OPERATORI IPERBOLICI

1. definizioni operative
2. funzioni dirette e inverse
3. algebra degli operatori iperbolici

1 definizione degli operatori iperbolici

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

semidifferenza tra e^{x} ed e^{-x}

$$\cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

semisomma tra e^{x} ed e^{-x}

$$\tanh x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

$$= \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}}{e^{x} + e^{-x}}$$

$$\coth x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}} = (\tanh x)^{-1}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{2}{e^{x} + e^{-x}} = (\cosh x)^{-1}$$

$$\operatorname{cosech} x = \frac{2}{e^{x} - e^{-x}} = (\operatorname{senh} x)^{-1}$$

operatori inversi

$$\text{arcsenh}\, x = \log\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$$

$$x+\sqrt{x^2+1}>0$$

$$\text{arccosh}\, x = \log\left(x \pm \sqrt{x^2-1}\right)$$

l'intervallo ?

$$!!! \quad \begin{cases} x^2-1 \geq 0 \\ x \pm \sqrt{x^2-1} > 0 \end{cases}$$

$$\text{arctanh}\, x = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$$

$$\frac{1+x}{1-x}>0$$

$$\text{arccoth}\, x = \frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1}$$

$$\frac{x+1}{x-1}>0$$

$$\text{arcsech}\, x = \log\frac{1\pm\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$!!! \quad \begin{cases} x \neq 0 \\ \dfrac{1\pm\sqrt{1-x^2}}{x} > 0 \\ 1-x^2 \geq 0 \end{cases}$$

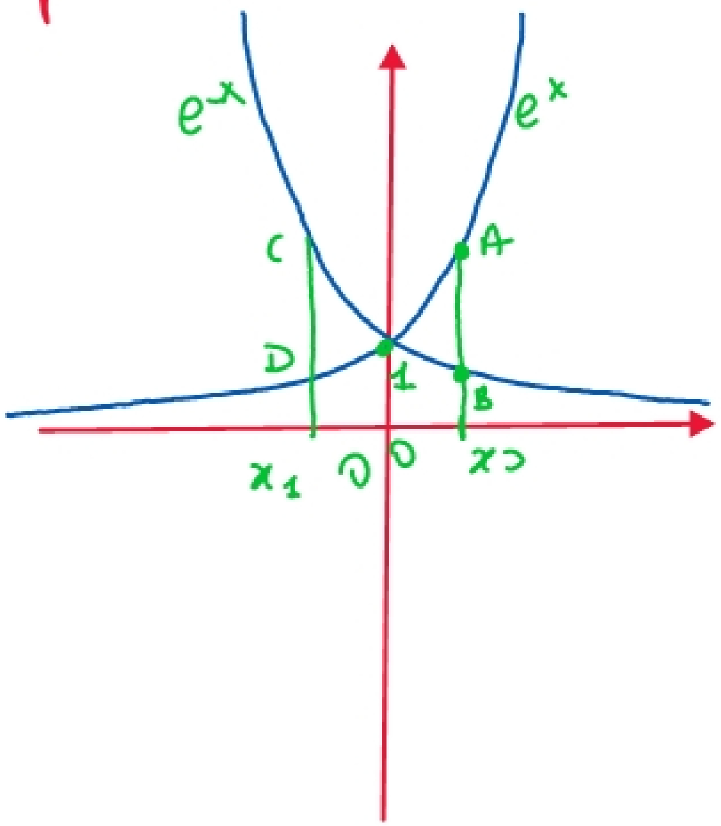
$$\text{arccosech}\, x = \log\frac{1\pm\sqrt{1+x^2}}{x}$$

