MATEMATICA 6 febbraio 2024, 1 appello a.a. 2023-24

Tempo a disposizione: 1 ora e 30 minuti

---

1. Calcolare il limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(\cos(3x))}{\sqrt{1+3x^2}-\sqrt{1-3x^2}}$$

---

2. Si consideri la funzione $f(x) = \frac{5x}{x^2+1} + 3\arctan x$.
   Calcolare il dominio di f.
   Determinare eventuali simmetrie.
   Determinare eventuali asintoti orizzontali, verticali e obliqui.
   Calcolare la derivata prima e studiare la monotonia e determinare se esistono massimi e minimi.
   Disegnare il grafico.

---

3. Calcolare
$$\int_{-1}^{0} \frac{2x+7}{x^2+4x+4}\,dx$$

SECONDA PARTE:

4. Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Dare la definizione di $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$, con $l \in \mathbb{R}$ e darne un'interpretazione geometrica. Dire se è vero o falso che l'insieme immagine $\mathrm{Im} f = (-\infty, l)$ motivando la risposta.

5. Enunciare e dimostrare il teorema di Rolle. Data la funzione $f(x) = (x-1)^2$ con $x \in [-2, 4]$, dire se la funzione f soddisfa o meno le ipotesi del teorema di Rolle e eventualmente esibire il punto in cui la tesi del teorema è verificata.

6. Dare la definizione di primitiva di una funzione f. Enunciare e dimostrare il primo teorema fondamentale del calcolo integrale.

ES 1: LIMITE

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(\cos 3x)}{\sqrt{1+3x^2} - \sqrt{1-3x^2}} =$$

$$\boxed{\begin{aligned} \cos z &= 1 - \frac{z^2}{2} + o(z^2) \\ \log(1+z) &= z - \frac{z^2}{2} + o(z^2) \end{aligned}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\log\left(1 - \frac{9x^2}{2} + o(x^2)\right)}{\left(\sqrt{1+3x^2} - \sqrt{1-3x^2}\right)} \cdot \frac{\overbrace{\sqrt{1+3x^2} + \sqrt{1+3x^2}}^{\to 2}}{\sqrt{1+3x^2} + \sqrt{1+3x^2}} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2 \log\left(1 - \frac{9x^2}{2}\right)}{\cancel{1} + 3x^2 - \cancel{1} + 3x^2} =$$

$$= \lim_{x \to 0} - \frac{\cancel{2}\, \frac{9}{\cancel{2}} \cancel{x^2} + o(x^2)}{6 \cancel{x^2}} = -\frac{9}{6} = -\frac{3}{2}$$

ES 3 Calcolare

$$\int_{-1}^{0} \frac{2x+7}{x^2+4x+4}\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} \frac{2x+7}{x^2+4x+4}\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{2x+4+3}{x^2+4x+4}\,dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} \frac{2x+4}{x^2+4x+4}\,dx + \int_{-1}^{0} \frac{3}{x^2+4x+4}\,dx =$$

$$= \log\left(x^2+4x+4\right)\Big|_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} \frac{3}{(x+2)^2}\,dx$$

$$= \log 4 - \underbrace{\log(1-\cancel{4}+\cancel{4})}_{=0} - \frac{3}{x+2}\Big|_{-1}^{0} =$$

$$= \log 4 - \frac{3}{2} + 3 = \log 4 + 3/2$$

ES 2 Studio di fune

$$f(x) = \frac{5x}{x^2+1} + 3 \arctan x$$

1: $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$

2. $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$ simmetrico rispetto all'origine

$$f(-x) = \frac{-5x}{(-x)^2+1} + 3 \underbrace{\arctan(-x)}_{= -\arctan x} =$$

perchè $g(x) = \arctan x$ è dispari

$$= -\frac{5x}{x^2+1} - 3\arctan x = -f(x)$$

Allora f è dispari

3. $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{\frac{5x}{x^2+1}}_{\downarrow\, 0} + 3 \underbrace{\arctan x}_{\pi/2} = \frac{3}{2}\pi$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \underbrace{\frac{5x}{x^2+1}}_{\downarrow\, 0} + 3 \underbrace{\arctan x}_{-\pi/2} = -\frac{3}{2}\pi$$

