

Esercizi sugli integrali impropri

Esercizio 1. Studiare

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^4-1}} dx.$$

Svolgimento: è un integrale improprio, in quanto

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}, \quad x \in (1, 2] \text{ ha una singolarità in } 1:$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x^4-1}} = +\infty.$$

Osserviamo che f è positiva, quindi è possibile applicare i criteri. Inoltre

$$\frac{1}{\sqrt{x^4-1}} = \frac{1}{\sqrt{(x^2-1)(x^2+1)}} = \frac{1}{\sqrt{(x-1)(x+1)\sqrt{x^2+1}}}$$

Siccome $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x+1} = \sqrt{2}$ e $\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x^2+1} = \sqrt{2}$, si ha

$$\frac{1}{\sqrt{x^4-1}} \sim \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x-1}} \quad \text{per } x \rightarrow 1^+.$$

Per il criterio del confronto asintotico, $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^4-1}} dx$ converge se e solo se converge

$$I := \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}} dx.$$

Con il cambiamento di variabile $z = x - 1$, abbiamo

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{z}} dz$$

che è del tipo $\int_0^1 \frac{1}{z^\alpha} dz$, con $\alpha = \frac{1}{2}$.

$$\alpha = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{z}} dz \text{ converge.}$$

Quindi

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^4-1}} dx \text{ CONVERGE.}$$

Esercizio 2. Studiare

$$\int_0^1 \frac{1}{x \sin(x)} dx.$$

Svolgimento: è un integrale improprio su $(0, 1]$, con una singolarità in 0, poiché

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \sin(x)} = +\infty.$$

La funzione $x \mapsto \frac{1}{x \sin(x)}$ è positiva, quindi possiamo applicare i criteri. Ricordando che $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, abbiamo

$$\frac{1}{x \sin(x)} \sim \frac{1}{x^2} \quad \text{per } x \rightarrow 0^+,$$

quindi per il criterio del confronto asintotico $\int_0^1 \frac{1}{x \sin(x)} dx$ converge se e solo se converge

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2} dx.$$

che DIVERGE. Allora

$$\int_0^1 \frac{1}{x \sin(x)} dx \text{ DIVERGE.}$$

Esercizio 3. Studiare

$$I = \int_0^2 \frac{\cos(x)}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} dx.$$

Svolgimento: la funzione integranda ha una singolarità in $x = 1$: si ha

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(x)}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = +\infty.$$

Siccome 1 è un punto interno a $(0, 2)$,

I converge se e solo se

$$\int_0^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} dx \text{ e } \int_1^2 \frac{\cos(x)}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} dx \text{ convergono.}$$

Siccome $f(x) = \frac{\cos(x)}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ è positiva per $x \in (0, \pi/2) \setminus \{1\}$, quindi in un intorno di 1, si possono usare i criteri per studiare gli integrali di cui sopra. Si ha

$$\frac{\cos(x)}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} \sim \frac{\cos(1)}{(x-1)^{2/3}} \quad \text{per } x \rightarrow 1,$$

quindi

- $\int_1^2 \frac{\cos(x)}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} dx$ converge se e solo se converge

$$I_1 = \int_1^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx.$$

Ponendo $z = (x-1)$, si ha

$$I_1 = \int_0^1 \frac{1}{z^{2/3}} dz \quad \text{CONVERGENTE}$$

- $\int_0^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} dx$ converge se e solo se converge

$$\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx.$$

Ponendo $z = (1 - x)$, si ha

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^{2/3}} dx &= \int_1^0 \frac{1}{(z^2)^{1/3}} \cdot (-1) dz \\ &= \int_0^1 \frac{1}{z^{2/3}} dz \quad \text{CONVERGENTE.}\end{aligned}$$

Quindi

$$\int_0^2 \frac{\cos(x)}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} dx \quad \text{CONVERGE.}$$

Esercizio 4. Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x^7)}{x^\alpha \ln(1+x^3)} dx.$$

Svolgimento: è integrale improprio sull'intervallo aperto $(0, +\infty)$ (infatti la funzione integranda non è definita in $x = 0$). L'integrale converge se e solo se

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\arctan(x^7)}{x^\alpha \ln(1+x^3)} dx &\text{ converge } \mathbf{E} \\ \int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x^7)}{x^\alpha \ln(1+x^3)} dx &\text{ converge.}\end{aligned}$$

Notare che la funzione integranda è positiva \Rightarrow OK i criteri.

