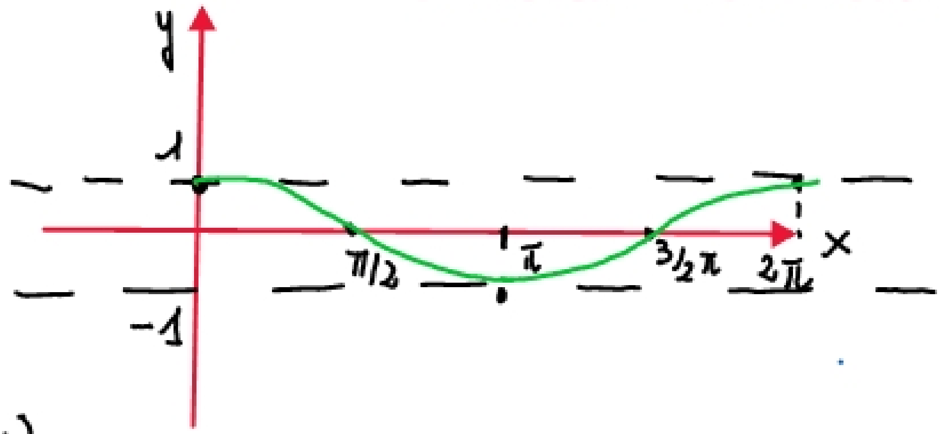
FUNZIONI GONIOMETRICHE (2)

$y = \cos x$



(NB. $\pi = 3,14$)

periodicità $T = 2\pi$

$\forall x \in \mathbb{R}$ (dominio)

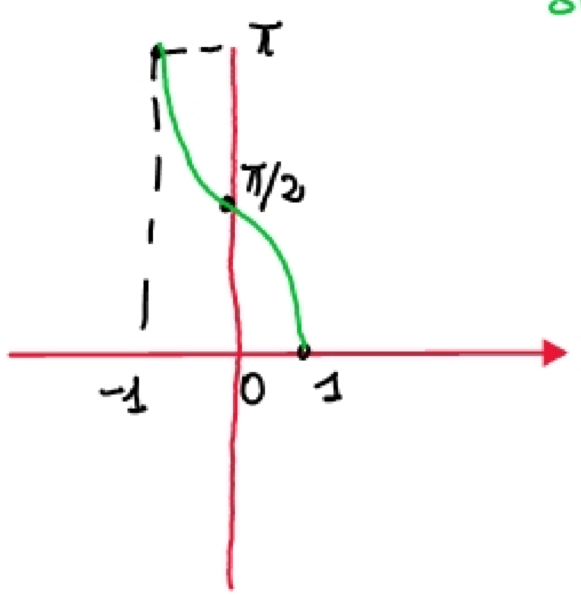
$-1 \le y \le 1$ (codominio)

