INTEGRAZIONI PER FUNZIONI FRATTE

1. funzione razionale fratta : $\frac{M(x)}{N(x)} = \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m}{b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \ldots + b_n}$

2. guardare il grado del polinomio al numeratore ed al denominatore

se grado NUM $\geq$ grado DEN. $\Rightarrow$ funzione razionale fratta impropria o irregolare

$\downarrow$

procedo alla divisione tra numeratore e denominatore :

$$\frac{M(x)}{N(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{N(x)}$$

$$\int \frac{M(x)}{N(x)}\,dx = \int Q(x)\,dx + \int \frac{R(x)}{N(x)}\,dx$$

frazione propria

grado num < grado den.

es:

$$f(x) = \frac{x^4-3}{x^2+2x+1} = \left(x^2-2x+3\right) + \frac{-4x-6}{x^2+2x+1}$$

divisione polinomiale

polinomio dividendo

polinomio divisore :

N.B. ordinati in senso decrescente

scrivere con il segno opposto

moltiplicazione

divisione tra i termini di grado massimo

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
x^4 & +0x^3 & +0x^2 & +0x & -3 & x^2+2x+1 \\
\cline{6-6}
-x^4 & -2x^3 & -x^2 & & & x^2-2x+3 \\
\cline{1-5}
// & -2x^3 & -x^2 & +0x & -3 & \\
 & +2x^3 & +4x^2 & +2x & & \\
\cline{2-5}
 & // & +3x^2 & +2x & -3 & \\
 & & -3x^2 & -6x & -3 & \\
\cline{3-5}
 & & // & -4x & -6 &
\end{array}
$$

$$\int \frac{x^4 - 3}{x^2+2x+1}\,dx = \int (x^2-2x+3)\,dx + \int \frac{-4x-6}{x^2+2x+1}\,dx =$$

integrazione di polinomi

$$D(x^2+2x+1) = 2x+2 = $$
$$= 2(x+1)$$

$$(*) = -\int \frac{4x+6}{x^2+2x+1}\,dx = -\int \frac{4x+4+2}{x^2+2x+1}\,dx =$$

$$= -\left\{ 2\int \frac{2(x+1)}{x^2+2x+1}\,dx + 2\int \frac{1}{x^2+2x+1}\,dx \right.$$

integrale del log perché il numeratore è la derivata del denominatore

$$(x+1)^2$$

$$\int \frac{1}{(x+1)^2}$$

3. funzioni razionali proprie del tipo:

BINOMI DI PRIMO GRADO
(con potenze)

① $f(x) = \dfrac{A}{x-a}$

$D(x-a) = 1$

$$\int \frac{A}{x-a}\,dx = A \int \frac{1}{x-a}\,dx =$$

$$= A \ln|x-a| + c$$

② $g(x) = \dfrac{A}{(x-a)^n}$ $\quad n \geq 2$

del tipo $\dfrac{1}{t^n} \to t^{-n}$

$$\int \frac{A}{(x-a)^n}\,dx = A \int (x-a)^{-n}\,dx = A\,\frac{1}{-n+1}(x-a)^{-n+1} + c$$

$$= \frac{A}{1-n}\,\frac{1}{(x-a)^{n-1}} + c$$

③ $$h(x) = \frac{ax+b}{x^2+px+q}$$ con $\Delta = p^2 - 4q < 0$

$\downarrow$

ho soluzioni complesse coniugate al denominatore

si cerca di scomporre (il numeratore) in modo tale che si ottengano 2 frazioni di cui una rappresenti la derivata del denominatore, e la seconda abbia come numeratore una costante.

$$\int \frac{ax+b}{x^2+px+q}\,dx = \alpha \int \frac{2x+p}{x^2+px+q}\,dx + \beta \int \frac{1}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+k^2}\,d\left(x+\frac{p}{2}\right) =$$

$$= \alpha \ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{\beta}{k}\,\operatorname{arctg}\frac{x+p/2}{k} + C$$

Riprendendo l'esercizio:

$$\int \frac{x^4-3}{x^2+2x+1}\,dx = \int (x^2-2x+3)\,dx - 2\int \frac{2x+2}{x^2+2x+1}\,dx - 2\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx$$

$$= \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x - 2\ln|x^2+2x+1| - 2\,\frac{1}{1-2}\cdot\frac{1}{(x+1)^{2-1}} + c =$$

$$= \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x - 2\ln|x^2+2x+1| + \frac{2}{x+1} + c$$