1. Ricordiamo gli sviluppi per $y \rightarrow 0$:

$$\arctan(y) = y + o(y), \quad \ln(1+y) = y + o(y).$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan(x^7)}{x^\alpha \ln(1+x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^7}{x^\alpha \cdot x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{4-\alpha}.$$

Allora, se $4 - \alpha \geq 0$, cioè $\alpha \leq 4$, la funzione non ha una singolarità in $x = 0$, e anzi si può estendere per continuità a $[0, 1]$, ponendo

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} \frac{\arctan(x^7)}{x^\alpha \ln(1+x^3)} & \text{se } x > 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\arctan(x^7)}{x^\alpha \ln(1+x^3)} = \begin{cases} 0 & \text{se } \alpha < 4 \\ 1 & \text{se } \alpha = 4 \end{cases} & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

In particolare, per $\alpha \leq 4$ si ha integrabilità su $(0, 1]$.

Per $\alpha > 4$ la funzione ha una singolarità in $x = 0$, e si ha

$$\frac{\arctan(x^7)}{x^\alpha \ln(1+x^3)} \sim \frac{1}{x^{\alpha-4}} \quad \text{per } x \rightarrow 0^+,$$

quindi $\int_0^1 \frac{\arctan(x^7)}{x^\alpha \ln(1+x^3)} dx$ converge se e solo se converge

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha-4}} dx \rightsquigarrow \text{ converge se e solo se } \alpha - 4 < 1.$$

Quindi

$$\int_0^1 \frac{\arctan(x^7)}{x^\alpha \ln(1+x^3)} dx \text{ converge se e solo se } \alpha < 5.$$

2. Siccome $\lim_{y \rightarrow +\infty} \arctan(y) = \frac{\pi}{2}$ e $\ln(1+y) \sim \ln(y)$ per $y \rightarrow +\infty$, si ha

$$\frac{\arctan(x^7)}{x^\alpha \ln(1+x^3)} \sim \frac{\pi}{2} \frac{1}{x^\alpha \cdot \ln(x^3)} = \frac{\pi}{6} \frac{1}{x^\alpha \ln(x)}$$

e

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \ln(x)} dx \text{ converge se e solo se } \alpha > 1.$$

Allora

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x^7)}{x^\alpha \ln(1+x^3)} dx \text{ converge se e solo se } \boxed{\alpha \in (1, 5)}.$$

Esercizio 5. Studiare al variare di $\boxed{\alpha \in \mathbb{R}}$

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{(\sinh(x))^\alpha}{e^{3x} - 1} dx.$$

Svolgimento: è integrale improprio sull'intervallo aperto $(0, +\infty)$ (infatti la funzione integranda non è definita in $x = 0$). L'integrale converge se e solo se

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{(\sinh(x))^\alpha}{e^{3x} - 1} dx &\text{ converge } \mathbf{E} \\ \int_1^{+\infty} \frac{(\sinh(x))^\alpha}{e^{3x} - 1} dx &\text{ converge.} \end{aligned}$$

Notare che la funzione integranda è positiva \Rightarrow OK i criteri.

1. Ricordiamo gli sviluppi per $y \rightarrow 0$:

$$\sinh(y) = y + o(y), \quad \exp(y) - 1 = y + o(y).$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\sinh(x))^\alpha}{e^{3x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^\alpha}{3x} = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\alpha-1}.$$

Allora, se $\alpha - 1 \geq 0$, cioè $\boxed{\alpha \geq 1}$, la funzione non ha una singolarità in $x = 0$ e si ha integrabilità. Per $\boxed{\alpha < 1}$ la funzione ha una singolarità in $x = 0$, e si ha

$$\frac{(\sinh(x))^\alpha}{e^{3x} - 1} \sim \frac{1}{3} \frac{1}{x^{1-\alpha}} \quad \text{per } x \rightarrow 0^+,$$

quindi $\int_0^1 \frac{(\sinh(x))^\alpha}{e^{3x} - 1} dx$ converge se e solo se converge

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{1-\alpha}} dx \rightsquigarrow \text{ converge se e solo se } 1 - \alpha < 1.$$

Quindi

$$\int_0^1 \frac{(\sinh(x))^\alpha}{e^{3x} - 1} dx \text{ converge se e solo se } \boxed{\alpha > 0}.$$

2. Siccome $\sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2$, si ha

$$\frac{(\sinh(x))^\alpha}{e^{3x} - 1} \sim \frac{1}{2^\alpha} \frac{e^{\alpha x}}{e^{3x}} \quad \text{per } x \rightarrow +\infty,$$

e

$$\int_1^{+\infty} e^{(\alpha-3)x} dx \text{ converge se e solo se } \alpha - 3 < 0.$$