$-1 \le \cos x \le 1$

Punti di massimo $x = 2k\pi$

Punti di minimo $x = \pi + 2k\pi$

$y = \arccos x$



si inverte tra $[0, \pi]$ la funzione di

$y = \cos x$

$y = \arccos x$

dominio $[-1, 1]$

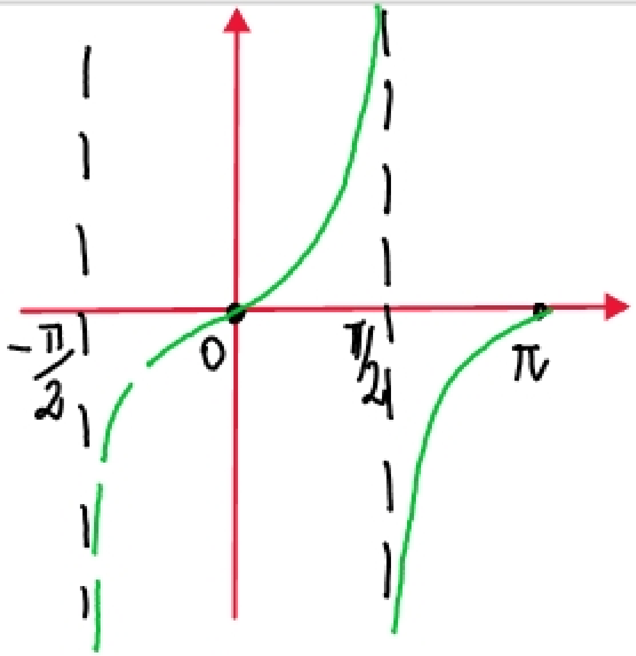
codominio $[0, \pi]$

minimo $(1, 0)$

massimo $(-1, \pi)$

inferiormente e superiormente limitata

$y = tg\,x$



$tg\,x = \frac{sen\,x}{cos\,x}$

$cos\,x \neq 0 \quad x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

periodica $T = \pi$

dominio $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

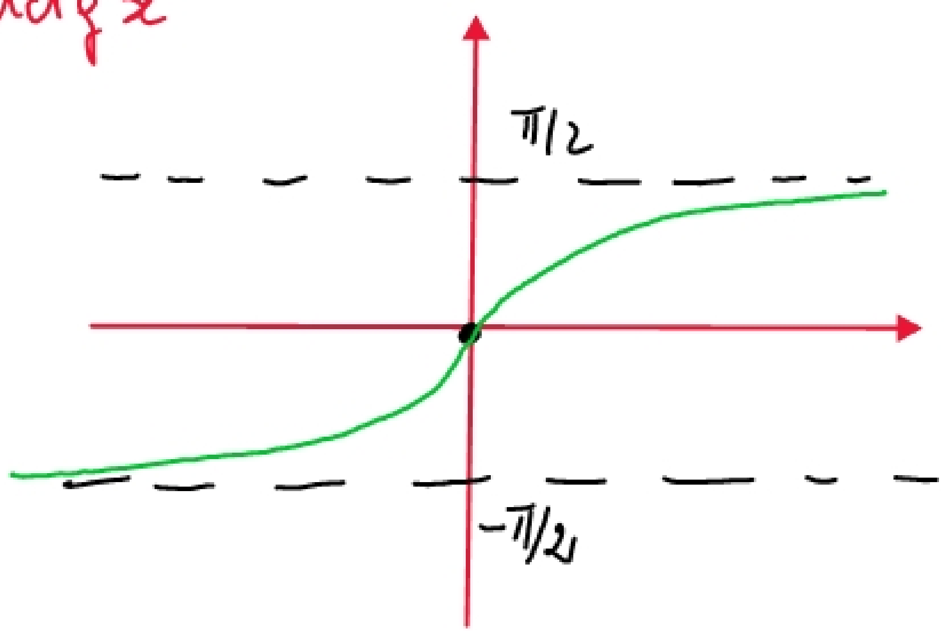
illimitata

strettamente crescente

asintoto verticale $x = \frac{\pi}{2} (+k\pi)$

$k\pi$ multipli dispari

$y = arctg\,x$



dominio $\forall x \in \mathbb{R}$

