Lezione 27

- $\begin{cases} y'' - 2y' - 8y = 0 \\ y(1) = 1 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$ ed il valore in $x = 0$

eq. associata

$$\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0$$

$$(\lambda - 4)(\lambda + 2) = 0$$

$$\lambda_1 = 4$$

$$\lambda_2 = -2$$

N.B.

- soluz. reali distinte
- soluzioni reali con molteplicità
- soluz. complesse

Soluzione generale $\left(y(x) = c_1 e^{\overset{\lambda_i}{-2}x} + c_2 e^{\overset{\lambda_i}{4}x} \right)$

Rispettando l'ordine $y(x) = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-2x}$

PAPER SHOW

Determinazione dei coeff c_1 e c_2:

int. gen: $y(x) = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-2x}$

$y(2) = 1$

$y'(2) = 0$

sost. $\Rightarrow$

$$1 = c_1 e^{4} + c_2 e^{-2} \qquad (*)$$

$$y'(x) = 4 c_1 e^{4x} - 2 c_2 e^{-2x}$$

$$0 = 4 c_1 e^{4} - 2 c_2 e^{-2} \qquad (**)$$

(*) (**) che pongo a sistema per calcolare c_1 e c_2

$$\begin{cases} 2 c_1 e^{4} + 2 c_2 e^{-2} = 2 \\ 4 c_1 e^{4} - 2 c_2 e^{-2} = 0 \end{cases}$$

$+$

$$6 c_1 e^{4} = 2$$

$$c_1 = \frac{1}{3} e^{-4}$$

$$\begin{cases} c_1 = \frac{1}{3} e^{-4} \\ c_2 e^{-2} = 1 - c_1 e^{4} = \\ \quad = 1 - \frac{1}{3} \underbrace{e^{-4} \cdot e^{4}}_{1} = \\ \quad = 2/3 \end{cases}$$

$$c_2 = \frac{2}{3} e^{2}$$

PAPER SHOW

Soluzione particolare

$$y(x) = \frac{1}{3} e^{-4} e^{4x} + \frac{2}{3} e^{2} \cdot e^{-2x} =$$

$$= \frac{1}{3} e^{4x-4} + \frac{2}{3} e^{2-2x}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y(0) = \frac{1}{3} e^{-4} + \frac{2}{3} e^{2} = \frac{1}{3}\left(e^{-4} + 2e^{2}\right) \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{3} e^{\overset{\to +\infty}{4x-4}} + \frac{2}{3} \underbrace{e^{2-2x}}_{\to e^{-\infty} = 0} \right) = +\infty$$

PAPER SHOW

- $y'' - 4y' + 13y = \underbrace{x e^{x}}_{T.N.}$

Equazione di 2° ordine a coeff. costanti, non omogenea

eq. ass.

$y(x)$ = int. gener + int. part.

polinomio caratteristico

$$\lambda^2 - 4\lambda + 13 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = +2 \pm \sqrt{4-13} = 2 \pm \sqrt{-9} = 2 \pm 3i$$

2 soluzioni complesse coniugate

int. generale : $y(x) = C_1 e^{2x} \cos(3x) + C_2 e^{2x} \sin(3x)$

parte reale → polinomio esponente

parte imm. → argomento delle funz. trig.

" Integrale " particolare (soluzione particolare)

T.N. $b(x) = x e^x$ => polinomio di 1° grado · esponenziale

$$y_p(x) = (Ax + B)\, e^x$$

determinare A e B in modo tale che $y_p(x)$ sia soluzione dell' equazione:

$$y_p(x) = (Ax + B)\, e^x$$

$$y'_p(x) = A\, e^x + e^x (Ax + B) = e^x (Ax + B + A)$$

$$y''_p(x) = e^x (Ax + B + A) + e^x A = e^x (Ax + B + 2A)$$

PAPER SHOW

Sostituendo nell' eq. diff., che deve verificare:

$$y'' - 4y' + 13y = xe^x$$

$$\cancel{e^x}(Ax + 2A + B) - 4\cancel{e^x}(Ax + B + A) + 13e^x(Ax + B) = x\cancel{e^x}$$

$$Ax + 2A + B - 4Ax - 4B - 4A + 13Ax + 13B = x$$

$$10Ax - 2A + 10B = x$$

Identità polinomiale

$$\begin{cases} 10A = 1 \\ -2A + 10B = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = 1/10 \\ B = \frac{1}{10}(2A) = \frac{1}{10} \cdot 2 \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{50} \end{cases}$$

$$y_p(x) = \left(\frac{1}{10}x + \frac{1}{50}\right)e^x$$

PAPER SHOW

Soluzione generale

$$y(x) = \underset{\text{omogenea}}{y_{om.}(x)} + \underset{\text{particolare}}{y_p(x)} =$$

$$= c_1 e^{2x} \cos 3x + c_2 e^{2x} \sin 3x + \left(\frac{1}{10}x + \frac{1}{50}\right) e^{x}$$

PAPER SHOW

- $y'' + y' + \frac{1}{4} y = \cos x$

- $y_{om}(x)$:

$$\lambda^2 + \lambda + \frac{1}{4} = 0$$

$$\left(\lambda + \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \qquad \lambda = -\frac{1}{2}$$

v reale
v radice doppia
v (molteplicità 2)

$$y_{om}(x) = c_1 e^{-\frac{1}{2}x} + c_2 x e^{-\frac{1}{2}x}$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} c_i x^{i-1} e^{\lambda x} \right)$$

n molteplicità delle sol. λ.