Allora

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\sinh(x))^\alpha}{e^{3x} - 1} dx \text{ converge se e solo se } \boxed{\alpha \in (0, 3)}.$$

ALTRA FAMIGLIA DI INTEGRALI IMPROPRI CON CARATTERE NOTO:

$$\int_0^{+\infty} e^{\gamma x} dx \quad \begin{cases} \text{converge se e solo se} & \gamma < 0, \\ \text{diverge se e solo se} & \gamma \geq 0, \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^0 e^{\gamma x} dx \quad \begin{cases} \text{converge se e solo se} & \gamma > 0, \\ \text{diverge se e solo se} & \gamma \leq 0. \end{cases}$$

Esercizio 6. Studiare al variare di $\beta \in \mathbb{R}$

$$I = \int_0^{1/2} \frac{(\sin(x))^{x+2} |\ln(x)|^\beta}{\ln(1+x^3)} dx.$$

Svolgimento: è una funz. positiva: ok i criteri. Osserviamo che

$$\begin{aligned} (\sin(x))^{x+2} &= (\sin(x))^2 \sin(x)^x \\ &= (\sin(x))^2 \exp(x \ln(\sin(x))) \quad \forall x \in \left(0, \frac{1}{2}\right]. \end{aligned}$$

Ricordando che $\sin(x) \sim x$ e $\ln(1+x^3) \sim x^3$ per $x \rightarrow 0^+$, si ha per $x \rightarrow 0^+$

$$\begin{aligned} \frac{(\sin(x))^{x+2} |\ln(x)|^\beta}{\ln(1+x^3)} &= (\sin(x))^2 \frac{\exp(x \ln(\sin(x))) |\ln(x)|^\beta}{\ln(1+x^3)} \\ &\sim x^2 \frac{\exp(x \ln(x)) |\ln(x)|^\beta}{x^3} \\ &\sim \frac{1}{x |\ln(x)|^{-\beta}} \end{aligned}$$

dove abbiamo usato che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \exp(x \ln(x)) = e^0 = 1 \text{ perché } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0.$$

Allora $\int_0^{1/2} \frac{(\sin(x))^{x+2} |\ln(x)|^\beta}{\ln(1+x^3)} dx$ converge se e solo se

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{x |\ln(x)|^{-\beta}} dx \text{ converge}$$

e questo è vero se $-\beta > 1$, cioè $\beta < -1$.

Esercizio 7. Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sinh(x^2)}{e^{\alpha(x^2+x)} x^{\alpha/2}} dx.$$

Svolgimento: è integrale improprio sull'intervallo aperto $(0, +\infty)$ (infatti la funzione integranda non è definita in $x = 0$). L'integrale converge se e solo se

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\sinh(x^2)}{e^{\alpha(x^2+x)} x^{\alpha/2}} dx &\text{ converge } \mathbf{E} \\ \int_1^{+\infty} \frac{\sinh(x^2)}{e^{\alpha(x^2+x)} x^{\alpha/2}} dx &\text{ converge.} \end{aligned}$$

La funzione integranda è positiva \Rightarrow OK i criteri.

1. Per $x \rightarrow 0^+$ si ha $e^{\alpha(x^2+x)} \rightarrow 1$. Ricordando $\sinh(y) \sim y$ per $y \rightarrow 0$, concludiamo che

$$\frac{\sinh(x^2)}{e^{\alpha(x^2+x)}x^{\alpha/2}} \sim \frac{x^2}{x^{\alpha/2}}$$

quindi per il criterio del confronto asintotico $\int_0^1 \frac{\sinh(x^2)}{e^{\alpha(x^2+x)}x^{\alpha/2}} dx$ converge se e solo se

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha/2-2}} dx \text{ converge}$$

quindi se e solo se $\frac{\alpha}{2} - 2 < 1$, cioè $\boxed{\alpha < 6}$.

2. Per $x \rightarrow +\infty$, si ha $\sinh(x^2) \sim \frac{1}{2}e^{x^2}$, quindi

$$\begin{aligned} \frac{\sinh(x^2)}{e^{\alpha(x^2+x)}x^{\alpha/2}} &\sim \frac{1}{2} \frac{1}{\exp(\alpha(x^2+x) - x^2)x^{\alpha/2}} \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\exp((\alpha-1)x^2 + \alpha x)x^{\alpha/2}} \end{aligned}$$

Per lo studio di

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\exp((\alpha-1)x^2 + \alpha x)x^{\alpha/2}} dx$$

distinguiamo i casi $\alpha < 1$, $\alpha = 1$, $\alpha > 1$:

(a) $\alpha > 1$: siccome su $(1, +\infty)$ si ha

$$\exp((\alpha-1)x^2 + \alpha x) > \exp((\alpha-1)x^2) > x^\beta \quad \forall \beta \in \mathbb{R}$$

si ha

$$\frac{1}{\exp((\alpha-1)x^2 + \alpha x)x^{\alpha/2}} < \frac{1}{x^\beta x^{\alpha/2}} \quad \boxed{\forall \beta \in \mathbb{R}}$$

e

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\beta x^{\alpha/2}} dx \text{ CONVERGE se } \beta + \alpha/2 > 1.$$

Quindi, per il criterio del confronto si ha convergenza per $\boxed{\alpha > 1}$.

