• $f(x) = \arcsin\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$

· dominio

$$-1 \leq Arg \leq 1$$

$$-1 \leq \frac{1 x^2}{1+x^2} \leq 1$$

denom: $x^2+1 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\downarrow$

no condizioni sul denominatore che è sempre positivo

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1-x^2}{1+x^2} \geq -1 \\ \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1 \end{cases}$$

per semplicità di calcolo

$\downarrow$

denominatore comune e semplifico il denominatore

$$-(x^2+1) \leq 1-x^2 \leq x^2+1$$

$$-x^2-1 \leq 1-x^2 \leq x^2+1$$

$$\cancel{-x^2}-1 \cancel{+x^2} \leq 1 \leq x^2+x^2+1$$

$$\underbrace{-1 \leq 1}_{\text{vera}} \leq 2x^2+1$$

vere $\Leftarrow$

$2x^2+1 \geq 1 \quad 2x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

· simmetrie

x^2 pari $\Rightarrow$ $f(-x) = \arcsin \dfrac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2} = \arcsin \dfrac{1-x^2}{1+x^2} = f(x)$

$\Rightarrow$ $f(x)$ è pari $\Rightarrow$ simmetrica rispetto all'asse delle ordinate

· limiti

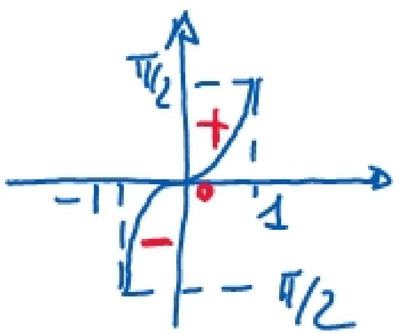
$$\lim_{x \to \pm\infty} \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2} = \arcsin(-1) = -\pi/2$$

pari grado

$\Rightarrow$ $y = -\frac{\pi}{2}$ asintoto orizzontale completo (a destra e a sinistra)

· segno: $f(x) \geq 0$

$$\arcsin\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right) \geq 0$$



$$\Updownarrow$$

$$0 \leq \text{arg} \leq 1$$

$$0 \leq \frac{1-x^2}{1+x^2} \leq 1 \qquad (1+x^2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R})$$

