Le serie

Termine generale della successione

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

valore del primo termine (a_0, $n=0$)

SOMME PARZIALI (RIDOTTA n-ESIMA)

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)$$

$$S_3 = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = \qquad n = 0, 1, 2, 3$$
$$= 1 + (1+1) + (2+1) + (3+1) =$$
$$= 1 + 2 + 3 + 4 =$$

$$S_5 = \underbrace{a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4}_{S_4} + a_5 = S_4 + a_5$$

$\{S_n\}$ successione delle somme parziali (ridotte)

$$\lim_{n \to +\infty} s_n = S \begin{cases} < \infty \ (L) & \text{convergente} \\ +\infty & \text{diverge positivamente} \\ -\infty & \text{diverge negativamente} \\ \nexists & \text{oscillante o indeterminata} \end{cases}$$

- calcolare il valore della serie $\Rightarrow$ stabilire il carattere della serie

• es 1

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-1} = \underset{a_2}{\frac{1}{3}} + \underset{a_3}{\frac{1}{8}} + \underset{a_4}{\frac{1}{15}} + \dots + \underset{a_n}{\frac{1}{n^2-1}} + \dots$$

$$a_2 = \frac{1}{4-1} = \frac{1}{3}$$

$$a_3 = \frac{1}{9-1} = \frac{1}{8}$$

$\vdots$

IDENTITA' POLINOMIALE

$$n(A+B) + (A-B)$$

$$\frac{1}{n^2-1} = \frac{1}{(n-1)(n+1)} = \frac{A}{n-1} + \frac{B}{n+1} = \frac{A(n+1)+B(n-1)}{(n-1)(n+1)}$$

precedente di n

successivo di n

Imposto il sistema per calcolare A e B

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-B=1 \end{cases} \qquad 2A=1 \rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=-A=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

termine generale della serie:

$$a_n=\frac{1}{n^2-1}=\frac{1}{2(n-1)}-\frac{1}{2(n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)$$

La serie può venir così scritta:

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n^2-1}=\sum_{n=2}^{+\infty}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\right]=$$

linearità

$$= \frac{1}{2}\left\{\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)\right\} = \quad (*)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n+1}\right]$$

sono scritture equivalenti

$$(*) = \frac{1}{2}\left[\underbrace{\left(1-\frac{1}{3}\right)}_{a_2} + \underbrace{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)}_{a_3} + \underbrace{\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)}_{a_4} + \underbrace{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right)}_{a_5} + \dots + \right.$$

$$+ \underbrace{\left(\frac{1}{n-3}-\frac{1}{n-1}\right)}_{a_{n-2}} + \underbrace{\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n}\right)}_{a_{n-1}} + \underbrace{\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)}_{a_n} + \dots$$

$$S_n = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right]$$ somma parziale dei primi n termini

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left[\frac{3}{2} - \overset{\to 0}{\frac{1}{n}} + \overset{\to 0}{\frac{1}{n+1}}\right] = \frac{3}{4} = S$$

CONVERGENTE

CN: converge? forse?

$$\lim_{n} a_n = 0 \qquad \lim_{n} \frac{1}{n^2-1} = 0$$ POTREBBE

SERIE GEOMETRICA

$$\sum_n q^n \qquad q \in \mathbb{R}$$

serie è convergente se $-1 < q < 1$

se $|q| > 1$ $\begin{cases} q > 1 & \text{diverge } +\infty \\ q < -1 & \text{oscillante} \end{cases}$

$$\left(\lim_n q^n = \infty \right)$$

se $|q| < 1$

$$S_n = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

inoltre $\sum_n a\, q^n = a \cdot \sum_n q^n$ per linearità

- $\sum_{n=0}^{+\infty} (3x)^n$ esso converge x ?

serie geometrica, convergente x

$$-1 < 3x < 1$$

$$-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$$

- $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{x^2 - x}{x^2 - 4} \right)^n$

serie geometrica convergente $\iff$

$$-1 < \frac{x^2 - x}{x^2 - 4} < 1$$

devo risolvere il sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2-x}{x^2-4} > -1 \\[2ex] \dfrac{x^2-x}{x^2-4} < 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2-x+x^2-4}{x^2-4} > 0 \\[2ex] \dfrac{x^2-x-x^2+4}{x^2-4} < 0 \end{cases}$$