codominio $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$

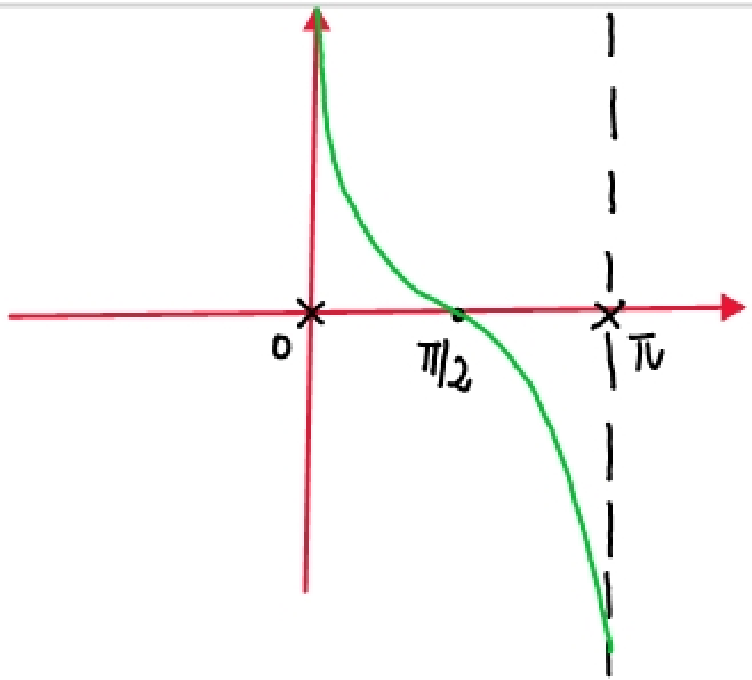
limitata inferiormente e superiormente

asintoti orizzontali $y = -\pi/2$

$y = \pi/2$

crescente

$y = \text{ctg}\, x$

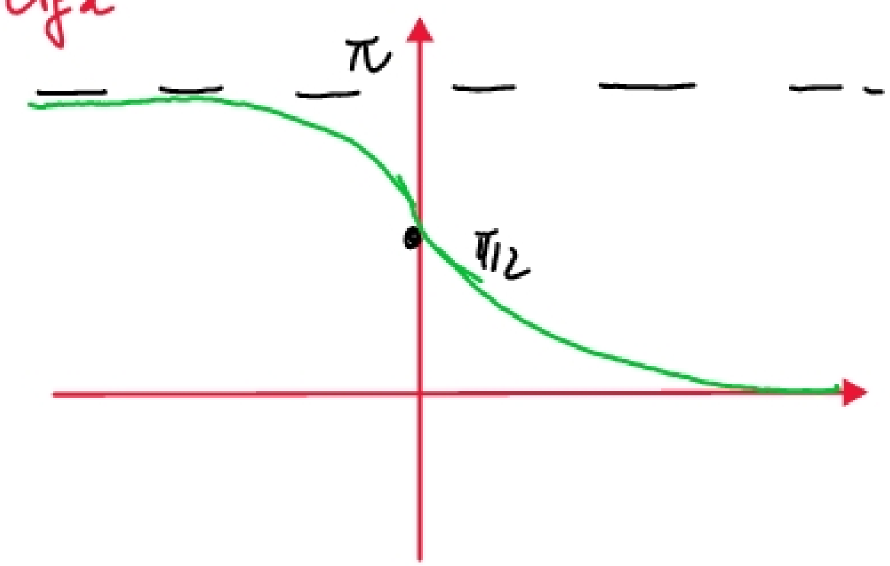


$\text{ctg}\, x = \dfrac{\cos x}{\text{sen}\, x}$

$\text{sen}\, x \neq 0 \qquad x \neq k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

dominio $x \neq k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$
codominio $\mathbb{R}$
strettamente decrescente
periodica : $T = \pi$
illimitata

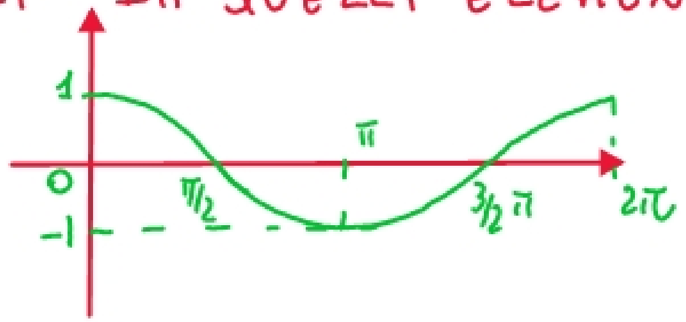
$y = \text{arcctg}\, x$



si inverte nel tratto $[0, \pi]$
dominio $\mathbb{R}$
codominio $]0, \pi[$
strettamente decrescente
asintoti orizzontali $y = 0$
$y = \pi$
limitata inferiormente
e superiormente