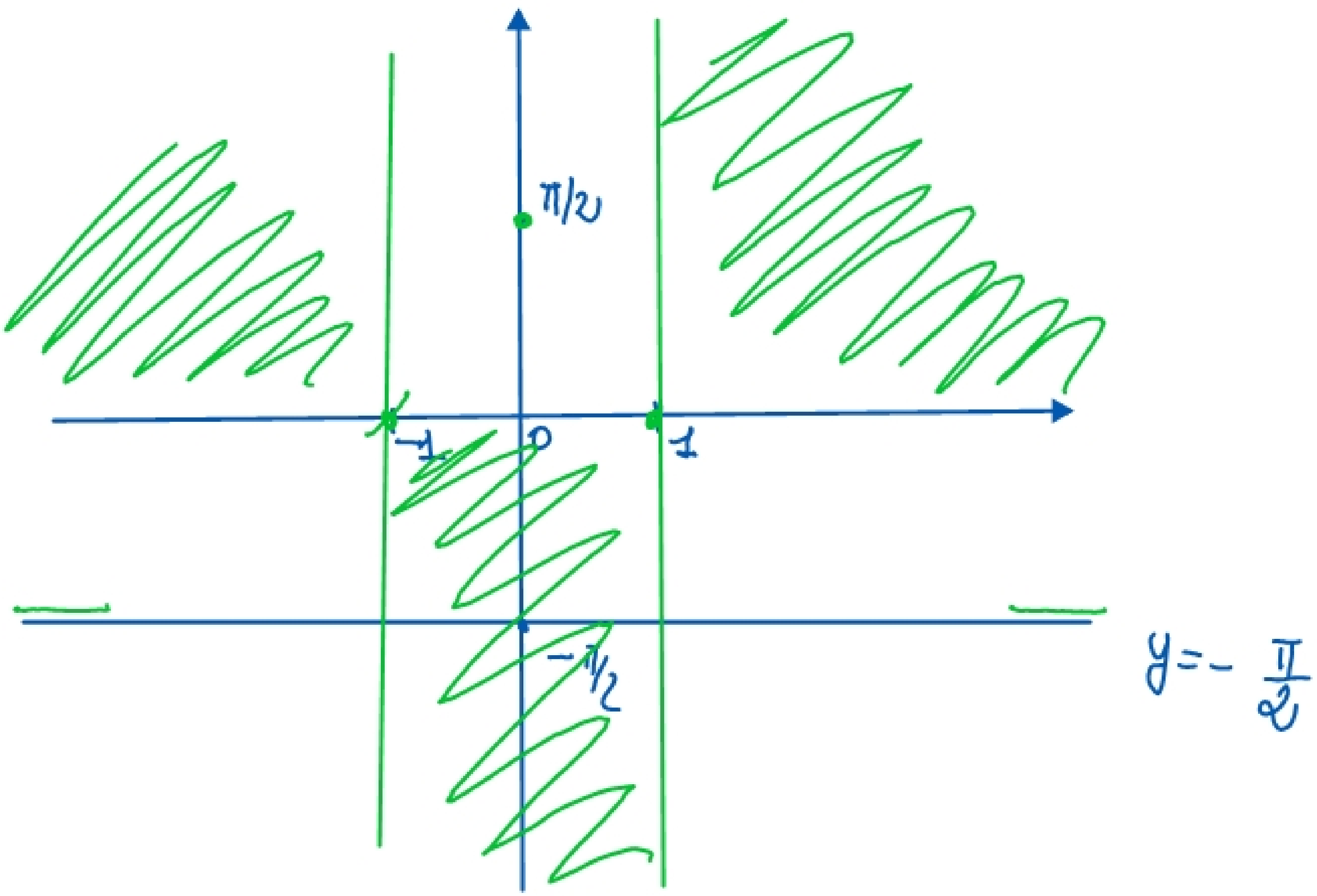
$$0(1+x^2) \leq 1-x^2 \leq 1+x^2$$

$$\begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ 1-x^2 \leq \cancel{1}+x^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 \leq 1 \\ 2x^2 \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ \forall x \in \mathbb{R} \ (x=0) \end{cases}$$

Riassumendo

		-1		0		1	
$f(x)$	−	0	+	?	+	0	−

$$f(0) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1-0}{1+0}\right) = \operatorname{arcsen} 1 = \frac{\pi}{2}$$



· derivate

$$f(x) = \operatorname{arcsen} \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$g(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2} \qquad f(x) = \operatorname{arcsen}\, g(x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-(g(x))^2}} \cdot g'(x)$$

$$\sqrt{1-(g(x))^2} = \sqrt{1-\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{(1+x^2)^2-(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2}} = \frac{\sqrt{(1+x^2+1-x^2)(1+x^2-1+x^2)}}{1+x^2}$$

$$= \frac{\sqrt{2\,(2x^2)}}{1+x^2} = \frac{\sqrt{4x^2}}{1+x^2} = \frac{2\,|x|^{(+)}}{1+x^2}$$

$$g'(x) = \frac{-2x(1+x^2)-2x\,(1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{-2x\,(1+x^2+1-x^2)}{(1+x^2)^2} = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{\cancel{2}|x|}{\cancel{1+x^2}}} \cdot \frac{-\cancel{4}^{\,2}x}{(1+x^2)^{\cancel{2}}} = \frac{-2x}{|x|\,(1+x^2)} =$$

$$= \frac{-2}{1+x^2} \cdot sg(x)$$

(sciogliendo il modulo)

attenzione: dom f' $\boxed{x \neq 0}$

pt. di non derivabilità!

in $x=0$ la funzione è definita e continua, ma non derivabile

$$\frac{-2x}{\underset{\substack{>0 \\ x\neq 0}}{|x|}\ \underset{>0}{(1+x^2)}}$$

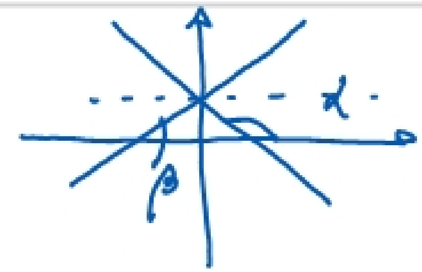
		0	
$f'(x)$	$+$	$\times$	$-$
$f(x)$	$\nearrow$	?	$\searrow$