C.E. $\quad x \neq \pm 2$

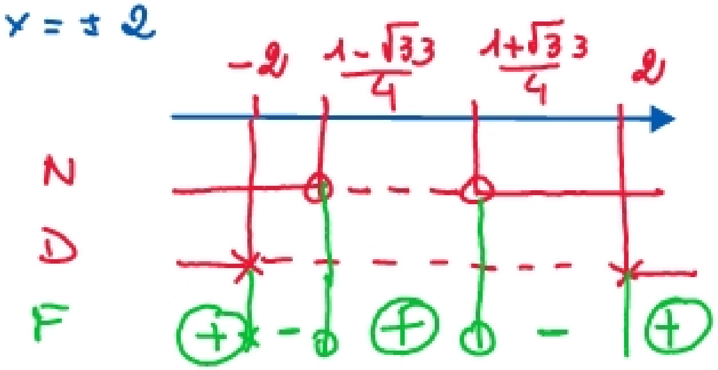
$$\begin{cases} \dfrac{2x^2-x-4}{x^2-4} > 0 \\[2ex] \dfrac{4-x}{x^2-4} < 0 \end{cases}$$

I DIS.

$$\frac{2x^2-x-4}{x^2-4} > 0$$

N: $\quad x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1+32}}{4} = \dfrac{1 \pm \sqrt{33}}{4}$

D: $\quad x = \pm 2$



II DIS

$$\frac{4-x}{x^2-4} < 0$$

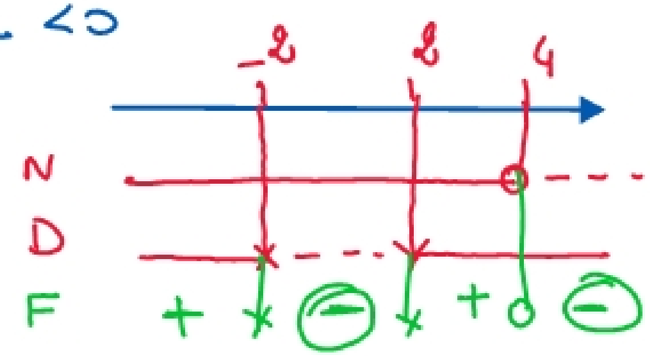
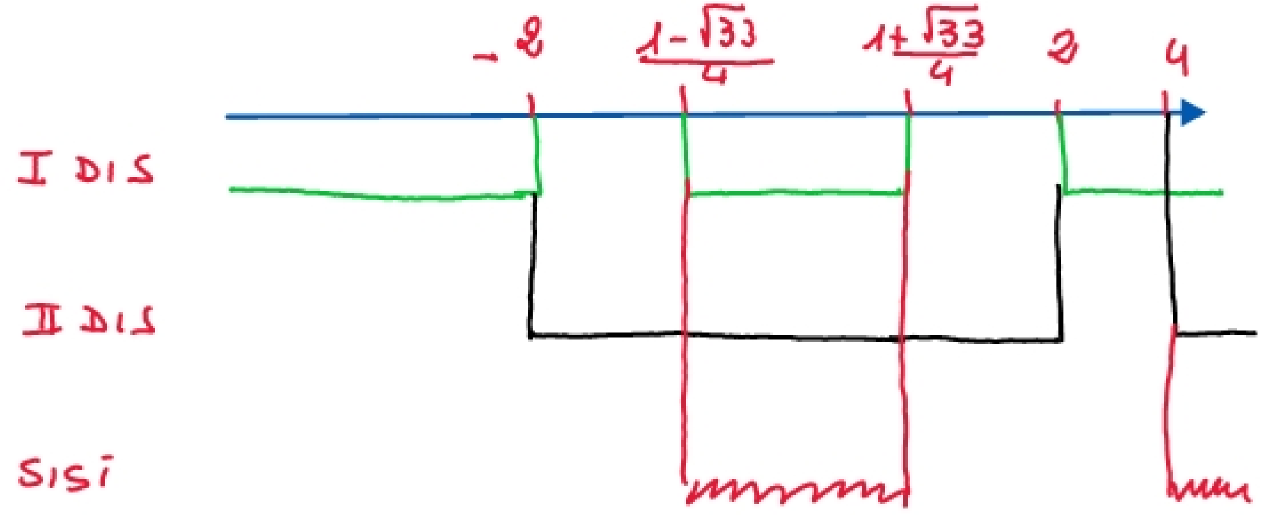


GRAFICO DEL SISTEMA



La serie è convergente per

$$\frac{1-\sqrt{33}}{4} < x < \frac{1+\sqrt{33}}{4} \quad , \quad x > 4$$

es: date la serie:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{1-\ln|x|} \right)^n$$

è una serie geometrica convergente per quali valori di x?