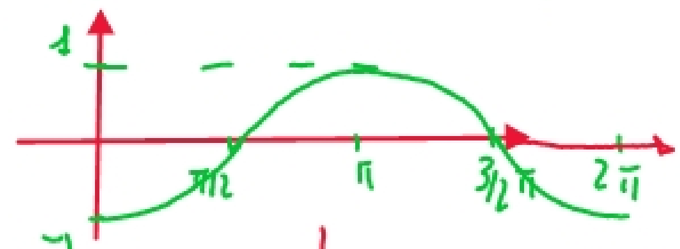
GRAFICI DEDUCIBILI DA QUELLI ELEMENTARI

$y = \cos x$



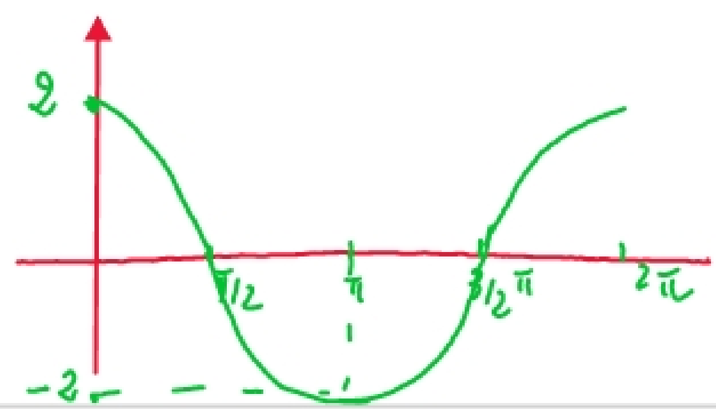
$y = k \cos x$ dilatazione o contrazione dell'altezza delle curve