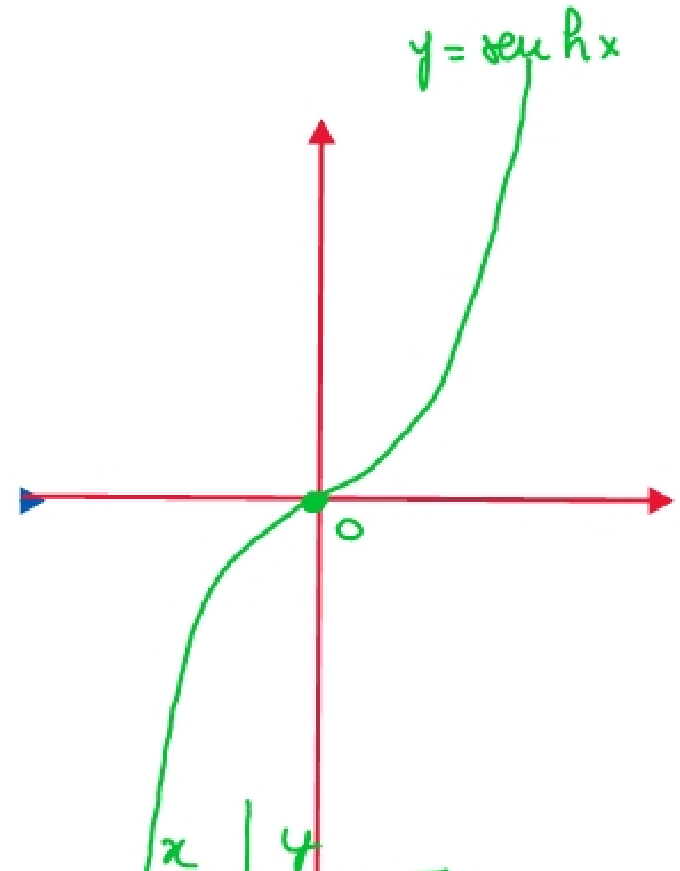
$$!!! \quad x \neq 0 \qquad \frac{1\pm\sqrt{1+x^2}}{x} > 0$$

N.B per $x>0$ segno $+$ // per $x<0$ segno $-$

2. funzioni dirette e inverse; grafici

$y = \operatorname{senh} x$





x	y
0	$\frac{1-1}{2} = 0$

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

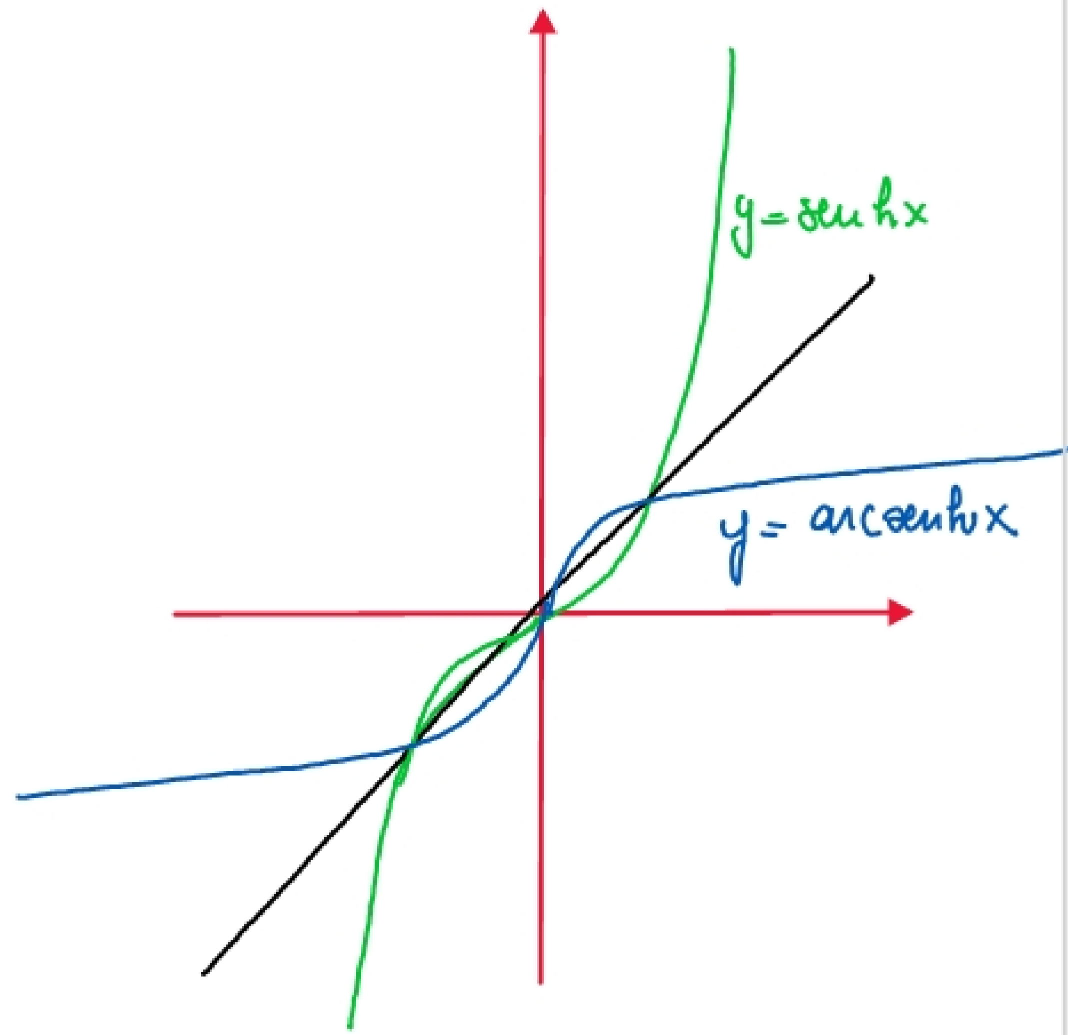
$$f(-x) = \frac{e^{-x} - e^{+x}}{2} = - \frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = -f(x)$$