(b) $\alpha = 1$: ritrovo

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{e^x x^{1/2}} dx$$

che converge perché su $(1, +\infty)$ si ha $e^x > x^\beta$ per ogni $\beta \in \mathbb{R}$, quindi

$$\frac{1}{e^x x^{1/2}} < \frac{1}{x^\beta x^{1/2}} \quad \forall x \in (1, +\infty)$$

e

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\beta x^{1/2}} dx \text{ CONVERGE se } \beta + 1/2 > 1.$$

Quindi si ha convergenza per $\boxed{\alpha = 1}$.

(c) $\alpha < 1$: si ha

$$\int_1^{+\infty} \frac{\exp((1-\alpha)x^2)}{\exp(\alpha x)x^{\alpha/2}} dx \quad \text{con } 1-\alpha > 0.$$

Poiché

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp\left(\frac{1-\alpha}{2}x^2\right)}{\exp(\alpha x)} = +\infty$$

si ha per x sufficientemente grande

$$e^{\alpha x} \leq \exp\left(\frac{1-\alpha}{2}x^2\right)$$

quindi

$$\begin{aligned}\frac{\exp((1-\alpha)x^2)}{\exp(\alpha x)x^{\alpha/2}} &\geq \frac{\exp((1-\alpha)x^2)}{\exp\left(\frac{1-\alpha}{2}x^2\right)x^{\alpha/2}} \\ &= \frac{\exp\left(\frac{1-\alpha}{2}x^2\right)}{x^{\alpha/2}} \\ &\geq \frac{x^\beta}{x^{\alpha/2}} \quad \forall \beta \in \mathbb{R},\end{aligned}$$

dove abbiamo usato che

$$\exp\left(\frac{1-\alpha}{2}x^2\right) > x^\beta \quad \forall \beta \in \mathbb{R}.$$

Siccome

$$\int_1^{+\infty} \frac{x^\beta}{x^{\alpha/2}} \quad \text{diverge per } \alpha/2 - \beta < 1,$$

concludiamo con il criterio del confronto che si ha divergenza per $\boxed{\alpha < 1}$.

Allora

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sinh(x^2)}{e^{\alpha(x^2+x)}x^{\alpha/2}} dx \text{ converge se e solo se } \alpha \geq 1.$$

Si ha convergenza per $1 \leq \alpha < 6$.

Esercizio 8. Calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\cosh(2x)} dx.$$

Svolgimento:

1. verifichiamo l'integrabilità in senso improprio:

$$\int_{-\infty}^0 \frac{1}{\cosh(2x)} dx \text{ e } \int_0^{+\infty} \frac{1}{\cosh(2x)} dx \text{ convergono.}$$

- $\cosh(2x) = (e^{2x} + e^{-2x})/2$, quindi per $x \rightarrow +\infty$

$$\frac{1}{\cosh(2x)} \sim \frac{2}{e^{2x}}.$$

Siccome su $(0, +\infty)$ si ha $e^{2x} > x^\beta$ per ogni $\beta \in \mathbb{R}$, si ha

$$\frac{2}{e^{2x}} < \frac{2}{x^\beta} \quad \forall x \in (0, +\infty) \quad \forall \beta \in \mathbb{R}.$$

Quindi

$$\int_0^{+\infty} \frac{2}{e^{2x}} dx \text{ converge.}$$

Quindi

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\cosh(2x)} dx \text{ converge.}$$

- Siccome $\cosh(2x)$ è pari, si ha

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^0 \frac{1}{\cosh(2x)} dx &= \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_{-c}^0 \frac{1}{\cosh(2x)} dx \\ &= \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_0^c \frac{1}{\cosh(2x)} dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\cosh(2x)} dx < +\infty\end{aligned}$$

quindi anche l'integrale su $(-\infty, 0)$ converge.