k=1 $\quad y = -\cos x$



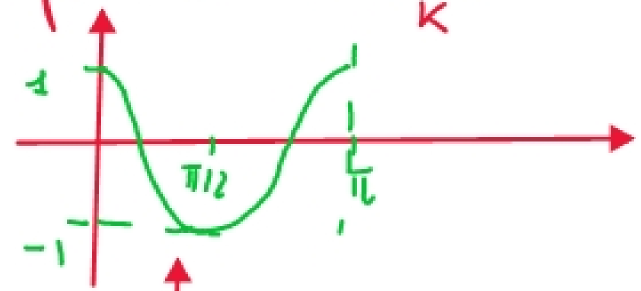
$k = 1/2 \quad y = \frac{1}{2} \cos x$

$k = 2 \quad y = 2 \cos x$

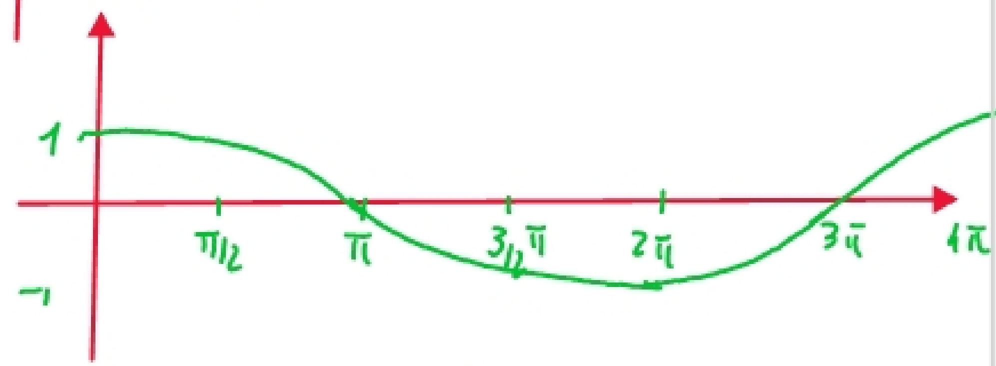


$y = \cos(kx)$ si incide sul periodo $T' = \frac{T}{k}$

$y = \cos(2x)$



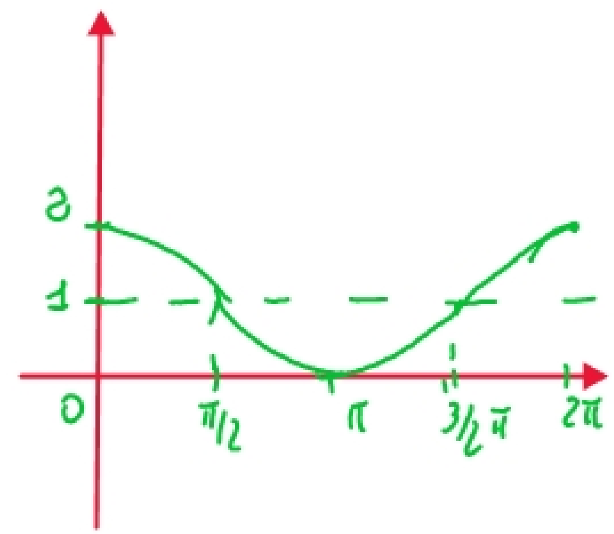
$y = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$



$y = \cos x + k$ traslazione del grafico

$k > 0$ verso l'alto

$y = \cos x + 1$



$k < 0$ verso il basso

$y = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

$y = \cos(x + \alpha)$

Traslazione di α del grafico

$(+\alpha)$ con $\alpha > 0$ verso sinistra

$(-\alpha)$ con $\alpha > 0$ verso destra

lo muove su fine $(-\alpha)$ $(x + \alpha = 0 \to x = -\alpha)$

$y = |\cos x|$ ribaltamento nel semipiano positivo della parte di grafico negativa

INSIEMI NUMERICI

alcune premesse di calcolo :

(1) $$(-1)^n = \begin{cases} +1 & n = 2m \quad (\text{pari}) \\ -1 & n = 2m+1 \quad (\text{dispari}) \end{cases} \qquad \text{con } m, n \in N$$

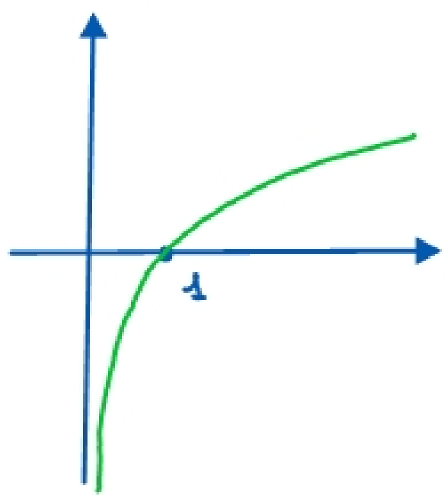
questo comporta che spesso bisogna studiare gli andamenti che caratterizzano ~~le~~ le ~~proprietà~~ degli elementi appartenenti all'insieme :

$$A = \{ a_n = (-1)^n \log n \}$$
$$B = \{ b_n = (-1)^n + \log n \}$$
con $n \in N$