N.B. $\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx = \int \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t} + c_1$

$$\bullet \int \frac{3x+5}{x^2+x+2}\,dx$$

$\Delta = 1-8 = -7 < 0$ il denominatore non è scomponibile

il numeratore è di primo grado, il denominatore è di 2° grado.

$$D(x^2+x+2) = 2x+1$$

$$\frac{3x+5}{x^2+x+2} = \frac{\frac{3}{2}(2x+1)+\frac{7}{2}}{x^2+x+2} = \frac{3}{2}\,\frac{2x+1}{x^2+x+2} + \frac{7}{2}\,\frac{1}{x^2+x+2}$$

$$3x+5 = \frac{2}{2}(3x+5) = \frac{1}{2}(6x+10) = \frac{1}{2}(6x+3+7) =$$

$$= \frac{1}{2}\left[3(2x+1)+7\right] = \frac{3}{2}(2x+1)+\frac{7}{2}$$

si consideri la 2ª frazione:

$$\frac{7}{2}\cdot\frac{1}{x^2+x+2} = \frac{7}{2}\,\frac{1}{x^2+x+\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{7}{4}}_{=2}} = \frac{7}{2}\,\frac{1}{\left(x+\underbrace{\frac{1}{2}}_{p/2}\right)^2+\underbrace{\frac{7}{4}}_{K}}$$

$$\Rightarrow I = \frac{3}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+2}\,dx + \frac{7}{2}\int\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4}}\,dx =$$

$$= \frac{3}{2}\ln\left(x^2+x+2\right) + \frac{7}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{7}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}} + c$$

non pongo il valore assoluto
perché la quantità è positiva

(4) $I_n = \int \frac{2x+b}{(x^2+px+q)^n}\, dx$

con $\Delta = p^2 - 4q > 0$

si procede come nel caso precedente, scomponendo l'integrale nel modo seguente

$$I_n = \alpha \int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n} + \beta \int \frac{1}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+k^2\right]^n}\, dx$$

$$\bullet \int \frac{3x+2}{(x^2+2x+10)^2}\, dx$$

scrivere il numeratore in modo tale che in parte rappresenti la derivata del denominatore

$$\frac{3x+2}{(x^2+2x+10)^2} = \frac{\frac{3}{2}(2x+2)-1}{(x^2+2x+10)^2} = \frac{3}{2}\frac{2x+2}{(x^2+2x+10)^2} - \frac{1}{[(x+1)^2+9]^2}$$

$$D(x^2+2x+10) = 2x+2$$

$$x^2+2x+10 = x^2+2x+1+9 = (x+1)^2+9$$

$$\int \frac{3x+2}{(x^2+2x+10)^2}\, dx = \frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{(x^2+2x+10)^2}\, dx - \underbrace{\int \frac{1}{[(x+1)^2+9]^2}\, dx}_{I_1} =$$

$$= \frac{3}{2}(-1)\frac{1}{x^2+2x+10} - I_1$$

$$I_1 = \int \frac{1}{\left[(x+1)^2+9\right]^2}\,dx =$$

cambio di variabile: $3t = x+1$ $\quad x = 3t-1$

$3\,dt = dx$

$$= \int \frac{1}{\left[9t^2+9\right]^2}\cdot 3\,dt = \int \frac{3}{(9t^2+9)^2}\,dt =$$

$$= \int \frac{3}{81\,(t^2+1)^2}\,dt = \frac{1}{27}\int \frac{1}{(t^2+1)^2}\,dt \underset{p.p.}{=}$$

$$= \frac{1}{27}\left\{ \frac{t}{(t^2+1)^2} - \int t\cdot(-2)\cdot(t^2+1)^{-3}\,2t\,dt \right\} =$$

$$\frac{1}{(t^2+1)^2} = (t^2+1)^{-2}$$

$$= \frac{1}{27} \int \frac{t}{(t^2+1)^2} + \int \frac{4t^2}{(t^2+1)^3} \, dt$$

$$\int \frac{t}{(t^2+1)^2} \, dt$$

$$I_n = \int \frac{ax+b}{(x^2+px+q)^n} \, dx = \qquad x^2+px+q \quad \Delta < 0$$

$$= \alpha \int \frac{2x+p}{(x^2+px+q)^n} \, dx + \beta \int \frac{1}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+k^2\right]^n} \, dx$$