PAPER SHOW

$y_p(x) = A\cos x + B\sin x$ dato che $b(x) = \cos x$

$$y_p'(x) = -A\,\text{sen}\,x + B\cos x$$

$$y_p''(x) = -A\cos x - B\,\text{sen}\,x$$

sostituendo nell' equazione differenziale:

$$y'' + y' + \frac{1}{4}y = \cos x$$

$$-\underline{A\cos x} - B\,\text{sen}\,x - A\,\text{sen}\,x + \underline{B\cos x} + \frac{1}{4}\left(\underline{A\cos x} + B\,\text{sen}\,x\right) = \cos x$$

$$\cos x\left(-\frac{3}{4}A + B\right) + \text{sen}\,x\left(-\frac{3}{4}B - A\right) = \cos x$$

PAPER SHOW

sistema risolutivo per determinare A e B

$$\begin{array}{l} 3/4 \cdot \\ \\ \end{array} \begin{cases} -\frac{3}{4}A + B = 1 \\ -A - \frac{3}{4}B = 0 \end{cases}$$

$$-\frac{9}{16}A - A \quad / \quad = 3/4$$

$$-\frac{25}{16}A = \frac{3}{4}$$

$$A = -\frac{3}{\cancel{4}_1} \cdot \frac{\cancel{16}^{4}}{25} = -\frac{12}{25}$$

$$\begin{cases} A = -\frac{12}{25} \\ B = 1 + \frac{3}{4}A = 1 + \frac{3}{\cancel{4}_1}\left(-\frac{\cancel{12}^{3}}{25}\right) = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} \end{cases}$$

PAPER SHOW

Soluzione generale

$$y(x) = y_{om}(x) + y_p(x) =$$

$$= C_1 e^{-\frac{x}{2}} + C_2 x e^{-\frac{x}{2}} - \frac{12}{25}\cos x + \frac{16}{25}\sin x$$

PAPER SHOW

- $$\begin{cases} y'' - 8y' + 15y = 2e^{3x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

T. N. $k(x) = 2e^{3x}$

$y_{om}(x)$ $\quad \lambda^2 - 8\lambda + 15 = 0$

$(\lambda - 5)(\lambda - 3) = 0$ $\quad \lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = 5$ $\quad$ soluzioni reali e distinte

$$y_{om}(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{5x}$$

PAPER SHOW

Attenzione: $y_p(x)$

$b(x) = 2e^{3x}$ è già soluzione della $y_{om}(x)$

$$y_p(x) = A x e^{3x}$$

$$y'_p(x) = A e^{3x} + 3Ax e^{3x} = A e^{3x}(3x+1)$$

$$y''_p(x) = 3A e^{3x}(3x+1) + 3A e^{3x} =$$

$$= 3A e^{3x}(3x+1+1) = 3A e^{3x}(3x+2)$$

Sostituendo si ottiene:

$$y'' - 8y' + 15y = 2e^{3x}$$

$$3A \cancel{e^{3x}}(3x+2) - 8A \cancel{e^{3x}}(3x+1) + 15(Ax \cancel{e^{3x}}) = 2\cancel{e^{3x}}$$

$$3A(3x+2) - 8A(3x+1) + 15Ax = 2$$

$$\underline{9Ax} + 6A - \underline{24Ax} - 8A + \underline{15Ax} = 2$$

$$-2A = 2 \quad \Rightarrow \quad A = -1$$

Soluzione generale:

$$y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{5x} - x e^{3x}$$

Risoluzione del pb di Cauchy:

$$y(0) = 0$$

$$y'(0) = 0$$

PAPER SHOW

$$\begin{cases} y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{5x} - x e^{3x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

$y(0) = 0$ $\qquad 0 = c_1 e^0 + c_2 e^0 - 0 \cdot e^0 \Rightarrow$

$$c_1 + c_2 = 0$$

$y'(0) = 0$ $\qquad y'(x) = 3c_1 e^{3x} + 5c_2 e^{5x} - e^{3x} - 3x e^{3x}$

$$0 = 3c_1 e^0 + 5c_2 e^0 - e^0 - 3 \cdot 0 \cdot e^0$$

$$3c_1 + 5c_2 - 1 = 0$$

PAPER SHOW

Sistema risolutivo:

$$-3\begin{cases} \overset{-3}{c_1} + \overset{-3}{c_2} = 0 \\ 3c_1 + 5c_2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$// \quad -3c_2 + 5c_2 - 1 = 0$$

$$\begin{cases} c_2 = 1/2 \\ c_1 = -c_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Soluzione:

$$y(x) = -\frac{1}{2} e^{3x} + \frac{1}{2} e^{5x} - x e^{3x}$$

PAPER SHOW