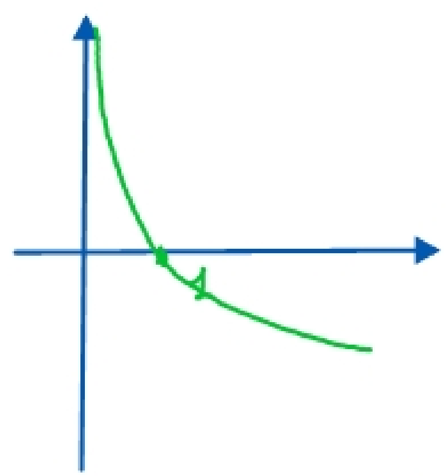
$A = \{ a_n = (-1)^n \log n \ , \ \text{con } n \in \mathbb{N} \}$

attenzione: quando si tratta di operatori logaritmici bisogna tener conto della base, come per gli esponenziali

$y = \log n$



$y = -\log n$



si generano 2 sottosuccessioni che descrivono gli elementi dell'insieme

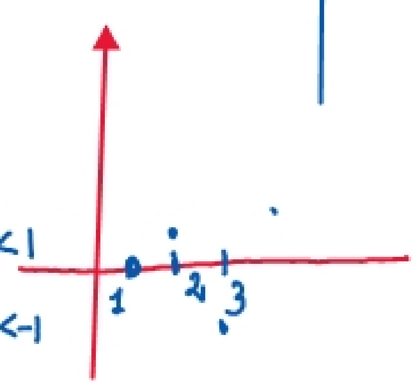
$a_{2n} = \log(n) > 0$ per $n > 1$

$a_{2n+1} = -\log(2n+1) < 0$ per $n \geq 3$

$a_1 = 0$

$a_2 = \log 2$ $\quad 0 < \log 2 < 1$

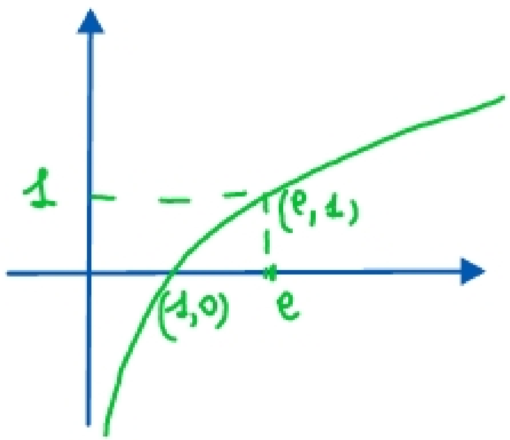
$a_3 = -\log 3$ $\quad \log 3 < -1$



$\Rightarrow$ valori positivi/negativi illimitati

$B = \{ b_n = (-1)^n + \log n \}$ con $n \in N$

$y = \log x$ base $e > 1$ crescente



$a_1 = (-1)^1 + \log 1 = -1 + 0 = -1$

$a_2 = (-1)^2 + \log 2 = 1 + \underbrace{\log 2}_{<1} < 2$

$a_3 = (-1)^3 + \log 3 = -1 + \underbrace{\log 3}_{>1} < 2 < a_2$

valori positivi, eccetto a_1,

con una crescita alternata

ma sempre crescente

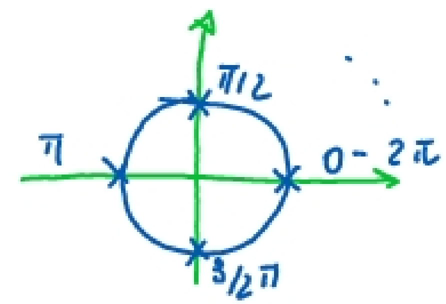
$\Rightarrow$ inferiormente limitata $\min B = -1$

superiormente illimitata

② l'uso degli operatori goniometrici, come descrittori algebrici degli elementi di un insieme

$$\cos n\pi = \begin{cases} 1 & n = 2m \\ -1 & n = 2m+1 \end{cases}$$

$$\cos n\frac{\pi}{2} = \begin{cases} \pm 1 & n = 2m \\ 0 & n = 2m+1 \end{cases}$$



$$\operatorname{sen} n\pi = 0 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\operatorname{sen} n\frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0 & n = 2m \\ \pm 1 & n = 2m+1 \end{cases}$$

