2 \cdot o(x^2)}^{o(x^4)}}{x^\alpha} = 2 \iff \alpha = 4$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x - x^2}{x \cdot \log(1+x^3)}$$

$$x \cdot \underbrace{[x^3 + o(x^3)]}_{1^\circ \text{ ord.}} = x^4 + o(x^4)$$

sviluppo per

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + o(x^{2n})$$

$$\operatorname{sen}^2 x = \underbrace{[x + o(x^2)]}_{1^\circ \text{ ord.}}^2 = \underbrace{\left[x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right]}_{2^\circ \text{ ord.}}^2$$

$$\left[x + o(x^2)\right]^2 = x^2 + o(x^4) + 2x\,o(x^2) = x^2 + o(x^3) + o(x^4) \ldots$$

$$= x^2 + o(x^3)$$

DEN. $= x^4 + o(x^4)$

$$\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\right)^2 = x^2 + \frac{x^6}{36} + o(x^8) - \frac{x^4}{3} - \frac{2}{3!}x^3 \cdot o(x^4) + 2x\,o(x^4) \ldots$$

$3! = 3 \cdot 2 = 6$

$$= x^2 + \frac{x^6}{36} + o(x^8) - \frac{x^4}{3} + o(x^7) + o(x^5) \ldots$$

$$\simeq x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)$$

$\frac{x^6}{36} + o(x^8) + o(x^7) \longrightarrow$ Trascurabile

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x - x^2}{x \log(1 + x^3)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left[x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4) \right] - x^2}{x \left(x^3 + o(x^3) \right)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x^2} - \frac{x^4}{3} + o(x^4) - \cancel{x^2}}{x^4 + o(x^4)} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-x^4/3 + o(x^4)}{x^4 + o(x^4)} = -\frac{1}{3}$$

$$\bullet \lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - 1 - x^2 + 3x^4}{\sin 2x + x^5} =$$

sviluppo:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$\rightsquigarrow$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} + o\left[(x^2)^3\right] \longrightarrow o(x^6)$$

grado $\frac{x^n}{n!} + o(x^n)$

$$\text{NUM} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + o(x^6) - 1 - x^2 + 3x^4 =$$

$$= \frac{7}{2}x^4 + \frac{x^6}{6} + o(x^6)$$

$$\text{sen } t = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + o(t^6)$$

$$\text{sen } 2x = 2x - \frac{\overset{4}{\cancel{8}} x^3}{3 \cdot \cancel{2}} + \frac{\overset{4}{\cancel{32}} x^5}{5 \cdot \cancel{4} \cdot 3 \cdot \cancel{2}} + \underset{o(x^6)}{\underbrace{o(2x^6)}} =$$

$$= 2x - \frac{4}{3} x^3 + \frac{4}{5} x^5 + o(x^6)$$

$$\text{DEN} = 2x - \frac{4}{3} x^3 + \frac{4}{15} x^5 + o(x^6)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\frac{7}{2} x^4 + \frac{x^6}{6} + o(x^6)}{2x - \frac{4}{3} x^3 + \frac{4}{15} x^5 + o(x^6)} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{7}{2} x^4}{2x} \lim_{x \to 0} x^3 = 0$$

si considera il monomio con l'esponente minore che prevale sugli altri gli sviluppi derivati da e^x e e^{-x}

$$\text{ch}\, x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left\{\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right) + \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots\right)\right\}$$

$$= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$$

(si elidono gli esponenti dispari, si raddoppiano i pari)

$$\text{sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots\right) - \left(1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots\right)}{2} =$$

$$= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o\left(x^{2n}\right)$$

(si elidono a esponente pari, si raddoppiano e esponenti dispari)