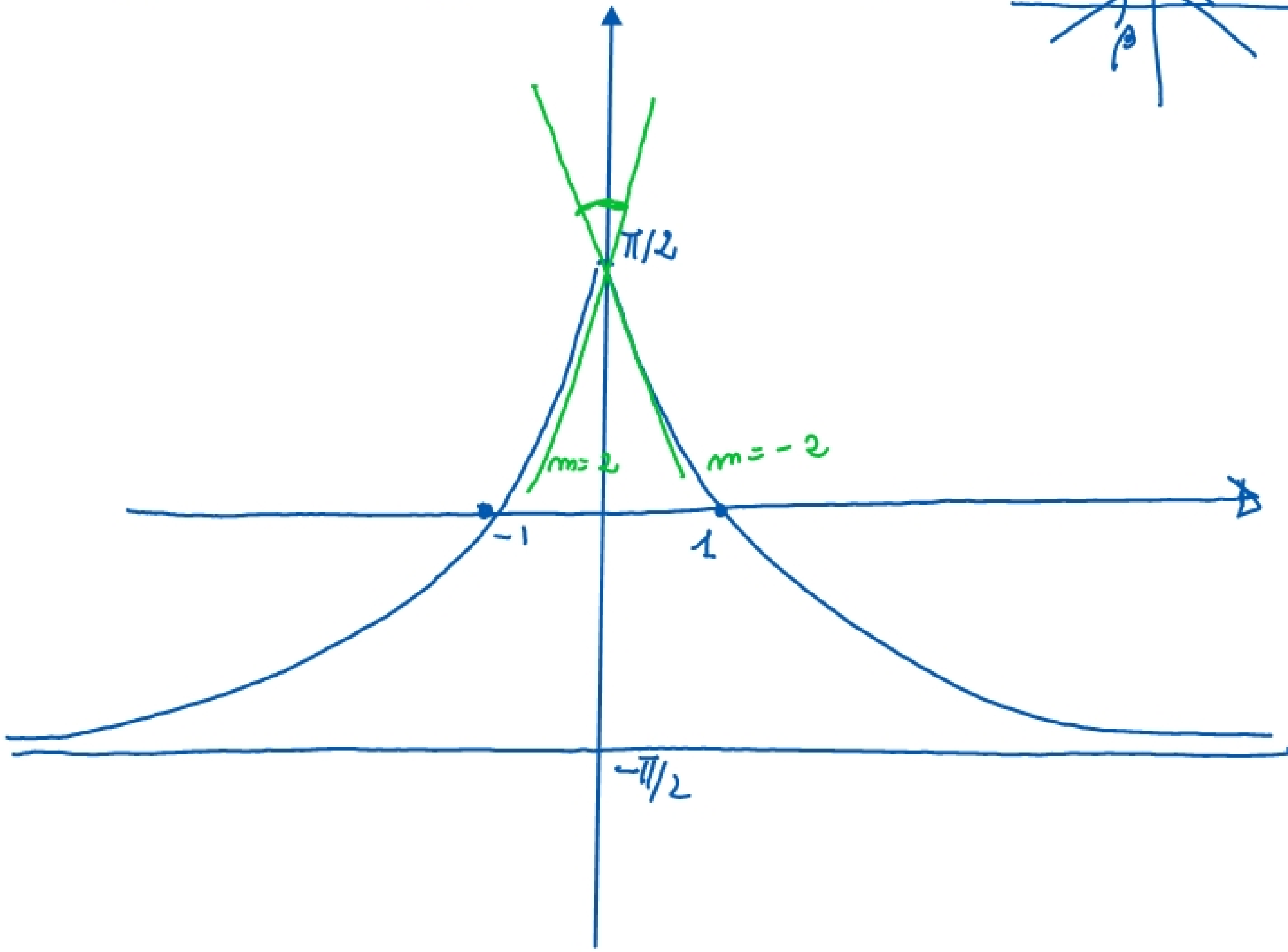
Si vuole verificare in $I(0,\delta)$ cosa succede alla funzione tramite la derivata prima

$$\lim_{x\to 0^\pm} \frac{-2x}{|x|\,(1+x^2)} = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-2x}{x\,(1+x^2)} = -2 \\[2ex] \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{-2x}{-x\,(1+x^2)} = 2 \end{cases}$$