DISPARI

$$y = \operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

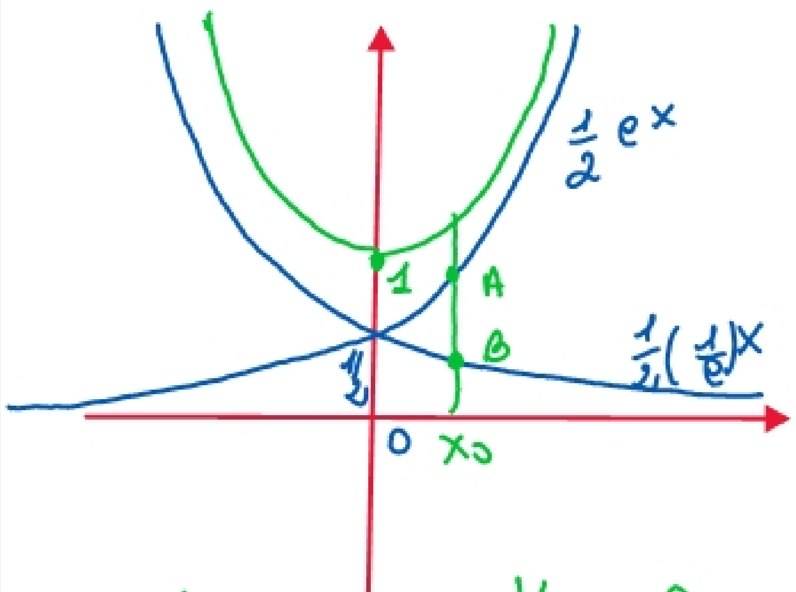
dominio $\forall x \in \mathbb{R}$
codominio $\forall y \in \mathbb{R}$
strettamente crescente
$f(-x) = -f(x)$ dispari
(simmetrica rispetto all'origine)

