precisazioni:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^{4-1}} = \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4 \cdot x^{-1}} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^4}}{\cancel{x^4}} \cdot x = 0$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^5 + x^7 + o(x^5)}{x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^5}(1 + \overset{\to 0}{x^2} + \overset{\to 0}{\frac{o(x^5)}{x^5}})}{\cancel{x^5}} = 1$$

x^7 trascurabile rispetto $o(x^5)$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^5 + o(x^5)}{x^5} = 1$$

PARI GRADO → RAPPORTO TRA I COEFFICIENTI

TRASCURABILE RISPETTO

$$\lim_{x\to 0} \frac{x^7 + o(x^5)}{x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{o(x^5)}{x^5} = 0$$

prendo inferiore

$$\lim_{x\to 0} \frac{\boxed{2x^3} + 3x^5 + o(x^5)}{x^5} = \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x^5}\left(\overset{\to +\infty}{\frac{2}{x^2}} + 3 + \overset{\to 0}{\frac{o(x^5)}{x^5}}\right)}{\cancel{x^5}} = +\infty$$

• $$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\sqrt{e^{1/x}-\frac{1}{x}-1}} = \frac{e^{0=1}-1}{\sqrt{1-0-1}} = \frac{0}{0}$$

$$\frac{1}{x} \rightsquigarrow 0$$

cambio di variabile $\frac{1}{x} = t$ $\quad \to \underbrace{x}_{+\infty} = \frac{1}{t_{\rightsquigarrow 0}}$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{e^{t}-1}{\sqrt{e^{t}-t-1}} =$$

N. sviluppo al 1° ordine

D. sviluppo al 2° ordine, perché successivamente ne applico la $\sqrt{}$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\cancel{1}+t+o(t)-\cancel{1}}{\sqrt{\cancel{1}+\cancel{t}+\frac{t^2}{2}+o(t^2)-\cancel{t}-\cancel{1}}} = \lim_{t\to 0} \frac{t+o(t)}{\sqrt{\frac{t^2}{2}+o(t^2)}} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{t\left(1 + \frac{o(t)}{t}\right)}{\sqrt{t^2\left(\frac{1}{2} + \frac{o(t^2)}{t^2}\right)}} =$$

$$= \lim_{t \to 0} \frac{t\left(1 + \underbrace{\frac{o(t)}{t}}_{\to 0}\right)}{|t|\sqrt{\frac{1}{2} + \underbrace{\frac{o(t^2)}{t^2}}_{\to 0}}} =$$

$$= \sqrt{2} \cdot \lim_{t \to 0} \frac{t}{|t|} = \begin{cases} \lim\limits_{t \to 0^+} \sqrt{2}\,\frac{t}{t} = \sqrt{2} \\ \lim\limits_{t \to 0^-} \sqrt{2}\,\frac{t}{-t} = -\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{4x}{\operatorname{tg} 4x} \right)^{\frac{1}{x \operatorname{sen} 3x}}$$ passaggio all' esponenziale

$$= \lim_{x \to 0^+} e^{\log \left[\left(\frac{4x}{\operatorname{tg} 4x} \right) \right]^{\frac{1}{x \operatorname{sen} 3x}}} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} e^{\frac{1}{x \operatorname{sen} 3x} \cdot \log \left(\frac{4x}{\operatorname{tg} 4x} \right)} = e^{(*)}$$ propietà esponente argomento logaritmi

passo al calcolo del limite dell' esponente

$$(*) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x \operatorname{sen} 3x} \cdot \log \frac{4x}{\operatorname{tg} 4x}$$

per invertire l'argomento ed avere Tg x al numeratore

$$= \lim_{x \to 0^+} \left\{ \frac{1}{x \operatorname{sen} 3x} \cdot \log \left(\frac{tg\, 4x}{4x} \right)^{-1} \right\}$$

$$\frac{o(x^3)}{x} = o(x^2)$$

$$= - \lim_{x \to 0^+} \left\{ \frac{1}{x \operatorname{sen} 3x} \log \left(\frac{\overset{1}{\cancel{4x}} + \overset{\frac{16}{3} x^2}{\frac{1}{3} (4x)^{\cancel{3}\,2}} + o((4x)^3)}{\cancel{4x}} \right) \right\} =$$

dividiamo termine a termine

$$= - \lim_{x \to 0^+} \left\{ \frac{1}{x \operatorname{sen} 3x} \log \Big(\underbrace{1}_{1} \underbrace{+}_{+} \underbrace{\frac{16}{3} x^2 + o(x^2)}_{t} \Big) \right\} =$$

$$\log \Big(\underbrace{1}_{1} \underbrace{+}_{+} \underbrace{\left(\frac{16}{3} x^2 + o(x^2) \right)}_{t} \Big) = \frac{16}{3} x^2 + o(x^2) \cancel{+ o(x^4)}$$

$$t - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$$

$$t + o(t)$$

$$= - \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{16}{3} x^2 + o(x^2)}{x \left(3x + o(x^2) \right)} =$$

$$= - \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{16}{3} x^2 + o(x^2)}{3x^2 + o(x^3)} =$$