$\Rightarrow \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ punto angoloso

$\left[\ m = \mathrm{Tg}\,\alpha \right.$ $\quad$ $\mathrm{tg}(\alpha - \beta) =$ formule trig.





$$f'(x) = \frac{-2x}{|x|\,(1+x^2)} = \begin{cases} -\dfrac{2}{(1+x^2)} & x > 0 \quad = -2(1+x^2)^{-1} \\[2ex] \dfrac{2}{(1+x^2)} & x < 0 \quad = 2(1+x^2)^{-1} \end{cases}$$

$$f''(x) \begin{cases} -2\left[-(1+x^2)^{-2}\right]2x = \dfrac{4x}{\underbrace{(1+x^2)^2}_{>0}} & x > 0 \\[3ex] -2(1+x^2)^{-2}\,2x = \dfrac{-4x}{\underbrace{(1+x^2)^2}_{>0}} & x < 0 \end{cases}$$

dom f'' $\quad x \neq 0$

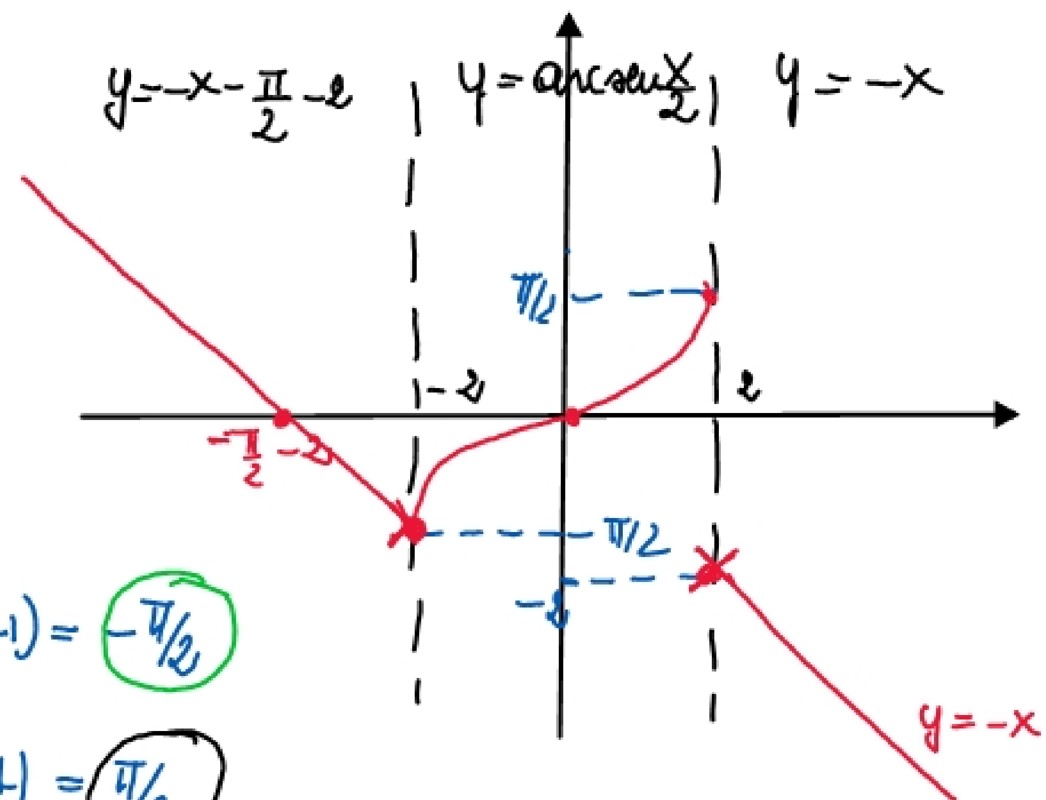
		0	
$f''(x)$	$+$	$\times$	$+$
$f(x)$	$\cup$		$\cup$

$$f(x) = \begin{cases} -x - \frac{\pi}{2} - 2 & \text{se } x < -2 \\ \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) & \text{se } -2 \leq x \leq 2 \\ -x & \text{se } x > 2 \end{cases}$$

dominio $\equiv \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to +\infty} (-x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(-x - \frac{\pi}{2} - 2\right) = +\infty$$