$f(x) > 0$ per $x > 0$



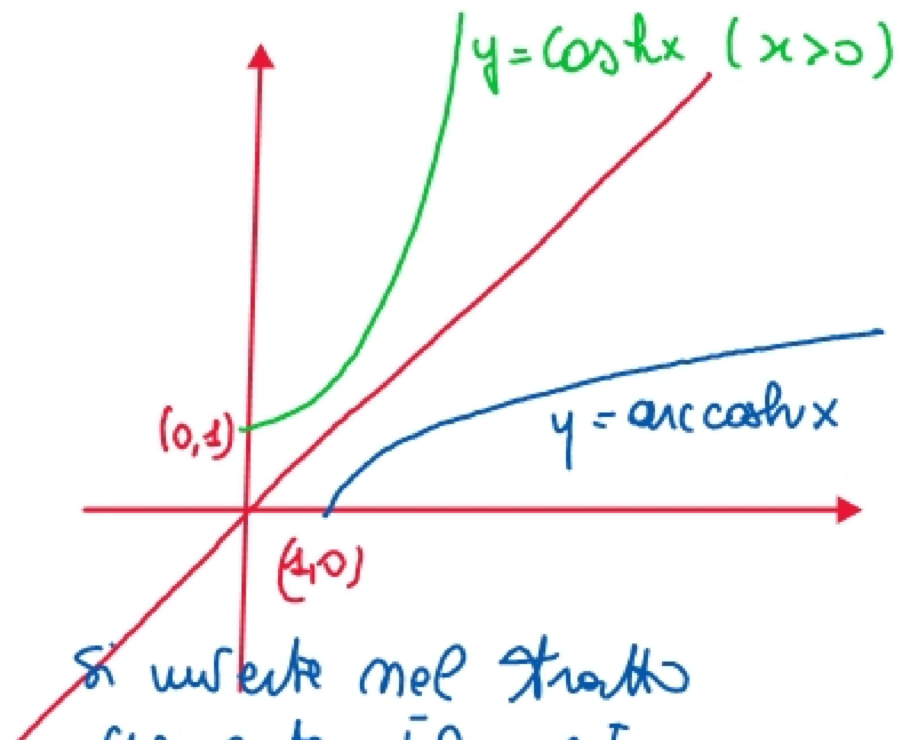
NON VI SONO ASINTOTI

$$y = \cosh x = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}e^{x} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{e}\right)^{x}$$



x	y
0	$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$

per invertire la funzione devo limitare l'intervallo



si inverte nel tratto crescente $[0, +\infty[$

dominio $\forall x \in \mathbb{R}$
codominio $[1, +\infty[$
decrescente $]-\infty, 0[$
crescente $[0, +\infty[$
$f(-x) = f(x)$ pari, simmetrica rispetto all'asse delle ordinate
$f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
minimo $x = 0 \quad P(0,1)$

COME RICAVARE LA FUNZIONE INVERSA

$y = \operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \longrightarrow y = \operatorname{arcsenh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

pongo $x = \operatorname{senh} y = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2} = \dfrac{e^y - \frac{1}{e^y}}{2} = \dfrac{e^{2y} - 1}{2e^y}$

CONSIDERO LA TRASFORMATA

$x = y$

$(e^y \neq 0)$

$2x\, e^y = e^{2y} - 1$

$e^{2y} - 2x\, e^y - 1 = 0$

(equazione di 2° grado in e^y)

$e^y = x \pm \sqrt{x^2+1} = \begin{cases} x + \sqrt{x^2+1} & > 0 \\ x - \sqrt{x^2+1} & < 0 \end{cases}$

quindi:

$e^y = x + \sqrt{x^2+1}$

[N.B si esclude la soluzione $e^y = x - \sqrt{x^2+1}$ perchè non è mai positiva]

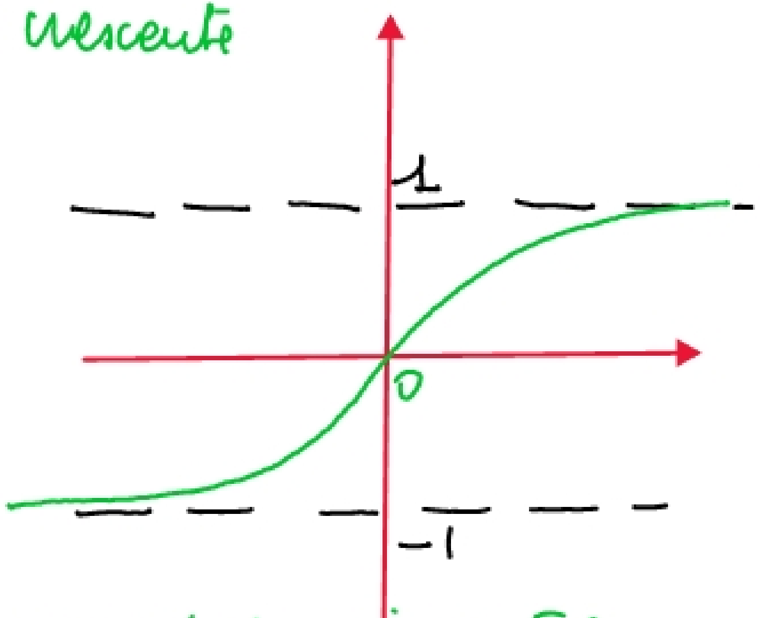
applicando l'operatore logaritmo esplicito la y:

$y = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

$$y = \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

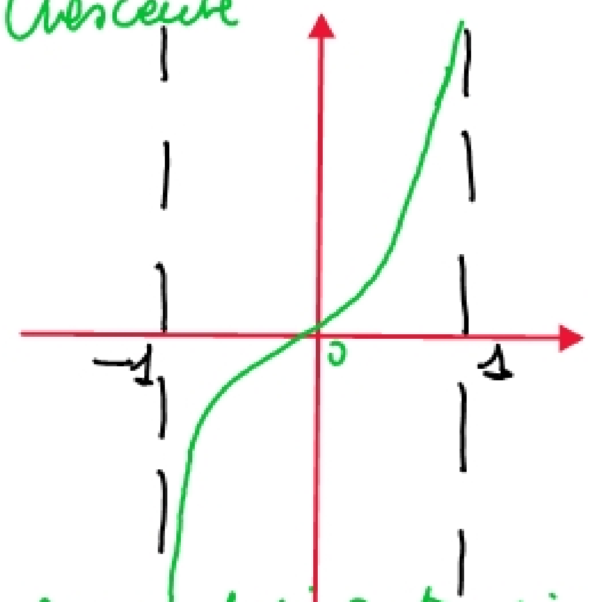
$\longrightarrow \quad y = \operatorname{arctanh} x$

funzione limitata inf./sup
funzione dispari
definita in $\mathbb{R}$
crescente



2 asintoti orizzontali
$y = 1 \qquad y = -1$

funzione dispari
dominio $]-1, 1[$
crescente

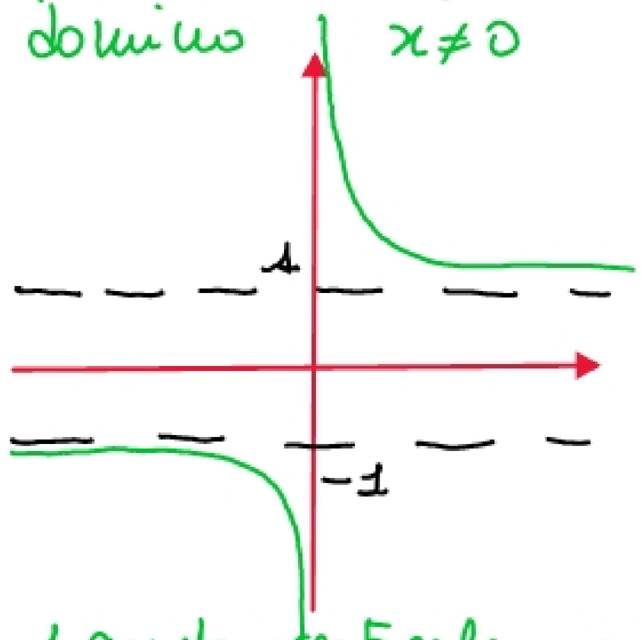


2 asintoti verticali
$x = -1 \qquad x = 1$

$$y = \coth x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x} = \tanh^{-1} x \longrightarrow \quad y = \operatorname{arcctgh} x$$

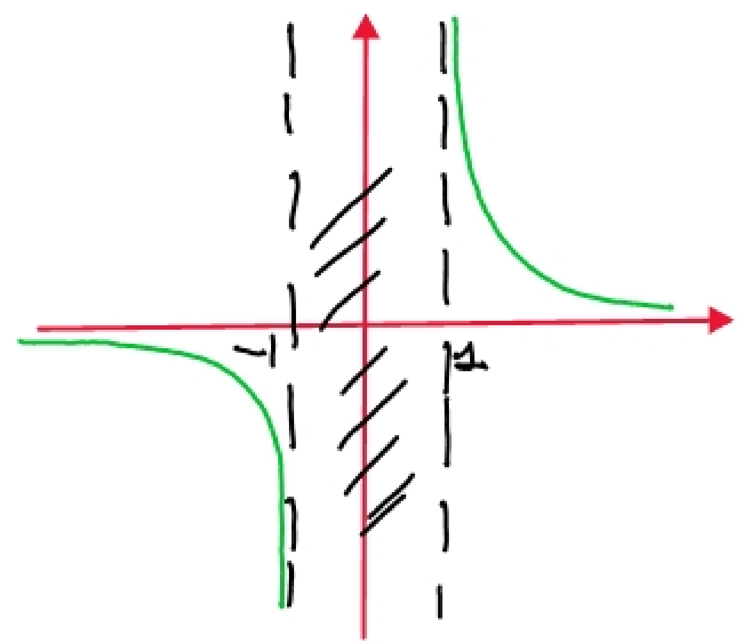
$$= \frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}}$$

