Lezione 26

Equazioni differenziali del 1° ordine lineari

a coefficienti variabili

forma normale:

$$y' = a(x)\, y + b(x)$$

se $a(x) = 0$ $\quad y' = b(x)$ $\quad$ integrazione

se $b(x) = 0$ $\quad y' = a(x)\, y$ $\quad$ a variabili separabili

PAPER SHOW

se $a(x) \neq 0$ & $b(x) \neq 0$

$$\text{p.Ch.} \begin{cases} y = a(x)\, y + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

soluzione: $$y(x) = e^{A(x)} \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{-A(t)}\, b(t)\, dt \right)$$

$$A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\, dt$$

PAPER SHOW

PAPER SHOW®

- $\begin{cases} y' - y = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

in forma normale:

$$y' = y + 1$$

<u>V. S.</u> $y \neq -1$

$$\frac{y'}{y+1} = 1$$

$$\int \frac{dy}{y+1} = \int dx \Rightarrow \log|y+1| = x + c$$

$$|y+1| = e^{x+c} = k e^{x}$$

$$y+1 = \pm k e^{x} = k e^{x} \quad k \in \mathbb{R}$$

$\Leftarrow$

Considerando la cond. iniz.

$y(0) = 0$

$|0+1| = k e^{0} \Rightarrow k = 1$

SOLUZIONE

$$y = e^{x} - 1$$

PAPER SHOW

vedendola come eq. diff. a coeff. variabili

$$y' = y + 1 \qquad\qquad y' = a(x)\, y + b(x)$$

$x_0 = 0$

$y_0 = 0$

$a(x) = 1$

$b(x) = 1$

$$A(x) = \int_0^x dt = x$$

$$y(x) = e^{A(x)} \left(y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{-A(t)}\, b(t)\, dt \right)$$

sostituire

$$y(x) = e^{x} \left(0 + \int_0^x e^{-t}\, dt \right) =$$

$$= e^{x} \left(1 - e^{-x} \right) = \underline{e^{x} - 1}$$

<u>N.B.</u> $\displaystyle\int_0^x e^{-t}\, dt = -e^{-t}\Big|_0^x = -e^{-x} + e^{0} = 1 - e^{-x}$

PAPER SHOW

- $$\begin{cases} y' = y \sin x + \sin 2x \\ y(0) = -2 \end{cases}$$

$a(x) = \sin x \quad \longrightarrow \quad A(x) = \int_0^x \sin t \, dt = -\cos t \Big|_0^x =$

$b(x) = \sin 2x = 2 \sin x \cos x \qquad = -\cos x + \cos 0 = 1 - \cos x$

$$\int_0^x e^{-A(t)} b(t) \, dt =$$

$$= \int_0^x e^{-(1-\cos t)} \cdot \underbrace{\sin 2t}_{2 \sin t \cos t} \, dt =$$

$$= \int_0^x 2 \underbrace{e^{\cos t - 1} \sin t}_{D(-e^{\cos t - 1})} \cos t \, dt =$$

PAPER SHOW

$$-2\int_0^x \underbrace{-e^{(\cos t-1)}\operatorname{sen} t}_{D\left(e^{\cos t-1}\right)}\cos t \; dt =$$

$$D\left(e^{\cos t-1}\right) = e^{\cos t}\left(-\operatorname{sen} t\right)$$

$$= -2\left\{ e^{(\cos t-1)}\cdot\cos t - \int e^{\cos t-1}\left(-\operatorname{sen} t\right) dt \right\}_0^x =$$

$$= -2\left\{ e^{(\cos t-1)}\cos t - e^{\cos t-1} \right|_0^x =$$

$$= -2\left\{ e^{\cos x-1}\cos x - e^{\cos x-1} - e^{0}\cos 0 + e^{\overbrace{\cos 0-1}^{0}} \right\} =$$