① $$\int \overbrace{\frac{2x+p}{(x^2+px+p)^n}\,dx}^{d(x^2+px+p)} = \int (x^2+px+q)^{-n}\, d(x^2+px+q) = -\frac{1}{n-1}\,\frac{1}{(x^2+px+q)^{n-1}} + C_1$$

② $$\int \frac{1}{\left[\underbrace{(x+p/2)^2}+k^2\right]^n}\,dx = \int \frac{k\,dt}{\left[k^2t^2+k^2\right]^n} = \frac{1}{k^{2n-1}}\underbrace{\int \frac{1}{(1+t^2)^n}\,dt}_{J_n}$$

$x+p/2 = kT$ $\qquad$ $dx = k\,dt$

$$\boxed{\begin{aligned} J_n &= \int \frac{1}{(1+t^2)^n}\,dt \\ J_{n+1} &= \frac{t}{2n(1+T^2)^{n-1}} + \frac{2n-1}{2n}\,J_n \end{aligned}}$$

$$\int \frac{1}{1+t^2}\,dt \underset{pp.}{=} \frac{1}{1+t^2}\cdot t - \int t \cdot \underbrace{\frac{-2t}{(1+t^2)^2}}_{D\left(\frac{1}{1+t^2}\right)}\,dt =$$

$$= \frac{t}{1+t^2} + 2\int \frac{t^2}{(1+t^2)^2}\,dt =$$

$$= \frac{t}{1+t^2} + 2\int \frac{t^2+1-1}{(1+t^2)^2}\,dt =$$

$$= \frac{t}{1+t^2} + 2\int \left[\frac{\cancel{t^2+1}}{(1+t^2)^{\cancel{2}}} - \frac{1}{(1+t^2)^2}\right] dt =$$

$$\int \frac{1}{1+t^2}\,dt = \frac{t}{1+t^2} + 2\int \frac{1}{1+t^2}\,dt - 2\int \frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt$$

$$2\int \frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt = \frac{t}{1+t^2} + 2\int \frac{1}{1+t^2}\,dt - \int \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$$2\int \frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt = \frac{t}{1+t^2} + \int \frac{1}{1+t^2}\,dt$$

$$\int \frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt = \frac{1}{2}\,\frac{t}{1+t^2} + \underbrace{\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+t^2}\,dt}_{\frac{1}{2}\,\operatorname{arctg} t}$$

$$\int \frac{1}{(1+t^2)^2}\,dt = \frac{1}{2}\,\frac{t}{1+t^2} + \frac{1}{2}\,\operatorname{arctg} t + c$$

$$J_1 = \int \frac{1}{1+t^2}\, dt = \operatorname{arctg} t + c_0$$

$$x + \pi/2 = k\pi$$

$$J_2 = \int \frac{1}{(1+t^2)^2}\, dt = \frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t + c_1$$

$$J_3 = \frac{t}{4(1+t^2)^2} + \frac{3}{4}\left[\frac{t}{2(1+t^2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t\right] + c_2$$

$$\vdots$$

4. Denominatori radici reali distinte :

$\frac{M(x)}{N(x)}$ con denominatore scomponibile

$$N(x) = (x-a)(x-b) \cdots (x-d)$$

si ricercano le costanti :

$$\frac{M(x)}{N(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \cdots + \frac{D}{x-d}$$

binomi di primo grado facilmente integrabili

$$\int \frac{2x-3}{x^2-x-2}\,dx = \int \frac{2x-3}{(x+1)(x-2)}\,dx =$$

$$\frac{2x-3}{(x+1)(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}$$

$$2x-3 = A(x-2) + B(x+1) = (A+B)x - 2A + B$$

per l'identità polinomiale:

$$\begin{cases} A+B=2 \\ -2A+B=-3 \end{cases} \qquad \begin{cases} -3A=-5 \\ B=2-A \end{cases} \to \begin{cases} A=5/3 \\ B=2-\frac{5}{3}=\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$= \int \frac{\frac{5}{3}}{x+1}\,dx + \int \frac{\frac{1}{3}}{x-2}\,dx = \frac{5}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{3}\ln|x-2| + C$$