funzione dispari
dominio $x \neq 0$ $[e^{x} \neq e^{-x}]$



1 asintoto verticale $x = 0$
2 asintoti orizzontali
$y = -1$ $y = 1$

funzione dispari
dominio $\mathbb{R} \setminus [-1, 1]$
decrescente



1 asintoto orizzontale $y = 0$
2 asintoti verticali $x = -1$, $x = 1$

RELAZIONI FONDAMENTALI TRA LE PRINCIPALI FUNZIONI IPERBOLICHE

$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$ FONDAMENTALI

$\tanh x = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$

$\coth x = \dfrac{\cosh x}{\operatorname{senh} x} = (\tanh x)^{-1}$

FORMULE DI ADDIZIONE

$\operatorname{senh}(x \pm y) = \operatorname{senh} x \cosh y \pm \cosh x \operatorname{senh} y$

$\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$

FORMULE DI DUPLICAZIONE

$\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$

$\cosh 2x = \cosh^2 x + \operatorname{senh}^2 x = \begin{cases} 1 + 2\operatorname{senh}^2 x \\ 2\cosh^2 x - 1 \end{cases}$ (per sostituzione)

OPERATORI TRIGONOMETRICI

1. operatori goniometrici
2. funzioni goniometriche dirette e inverse

   con rappresentazioni grafiche

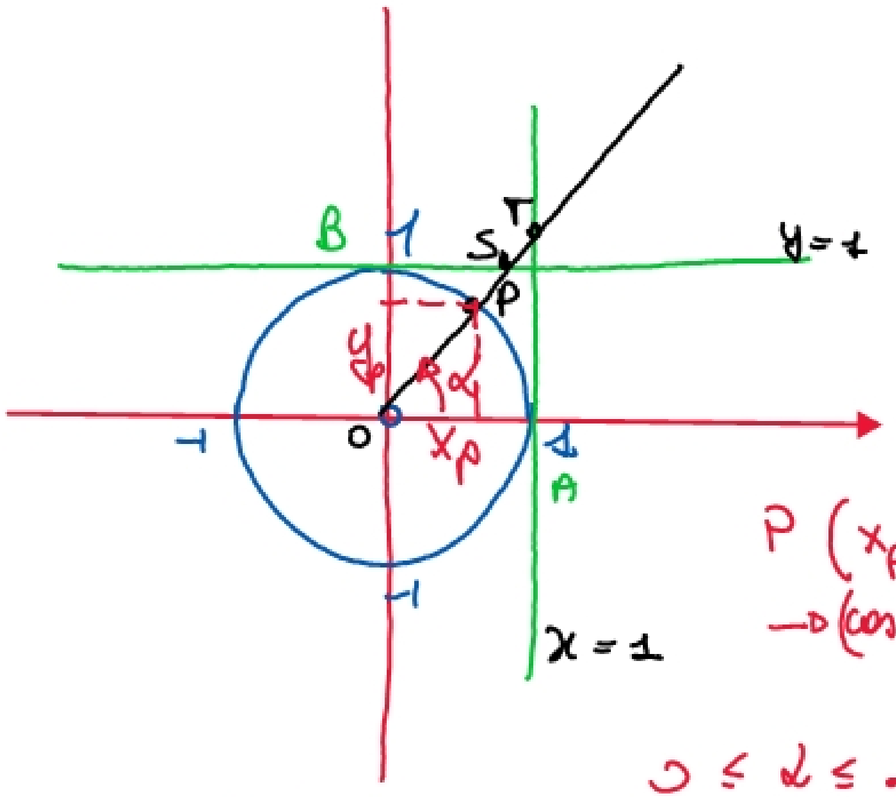
0. premesse

ANGOLI

ANGOLO GIRO	GRAD	400
	DEG	360
	$\boxed{\text{S.I.} \quad 2\pi \quad \text{radianti}}$	