$$= -2\left\{ e^{\cos x-1}\cos x - e^{\cos x-1} - \cancel{1+1} \right\}$$

PAPER SHOW

$$y(x) = e^{1-\cos x}\left(-2 + (-2)\left(e^{\cos x - 1}\cos x - e^{\cos x - 1}\right)\right) =$$

$$= -2e^{1-\cos x} - 2\underbrace{e^{1-\cos x}\, e^{\cos x - 1}}_{e^{1-\cos x+\cos x-1} = e^{0} = 1}\left(\cos x - 1\right) =$$

$$= -2e^{1-\cos x} - 2\cos x + 2 =$$

$$= 2 - 2\cos x - 2e^{1-\cos x} =$$

$$= 2\left(1 - \cos x - e\, e^{-\cos x}\right)$$

PAPER SHOW

- Determinare la soluzione generale dell'equazione differenziale

$$y' = \frac{1}{\sqrt{x}}\, y + 1$$

Determinare poi le soluzioni $y(x)$ che soddisfano

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = -\infty$$

$$a(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \qquad A(x) = \int \frac{2}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2\sqrt{x} + c_1$$

$$\left(D\left(\sqrt{x}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\right.$$

$$b(x) = 1$$

$$y(x) = e^{2\sqrt{x} + c_1}\left(\int e^{-2\sqrt{x}}\, dx\right)$$

PAPER SHOW

$$\int e^{-2\sqrt{x}}\, dx =$$

$$2\sqrt{x} = t$$

cambio di variabile

$$\frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = dT \qquad x = \frac{1}{4} T^2$$

$$dx = \frac{1}{2} T\, dT$$

$$\sqrt{x} = T/2$$

$$\frac{1}{T/2}\, dx = dT$$

$$dx = \frac{T}{2}\, dT$$

$$= \int \frac{t}{2} e^{-t}\, dt = \frac{1}{2} \int T \underset{\text{der. 1°}}{e^{-T}}\, dT \underset{\text{p.p.}}{=}$$

$$= \frac{1}{2}\left(-T e^{-T} - \int -e^{-T}\, dt\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(-T e^{-T} - e^{-T} + c\right)$$

PAPER SHOW

soluzione generale, sostituendo T con $(2\sqrt{x})$:

$$y(x) = \frac{1}{2} e^{2\sqrt{x}} \left(-2\sqrt{x}\, e^{-2\sqrt{x}} - e^{-2\sqrt{x}} + c \right) =$$

svolgo il prodotto tenendo conto che:

$$e^{2\sqrt{x}} \cdot e^{-2\sqrt{x}} = e^{2\sqrt{x} - 2\sqrt{x}} = e^{0} = 1$$

$$= -\sqrt{x} - \frac{1}{2} + \frac{c}{2} e^{2\sqrt{x}}$$

Integrale/soluzione generale

PAPER SHOW

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = -\infty \qquad \text{e?}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(-\sqrt{x} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} c\, e^{2\sqrt{x}} \right) = -\infty \pm \infty$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \underbrace{e^{2\sqrt{x}}}_{\to +\infty} \left(-\underbrace{\frac{\sqrt{x}}{e^{2\sqrt{x}}}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{\frac{1}{2}}{e^{2\sqrt{x}}}}_{\to 0} + \frac{1}{2} c \right) =$$

$$\left(\nexists \right) = \begin{cases} +\infty & \text{se } c > 0 \\ -\infty & \text{se } c < 0 \end{cases}$$

non è univocamente determinato al variare di c

Risposta: per $c < 0$ il limite è verificato!

- Scrivere l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$(1+x^2)\, y' = y$$

e stabilire se esse ammette soluzioni non limitate.

Determinare inoltre, se esistono, le soluzioni non costanti $y_1(x)$ e $y_2(x)$ tali che

$$\lim_{x \to +\infty} y_1(x) = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} y_2(x) = 0$$

PAPER SHOW

$$(1+x^2)\,y' = y$$

$$y' = \frac{1}{1+x^2}\,y$$

v. s.

$$a(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$b(x) = 0$$

$$\int e^{-A(x)} \cdot b(x)\,dx = 0$$

v. s.