attenzione

$-1 \leq \cos n \leq 1$

$-1 \leq \operatorname{sen} n \leq 1$

Calcolo con la "razionalizzazione inversa"

$$A = \{ a_n = \sqrt{n-5} - \sqrt{n} \, , n \in \mathbb{N} \}$$

attenzione $n \geq 5$

$$a_n = \sqrt{n-5} - \sqrt{n} = \left(\sqrt{n-5} - \sqrt{n}\right) \frac{\sqrt{n-5} + \sqrt{n}}{\sqrt{n-5} + \sqrt{n}} = \frac{n-5-n}{\underbrace{\sqrt{n-5} + \sqrt{n}}_{>0 \text{ crescente}}} = \frac{-5}{\sqrt{n-5} + \sqrt{n}}$$

$\Uparrow$

per poter operare un confronto tra i termini bisogna scriverli in una forma più leggibile

$\sqrt{n-5} + \sqrt{n} > 0$ e crescente, se cresce il denominatore la frazione diminuisce

$\Rightarrow a_n < 0 \quad \forall n \geq 5$ e $|a_n|$ è decrescente

$-|a_n|$ crescente a zero

$\boxed{\begin{array}{l} \text{insieme limitato} \\ \sup A = 0 \\ \min A = a_5 = \frac{-5}{5} \end{array}}$

- $A_n = \{ a_n = \sqrt{n+5} + \sqrt{n} \quad , n \in \mathbb{N} \}$

$$a_n = \sqrt{n+5} + \sqrt{n} \quad > 0 \qquad \forall\, n \geq 0$$

$$a_n = \left(\sqrt{n+5} + \sqrt{n}\right) \cdot \frac{\sqrt{n+5} - \sqrt{n}}{\sqrt{n+5} - \sqrt{n}} = \frac{\cancel{n}+5-\cancel{n}}{\sqrt{n+5} - \sqrt{n}} = \frac{5}{\sqrt{n+5} - \sqrt{n}} > 0$$

$\sqrt{n+5} > \sqrt{n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \implies \left(\sqrt{n+5} - \sqrt{n}\right)$ è positivo

$a_n = \dfrac{5}{\sqrt{n+5} - \sqrt{n}}$ valori sempre positivi

$n = 0 \qquad a_0 = \dfrac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$

$\boxed{\text{Insieme limitato inf.} \quad \min A = \sqrt{5} \quad \sup A = +\infty}$

• $A = \left\{ x_n = \left\{ \log\left(1 + e^{\sqrt{n+2} - \sqrt{n}}\right) \right\}^{*} ; n \in \mathbb{N} \right\}$

si considera la successione

$$b_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+2} - \sqrt{n})(\sqrt{n+2} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}}$$

è a valori positivi, decrescente all'aumentare di n perchè il denominatore cresce:

Confronto di valori $\qquad 0 < b_n < \sqrt{2} \qquad b_0 = \sqrt{2}$

$$1 = e^0 < e^{b_n} < e^{\sqrt{2}}$$

elevare all'esponenziale si mantiene il verso

$$2 = 1 + 1 < e^{b_n} + 1 \le e^{\sqrt{2}} + 1$$

si aggiunge (+1) a ciascun termine

$$\log 2 < \log_e \left(e^{b_n} + 1\right) < \log\left(e^{\sqrt{2}} + 1\right)$$

si applica l'operatore log di base e (si mantiene il verso

$$\log^7 2 < \left[\log\left(e^{b_n} + 1\right)\right]^7 < \log^7\left(e^{\sqrt{2}} + 1\right)$$

si eleva alla 7.me mantenendo il verso

$\inf A = \log^7 2$ $\qquad$ $\sup A = \log^7\left(e^{\sqrt{2}} + 1\right)$

N.B.: se si considera $n_0 = 2$ $\Rightarrow$ $\sup A = \max A$