•• Radici reali e multiple

$$N(x) = (x-a)^r \; (x-b)^s \cdots \; (x-d)^t$$

$$\frac{M(x)}{N(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_r}{(x-a)^r} +$$

r molteplicità del binomio $(x-a)$

$$+ \frac{B_1}{(x-b)} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \cdots + \frac{B_s}{(x-b)^s} +$$

s molteplicità del binomio $(x-b)$

- - - - -

$$+ \frac{D_1}{(x-d)} + \frac{D_2}{(x-d)^2} + \cdots + \frac{D_t}{(x-d)^t}$$

t molteplicità del binomio $(x-d)$

- $\displaystyle\int \frac{3x-1}{x^3-5x^2+8x-4}\,dx$

$[x^3-5x^2+8x-4] = (x-1)(x^2-4x+4) = (x-1)(x-2)^2$

$P(1) = 1-5+8-4 = 0$

$(x-1)$ è divisore $\longrightarrow$ con Ruffini

i fattori $(x-1)$ ha molteplicità 1

$(x-2)$ ha molteplicità 2

$$\frac{3x-1}{x^3-5x^2+8x-4} = \frac{3x-1}{(x-1)(x-2)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B_1}{x-2} + \frac{B_2}{(x-2)^2} =$$

$$= A(x-2)^2 + B_1(x-1)(x-2) + B_2(x-1) =$$

$$= (A+B_1)x^2 + (-4A-3B_1+B_2)x + (4A+2B_1-B_2)$$

$$\begin{cases} A + B_1 = 0 \\ -4A - 3B_1 + B_2 = 3 \\ 4A + 2B_1 - B_2 = -1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} A = -B_1 = 2 \\ B_1 = -2 \\ B_2 = 3 + 3B_1 + 4A = 5 \end{cases}$$

$$= \int \frac{3x - 1}{x^3 - 5x^2 + 8x - 4} \, dx = 2 \int \frac{1}{x-1} \, dx - 2 \int \frac{1}{x-2} \, dx + 5 \int (x-2)^{-2} \, d(x-2) =$$

$$= 2 \ln |x-1| - 2 \ln |x-2| + 5 \frac{(x-2)^{-1}}{-1} + C =$$

$$= \ln \frac{(x-1)^2}{(x-2)^2} - \frac{5}{x-2} + C$$

... Radici complesse semplici (già visto)

$$\int \frac{2x+10}{(x-2)(x^2+x+1)}\,dx =$$

NON SCOMPONIBILE E DI 2° grado

$$\frac{2x+10}{(x-2)(x^2+x+1)} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{(x^2+x+1)} = \frac{A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x-2)}{(x-2)(x^2+x+1)}$$

$$\begin{cases} A+B=0 \\ A-2B+C=2 \\ A-2C=10 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} A=2 \\ B=-2 \\ C=-4 \end{cases}$$

$$= \int \frac{2}{x-2}\,dx - \int \frac{2x+4}{(x^2+x+1)}\,dx = \int \frac{2}{x-2}\,dx - \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx - \int \frac{3}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\,dx =$$

$$= 2\ln|x-2| - \ln|x^2+x+1| - 2\sqrt{3}\arctg\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{3}/2} + C$$

.... Radici complesse multiple

$$\int \frac{x^6}{(x^2+1)^4}\,dx$$

$$\frac{x^6}{(x^2+1)^4} = \frac{A_1x+B_1}{x^2+1} + \frac{A_2x+B_2}{(x^2+1)^2} + \frac{A_3x+B_3}{(x^2+1)^3} + \frac{A_4x+B_4}{(x^2+1)^4}$$

aumento il grado del denominatore fino al valore massimo (legato alla molteplicità)

$$= \dots \Rightarrow x^6 = A_1x^7 + B_1x^6 + (3A_1+A_2)x^5 + (3B_1+B_2)x^4 + (3A_1+2A_2+A_3)x^3 +$$
$$+ (3B_1+2B_2+B_3)x^2 + (A_1+A_2+A_3+A_4)x + (B_1+B_2+B_3+B_4)$$

$$\begin{cases} A_1 = 0 \\ B_1 = 1 \\ 3A_1 + A_2 = 0 \\ 3B_1 + B_2 = 0 \\ 3A_1 + 2A_2 + A_3 = 0 \\ 3B_1 + 2B_2 + B_3 = 0 \\ A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 0 \\ B_1 + B_2 + B_3 + B_4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A_2 = A_2 = A_3 = A_4 = 0 \\ B_1 = 1 \\ B_2 = -3 \\ B_3 = 3 \\ B_4 = -1 \end{cases}$$

$$\int \frac{x^6}{(x^2+1)^4}\,dx = \int \frac{1}{(x^2+1)}\,dx - 3\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx + 3\int \frac{1}{(x^2+1)^3}\,dx$$

$$- \int \frac{1}{(x^2+1)^4}\,dx$$