$y \neq 0$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$\log|y| = \operatorname{arctg}(x) + c$$

$$|y| = \tilde{k}\, e^{\operatorname{arctg}(x)}$$

$$\left[\; y = \pm \tilde{k}\, e^{\operatorname{arctg} x} \;\right] \rightarrow y = k\, e^{\operatorname{arctg}(x)}$$

$$(e^c = k)$$

$$k \in \mathbb{R}$$

PAPER SHOW

$a(x) = \frac{1}{1+x^2}$ $\qquad A(x) = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + c_1$

$b(x) = 0$ $\qquad \int e^{-A(x)}\, b(x)\, dx \Rightarrow$

soluzione:

$$y(x) = e^{\operatorname{arctg} x + c_1} = c\, e^{\operatorname{arctg} x} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

? ammette soluzioni limitate ? NO

$$y(x) = c\, e^{\operatorname{arctg} x}$$

$$-\pi/2 < \operatorname{arctg} x < \pi/2$$

$$e^{-\pi/2} < e^{\operatorname{arctg} x} < e^{\pi/2} \qquad \forall c \in \mathbb{R}$$

$$c\, e^{-\pi/2} < c\, e^{\operatorname{arctg} x} < c\, e^{\pi/2}$$

PAPER SHOW

9 $\lim_{x \to +\infty} y_1(x) = 1$ $\lim_{x \to +\infty} y_2(x) = 0$

$$y(x) = c\, e^{\operatorname{arctg} x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} c\, e^{\operatorname{arctg} x} = c\, e^{\pi/2}$$

$y_1(x)$

$$c\, e^{+\pi/2} = 1$$

$$c_1 = \frac{1}{e^{\pi/2}} = e^{-\pi/2}$$

$$y_1(x) = e^{-\pi/2} \cdot e^{\operatorname{arctg} x} = e^{\operatorname{arctg} x - \pi/2}$$

$y_2(x)$:

$$c\, e^{\pi/2} = 0$$

$$c_2 = 0$$

$$y_2(x) = 0$$

soluzione costante

PAPER SHOW

- Risolvere l'equazione differenziale

$$y' + 2xy = x$$

e rispondere ai seguenti quesiti, motivando le risposte:

1) esistono soluzioni che tendono a 0 per $x \to +\infty$

$$\left(\lim_{x \to +\infty} y(x) = 0 \right)$$

2) quale deve essere il valore iniziale y_0 affinché la soluzione che soddisfa $y(0) = y_0$ sia costante.

PAPER SHOW

nella forma scritta "implicita"

la soluzione generale:

$$y(x) = e^{-A(x)} \int e^{A(x)} b(x)\, dx \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

$a(x) = 2x$

$$A(x) = \int a(x)\, dx = \int 2x\, dx = x^2 + c_1$$

$$\int e^{A(x)} b(x)\, dx = \frac{1}{2} \int e^{x^2} \underbrace{2x}_{D(x^2)}\, dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + c_2$$

<u>Soluzione generale</u>:

$$y(x) = e^{-x^2}\left(\frac{e^{x^2}}{2} + c\right) = \frac{1}{2} + c\, e^{-x^2}$$

PAPER SHOW

$$y(x) = \frac{1}{2} + c\, e^{-x^2}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2} + c\, \underbrace{e^{-x^2}}_{\to 0} = \frac{1}{2} \qquad \forall c \in \mathbb{R}$$

1) non esistono $y(x)$ che soddisfa la condizione posta

2) $y(0) = y_0$ sia costante ? C.I. ?

$$y(x) = \frac{1}{2} + c\, e^{-x} \qquad y(x) = \text{cost.} \ ?$$

vero $\iff$ $c = 0$ $\Rightarrow$ $y(x) = \frac{1}{2}$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ C.I. $y(0) = y_0 = \frac{1}{2}$