- $\sum_{n=0}^{+\infty} (\cos x)^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left[(\cos x)^2 \right]^n$

serie geometrica di ragione $q = (\cos x)^2$

converge se $\left| (\cos x)^2 \right| < 1$

$$\Updownarrow$$

$$-1 < (\cos x)^2 < 1$$

però è vero $0 \leq (\cos x)^2 \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$q \neq 1 \qquad (\cos x)^2 \neq 1 \implies x \neq k\pi$

In base alla condizione necessaria:

se $\lim_{n} a_n \neq 0$ non è infinitesima la successione (il termine generale della serie)

$\longrightarrow$ NON CONVERGE

se $\lim_{n} a_n = 0$ il termine generale è infinitesimo

$\longrightarrow$ PUÒ CONVERGERE

serie armonica $\sum_n \frac{1}{n}$ NON CONVERGE

serie armonica generalizzata

$$\sum_n \frac{1}{n^\alpha} \qquad \alpha > 1 \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

CONVERGENTE

$$\lim_n \frac{1}{n} = 0 \qquad \lim_n \frac{1}{n^\alpha} = 0$$

$$\sum \frac{5}{n} = 5 \sum \frac{1}{n}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5n+4}{7n-1}$$

① serie a termini positivi

② C.N.

$$\lim_{n} \frac{5n+4}{7n-1} = \frac{5}{7} \neq 0$$ NON CONVERGE

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5n+4}{7n^2-1}$$

① serie a termini positivi

② C.N.

$$\lim_{n} \frac{5n+4}{7n^2-1} \sim \lim_{n} \frac{5n}{7n^2} = 0$$

PUÒ CONVERGERE

CRITERI DI CONVERGENZA:

SERIE SONO A TERMINI POSITIVI

- confronto
- radice
- rapporto
- confronto asintotico

SEGNO ALTERNO

$$\sum_n (-1)^n \frac{2^n}{\underbrace{n+1}_{+}}$$

SERIE A TERMINI NEGATIVI

$$\sum \left(-\frac{5}{n^2}\right) = -5 \overbrace{\sum \frac{1}{n^2}}^{+}$$

$$\sum \left(-\frac{5}{n+1}\right) = -5 \underbrace{\sum \frac{1}{n+1}}_{+}$$

serie a termini positivi $\to$ criterio del rapporto

$$\lim_{n} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \begin{cases} L<1 & \text{conv. } \Sigma a_n \\ L>1 & \text{div. } \Sigma a_n \\ L=1 & \text{Teor. inefficace} \end{cases}$$

<u>es 1</u>

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!}$$ serie T.p.

$$\lim_{n} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n} \frac{n+1}{\underbrace{[(n+1)+1]!}_{(n+2)!}} \cdot \frac{(n+1)!}{n} =$$

$$= \lim_{n} \frac{n+1}{n} \frac{\cancel{(n+1)!}}{(n+2)\cancel{(n+1)!}} \simeq \lim_{n} \frac{n}{n^2} = 0 < 1$$

convergente.

$$\bullet \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} \qquad \text{S.T.P.}$$

$$\lim_{n} \frac{n+1}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n} =$$

$$= \lim_{n} \frac{\cancel{2^n}}{\cancel{2^n} \cdot 2} \cdot \underbrace{\frac{n+1}{n}}_{\to 1} = \frac{1}{2} < 1 \qquad \text{CONVERGE}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left\{ \frac{n}{(n+1)!} + \frac{n}{2^n} \right\} =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$$

COMBINAZIONE DELLE SERIE

COEFFICIENTE BINOMIALE

$$\left\{ \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \qquad n, k \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{\underbrace{1!}_{=1}\,(n-1)!} = n$$

$$\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!\,(n-n+1)!} = \frac{n!}{(n-1)!\,1!} = \binom{n}{1}$$

$$\bullet \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\binom{4n}{3n}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\dfrac{(4n)!}{(3n)!\,(4n-3n)!}} =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(3n)!\cdot n!}{(4n)!}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{[3(n+1)]!\cdot(n+1)!}{[4(n+1)]!}\cdot\frac{(4n)!}{(3n)!\;n!} =$$

$$= \frac{(3n+3)!\;(n+1)!}{(4n+4)!}\cdot\frac{(4n)!}{(3n)!\;n!} =$$

$$= \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)\cancel{(3n)!}\,(n+1)\,\cancel{n!}}{(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)\cancel{(4n)!}} \cdot \frac{\cancel{(4n)!}}{\cancel{(3n)!}\,\cancel{n!}}$$

$$= \underbrace{\frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)(n+1)}{(4n+4)(4n+3)(4n+2)(4n+1)}}_{c} \sim \frac{n^4}{n^4} \text{ grado}$$

$\frac{c}{n}$ $\quad c_n \quad$ N e D di pari grado

$$= \frac{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 1}{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{27}{256} < 1$$

converge.