= confrontando i termini di grado minimo

$$= - \frac{16}{3} \cdot \frac{1}{3} = -16/9$$

$$= \underset{\text{iniziale}}{\text{limite}} = e^{\lim_{x \to 0^+} \{ \quad \}} = e^{-16/9}$$

$$\bullet \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{\sin x}} - e^{\frac{1}{x}}}{\operatorname{tg}(2x)\; e^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}} = \frac{+\infty - \infty}{0\cdot(+\infty)}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\underbrace{e^{\frac{1}{x}}}\left[e^{\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}} - 1\right]}{\underbrace{\frac{\operatorname{tg} 2x}{2x}}_{1} \cdot 2x \cdot \underbrace{e^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}}}} =$$

$$\frac{\operatorname{tg} 2x}{2x} = \frac{\sin 2x}{\cos 2x}\cdot\frac{1}{2x} = \underbrace{\frac{\sin 2x}{2x}}_{\to 1}\cdot \underbrace{\frac{1}{\cos 2x}}_{\to 1} \to 1$$

$$x \to 0^+$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2x}\; e^{\frac{1}{x}-\frac{1}{\operatorname{tg} x}} \left[e^{\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}} - 1\right]$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{2x} \, e^{\frac{tgx - x}{x \, tgx}} \left[e^{\frac{x - senx}{x \, senx}} - 1 \right] =$$

denominatori comuni

per $x \to 0^+$ $\quad \dfrac{Tgx - x}{x \cdot tgx} \rightsquigarrow \dfrac{0 - 0}{0 \cdot 0} = \dfrac{0}{0}$ F.I. posso procedere allo sviluppo

$$\frac{x - senx}{x \, senx} = \frac{0-0}{0 \cdot 0} = \frac{0}{0} \quad \text{F. I.}$$

NB ciascun numeratore e denominatore sono infinitesimi per $x \to 0$
$\Rightarrow$ posso applicare gli sviluppi

sviluppo tgx al 2° ord.

sviluppo al 2° ordine $senx$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{2x} \, e^{\frac{\overbrace{x + \frac{1}{3}x^2 + o(x^3)}^{} - x}{x\,(\underbrace{x + o(x)}_{})}} \cdot \left[e^{\frac{x - \overbrace{x + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)}^{}}{x \cdot (x + o(x))}} - 1 \right] =$$

sviluppo Tgx al 1° ordine

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2x} \cdot e^{\frac{\frac{1}{3}x^3 + o(x^3)}{x^2 + o(x^2)}} \left[e^{\frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^2+o(x^2)}} - 1 \right]$$

$$1 \qquad\qquad 2$$

$$1 : \quad \frac{\cancel{x^3}\left(\frac{1}{3} + \frac{o(x^3)}{x^3}\right)}{\cancel{x^2}\left[1 + \underbrace{\frac{o(x^2)}{x^2}}_{\to 0 \ x\to 0}\right]} \simeq \frac{1}{3}x + o(x)$$

$$2 \quad \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{x^2\left(1 + \underbrace{\frac{o(x^2)}{x^2}}_{\to 0 \ x\to 0}\right)} \simeq \frac{x}{6} + o(x)$$

divido ciascun termine del numeratore per x^2

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{2x} \underbrace{e^{\frac{1}{3}x + o(x)}}_{\to 1} \underbrace{\left[e^{\frac{1}{6}x + o(x)} - 1 \right]}_{\to 1-1} =$$

(Prodotto dei limiti)

$\to$ sviluppo al 1° ordine

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\overbrace{\cancel{1} + \frac{1}{6}x + o(x)}^{\text{sviluppo I° ordine di } e^t} - \cancel{1}}{2x} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

pari grado $\to$ rapporto tra i coefficienti

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{2x} \left(e^{\frac{1}{6}x + o(x)} - 1 \right)$$

$\to$ intero esponente di e

per vederlo come limite notevole:

$$= \lim_{x \to 0^+} \underbrace{\frac{e^{\frac{1}{6}x + o(x)} - 1}{\frac{1}{6}x + o(x)}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{1/6\, x + o(x)}{2x}}_{\to} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$