① CIRCONFERENZA GONIOMETRICA

α asse orizzontale
senso antiorario



$\cos\alpha$ = ascissa del punto P

$\operatorname{sen}\alpha$ = ordinata del punto P

$tg\,\alpha = TA = \frac{y_p}{x_p} = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$

$P\,(x_p, y_p)$
$\rightarrow (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$

$0 \leq \alpha \leq 2\pi$

$ctg\,\alpha = SB = \frac{x_p}{y_p} = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} = tg^{-1}\alpha$

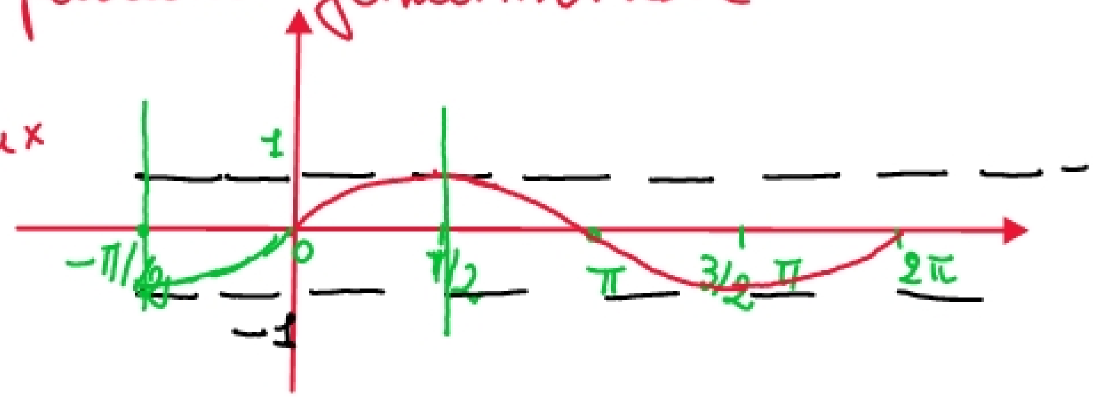
$OA = 1\,(u)$

$\sec\alpha = \cos^{-1}\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$

$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \operatorname{sen}^{-1}\alpha$

2. Funzioni goniometriche

$y = \operatorname{sen} x$



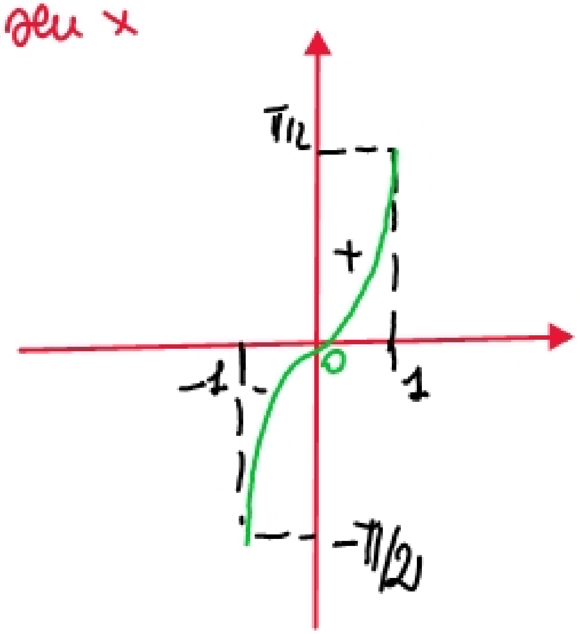
periodico: $2\pi = T$

$\forall x \in \mathbb{R}$ (campo)

$-1 \leq y \leq 1$

$-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$

$y = \operatorname{arcsen} x$



si inverte $y = \operatorname{sen} x$ nel tratto $[-\pi/2, \pi/2]$

dominio $[-1, 1]$

codominio $[-\pi/2, \pi/2]$

crescente

dispari