2. Usando

$$\cosh(2x) = (e^{2x} + e^{-2x})/2 = \frac{e^{4x} + 1}{2e^{2x}}$$

calcolo

$$\begin{aligned}\lim_{c \rightarrow +\infty} \int_0^c \frac{1}{\cosh(2x)} dx &= \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_0^c \frac{2e^{2x}}{e^{4x} + 1} dx \\ &= \lim_{c \rightarrow +\infty} \int_1^{e^{2c}} \frac{1}{t^2 + 1} dt \\ &= \lim_{c \rightarrow +\infty} [\arctan(t)]_1^{e^{2c}} \\ &= \lim_{c \rightarrow +\infty} (\arctan(e^{2c}) - \arctan(1)) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

Allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\cosh(2x)} dx = 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{\cosh(2x)} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Esercizio 9. Studiare al variare di $\gamma \in \mathbb{R}$

$$I = \int_0^{1/2} \frac{|\log(x)|^\gamma}{x^{5\gamma}} dx.$$

Svolgimento: f è positiva e ha una possibile singolarità in $x = 0$. Osservo che

$$f(x) = \frac{1}{x^{5\gamma} |\log(x)|^{-\gamma}}$$

e ricordo il carattere dell'integrale $\int_0^{1/2} \frac{1}{x^\alpha |\log(x)|^\beta}$: converge se

$$\alpha < 1, \forall \beta \in \mathbb{R} \quad \text{o} \quad \alpha = 1, \forall \beta > 1.$$

Allora I converge se e solo se

$$5\gamma < 1 \quad \text{o} \quad 5\gamma = 1, -\gamma > 1$$

quindi se e solo se $\gamma < \frac{1}{5}$.

Esercizio 10. Studiare

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\log(3 + \sin(x))}{\sqrt[4]{x^5 + x^3 + \log(x)}} dx.$$

Svolgimento: f è positiva perché $3 + \sin(x) \geq 3 - 1 = 2$, e $\log(2) > 0$; f non ha “singolarità al finito”. Si ha per $x \rightarrow +\infty$

$$\frac{\log(3 + \sin(x))}{\sqrt[4]{x^5 + x^3 + \log(x)}} \sim \frac{\log(3 + \sin(x))}{x^{5/4}}.$$

Quindi studio il carattere di $\int_1^{+\infty} \frac{\log(3 + \sin(x))}{x^{5/4}} dx$: si ha

$$\log(3 + \sin(x)) \leq \log(4) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

e

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log(4)}{x^{5/4}} dx \quad \text{CONVERGENTE.}$$

Quindi l'integrale converge.

Esercizio 11. Studiare

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}{\exp\left(\cos(x) - \frac{1}{x}\right) - \exp(\cos(x))} dx.$$

Svolgimento: Si ha

$$\begin{aligned} & \frac{\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}{\exp\left(\cos(x) - \frac{1}{x}\right) - \exp(\cos(x))} \\ &= \frac{\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{\cos(x)} e^{-\frac{1}{x}} - e^{\cos(x)}} \\ &= \frac{\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{\cos(x)}(e^{-\frac{1}{x}} - 1)}. \end{aligned}$$

Poiché $x > 1$, si ha $-\frac{1}{x} < 0$ quindi $e^{-\frac{1}{x}} < 1$. Allora f è negativa. Studio la convergenza di

$$\int_1^{+\infty} |f(x)| dx = \int_1^{+\infty} (-f(x)) dx = \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{\cos(x)}(1 - e^{-\frac{1}{x}})} dx.$$

e applico criteri per funzioni positive. Non ci sono singolarità “al finito”, e si ha

$$\begin{aligned} \sin^2\left(\frac{1}{x}\right) &\sim \left(\frac{1}{x}\right)^2 \quad \text{per } x \rightarrow +\infty, \\ 1 - e^{-\frac{1}{x}} &\sim -\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} \quad \text{per } x \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

(cambiamento di variabile $z = \frac{1}{x}$ e sviluppi per $z \rightarrow 0$). Quindi per $x \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \frac{\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{\cos(x)}(1 - e^{-\frac{1}{x}})} \sim \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{e^{\cos(x)} \frac{1}{x}} \\ &= \frac{1}{x e^{\cos(x)}} \end{aligned}$$

e

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x e^{\cos(x)}} dx \quad \text{diverge}$$

siccome $\frac{1}{x e^{\cos(x)}} \geq \frac{1}{x e^1}$ (qui uso che $\cos(x) \leq 1$, quindi $e^{\cos(x)} \leq e^1$), e $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ diverge. Allora $\int_1^{+\infty} |f(x)| dx$ diverge a $+\infty$, quindi

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}{\exp\left(\cos(x) - \frac{1}{x}\right) - \exp(\cos(x))} dx = -\infty.$$