$f(-2) = \arcsin\left(-\frac{2}{2}\right) = \arcsin(-1) = -\pi/2$

$f(2) = \arcsin\left(\frac{2}{2}\right) = \arcsin(1) = \pi/2$

$y = -x - \pi/2 - 2$ (sinistra di (-2))

$$\lim_{x \to -2^-} \left(-x - \pi/2 - 2\right) = 2 - \pi/2 - 2 = -\pi/2$$

$y = -x$ (destra di (2))

$$\lim_{x \to 2^+} (-x) = -2$$

dal grafico si può dedurre che la funzione è:

1) in $x=-2$ continua : $\lim_{x\to -2^-} f(x) = f(-2)$

in $x=2$ presenta una discontinuità a salto di valore assoluto $(2+\pi/2) \sim 3,5$

2) non presenta asintoti, per la natura degli operatori algebrici che la definiscono

Se calcolo la derivata:

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{per } x<-2 \\ \dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}}\cdot\dfrac{1}{2} & -2<x<2 \\ -1 & x>2 \end{cases}$$

N.B. segno f': -2, 2: $-$ x $+$ x $-$

f: $\searrow$ x $\nearrow$ x $\searrow$

attenzione in $x=\pm 2$ la f' non è definita

N.B. in $x=-2$ discuto la derivabilità perché f è continua

in $x=2$ non discuto la derivabilità, perché f non è continua

$x_0 = -2$

$$\lim_{x\to -2^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{\underset{=-2}{x-x_0}} = \lim_{x\to -2^+}\frac{\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)-\arcsin\left(\frac{-2}{2}\right)}{x+2} =$$

$-\pi/2 \quad \ominus(\ominus\pi/2)$

$$= \lim_{x\to -2^+}\frac{\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)-\arcsin(-1)}{x+2} = \frac{0}{0} = F.I. = +\infty \to \text{Tg verticale}$$

(prevale il denominatore)

$$\lim_{x\to -2^-}\frac{-x-\pi/2-2-(+2-\pi/2-2)}{x+2} = \lim_{x\to -2^-}\frac{-x-\pi/2-2+\pi/2}{x+2} =$$

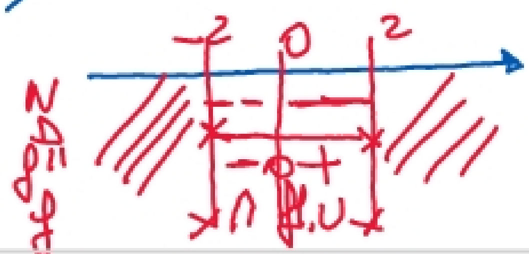
$$= \lim_{x\to -2^-}\left(-\frac{x+2}{x+2}\right) = -1$$

coeff. angolare della retta

derivata seconda:

$$f''(x) = \begin{cases} 0 & x<-2 \\ \dfrac{x}{\sqrt{(4-x^2)^3}} & -2<x<2 \\ 0 & x>2 \end{cases}$$

→ no concavità/convessità poiché è tratto di retta



$x=0$ flesso

• Si consideri la funzione: $y = 2e^{-4x} - e^{3x}$

Determinare il valore del parametro reale K che permette di rendere vera la seguente uguaglianza

$$y'' + 2y' - 8y = K e^{3x} \quad (*)$$

$y = 2e^{-4x} - e^{3x}$

$y' = 2e^{-4x}(-4) - e^{3x} \cdot 3 = -8e^{-4x} - 3e^{3x}$

$y'' = -8 e^{-4x}(-4) - 3 e^{3x} \cdot 3 = +32 e^{-4x} - 9e^{3x}$

sostituisco nella relazione (*)

$$K e^{3x} = \underbrace{32e^{-4x} - 9e^{3x}}_{y''} + 2\big(\underbrace{-8e^{-4x} - 3e^{3x}}_{y'}\big) - 8\big(\underbrace{2e^{-4x} - e^{3x}}_{y}\big)$$

$$k\,e^{3x} = \cancel{32\,e^{-4x}} - 9\,e^{3x} - \cancel{16\,e^{-4x}} - 6\,e^{3x} - \cancel{16\,e^{-4x}} + 8\,e^{3x}$$

$$k\,\underbrace{e^{3x}} = -7\,\underbrace{e^{3x}}$$

$$\Downarrow$$

$$k = -7$$