$y = \frac{3}{2}\pi$ asintoto orizzontale dx

$y = -\frac{3}{2}\pi$ " " sx

$\nexists$ asintoti obliqui, né verticali

4. $$f'(x) = \frac{5(x^2+1) - 5x(2x)}{(x^2+1)^2} + 3\frac{1}{1+x^2} =$$

$$= \frac{5x^2+5-10x^2+3(1+x^2)}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{-5x^2+5+3+3x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+8}{(x^2+1)^2}$$

$$f' \geq 0 \iff \frac{2(4-x^2)}{(x^2+1)^2} \geq 0$$

$$\iff 4-x^2 \geq 0$$

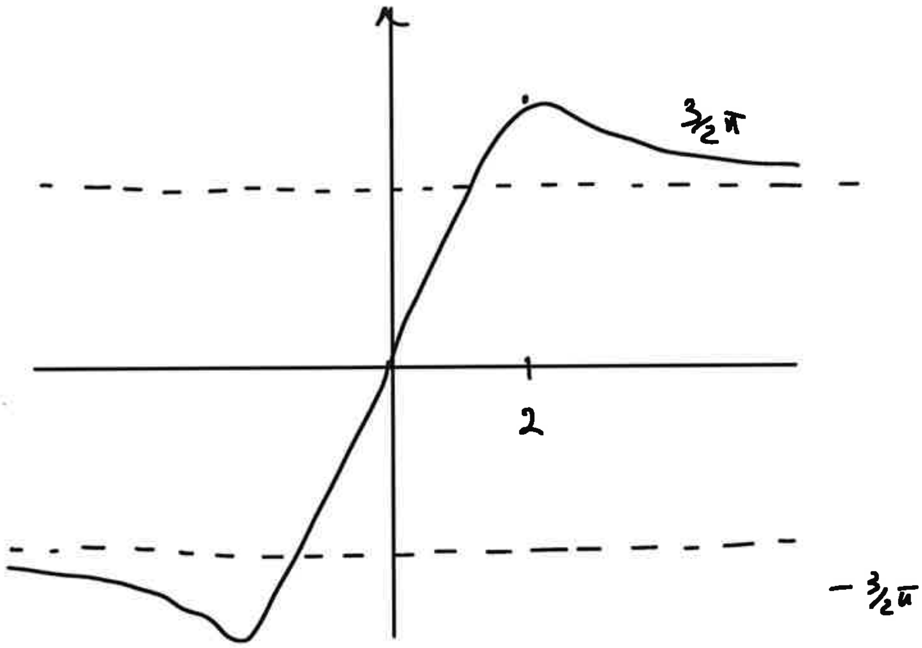
$$\iff x^2-4 \leq 0$$

$$\iff -2 \leq x \leq 2$$

		-2		2	
f'	$-$		$+$		$-$
f	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

$x_0 = -2$ pto di MIN rel (assoluto)

$x_0 = 2$ pto di MAX (assoluto)



- $f(2) = \dfrac{10}{5} + 3 \arctan 2 = 2 + 3 \arctan 2 > \dfrac{3}{2}\pi$

$$\Updownarrow$$

$$4 + 6 \arctan 2 > 3$$

$$\underbrace{1 + \underbrace{6 \arctan 2}_{>0}}_{>0} > 0 \quad \text{sì}$$

- $f(-2) = -\frac{10}{5} - 3\arctan 2 = -2 - 3\arctan 2 < -\frac{3}{2}\pi$

$\Updownarrow$

$-4 - 6\arctan 2 < -3$

$-1 - 6\arctan 2 < 0$ sì

Domanda 2 di Teoria

$f(x) = (x-1)^2 \qquad x \in [-2, 4] = [a, b]$

- $f(x) \in C^0([-2, 4])$
- f è derivabile in $(-2, 4)$

$f(-2) = (-2-1)^2 = (-3)^2 = 9 = f(a)$

$f(4) = (4-1)^2 = 3^2 = 9 = f(b)$

Allora

$f(a) = f(b)$

$\underset{\text{Rolle}}{\Longrightarrow} \quad \exists\ \xi : \text{ t.c. } f'(\xi) = 0$

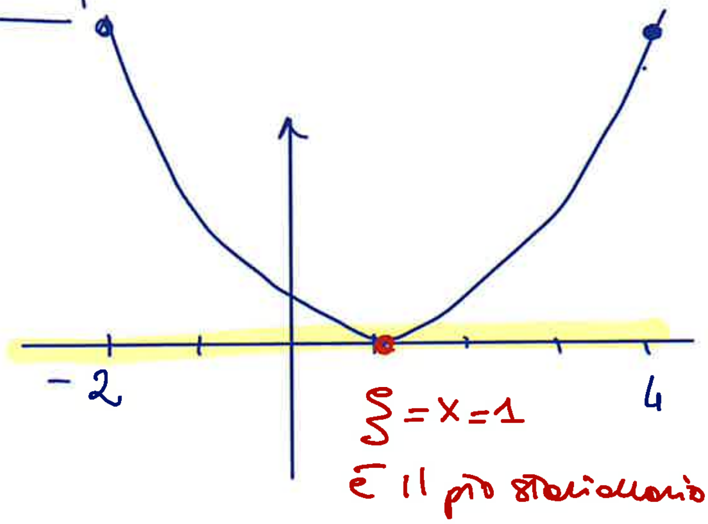
$f'(x) = 2(x-1) = 0 \iff$

$2x - 2 = 0$

$2x = 2$

$\boxed{x = 1}$

allora $\boxed{x = \xi = 1}$



Infatti:

$f(x) = (x-1)^2 =$

La retta tang. al grafico in $x = 1 \Rightarrow$
è // all'asse x.

MATEMATICA 20 febbraio 2024, 2 appello a.a. 2023-24

Tempo a disposizione: 1 ora e 45 minuti

---

1. Sia $f(x) : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)\sqrt{x^2-1}+1, & x > 1 \\ 1, \quad 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

   Studiare la continuità e la derivabilità di f nel suo dominio domf $= (0, +\infty)$. La funzione è continua e derivabile nel suo dominio?. Motivare la risposta.

   Se si, calcolare la derivata in $x = 1$ e dire se tale punto è un punto stazionario.

---

2. Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 2, centrato in $x = 1$, della funzione

$$f(x) = \log(x^2 + 2) - 3x^2.$$

---

3. Calcolare l'insieme delle primitive di:

$$f(x) = \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}$$

SECONDA PARTE:

4. Sia $f : I \to \mathbb{R}$, I intervallo di $\mathbb{R}$. Sia $x_0 \in I$. Dare la definizione di derivata di f in $x = x_0$. Che cosa significa f derivabile in $x = x_0$?

5. Enunciare e dimostrare il teorema di Lagrange e darne un'interpretazione geometrica.

6. Dare la definizione di media integrale. Enunciare e dimostrare il teorema della media integrale e darne un'interpretazione geometrica.

ES 1

Sia $f(x) = \begin{cases} (x-1)\sqrt{x^2-1} + 1 & x>1 \\ 1 & 0 < x \leq 1 \end{cases}$

$\text{dom} f = (0, +\infty)$

Continuità in $\text{dom} f = (0, +\infty)$

- f è continua $\forall x \neq 1$
- Studio la continuità in $x = 1$.

  $x=1$ = pto d'accum per il dominio di f.

  Allora posso studiare la continuità con il limite

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \underbrace{(x-1)\sqrt{x^2-1}}_{0} + 1 =$$

$$= 1$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 1 = 1$$

$$\Rightarrow \quad \exists \lim_{x \to 1} f(x) = 1 = f(1)$$

$\Rightarrow$ f è continua anche in $x = 1$.

Dunque f è continua in tutto il suo dominio

$$\mathrm{dom} f = (0, +\infty)$$

- Studiamo la derivabilità in $(0, +\infty)$ $\forall x \neq 1$, usando le regole di calcolo si ha:

$$f'(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 1} + (x-1) \cdot \dfrac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2-1}} & x > 1 \\ 0 & 0 < x < 1 \end{cases}$$

Dunque f è derivabile $\forall x \neq 1$

Studio la derivabilità in $x=1$.

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} \underbrace{\sqrt{x^2-1}}_{\downarrow \, 0} + \frac{x(x-1)}{\underbrace{\sqrt{x^2-1}}_{\sqrt{x-1}\cdot\sqrt{x+1}}} =$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{x\cdot \cancel{(x-1)}^{\sqrt{x-1}}}{\cancel{\sqrt{x-1}}\cdot\sqrt{x+1}} =$$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{\overset{\nearrow 1}{x}\,\overset{\to 0}{\sqrt{x-1}}}{\underset{\to \sqrt{2}}{\sqrt{x+1}}} = \frac{0}{\sqrt{2}} = 0 =$$

$= f'_+(1) =$ DERIVATA DX

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} 0 = 0 = f'_-(1)$$

= DERIVATA SX

Allora

$$f'_+(1) = f'_-(1) = 0$$

$\Rightarrow$ f è derivabile in $x=1$

e $f'(1) = 0$

Dunque $x=1$ è pto STAZIONARIO per f (infatti $\exists$ la derivata in $x=1$ e vale 0).

ES 3: L'insieme delle primitive è:

$$\int \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}\,dx = $$

$e^x = t$

$e^x dx = dt$

$$= \int \frac{e^x \cdot \overbrace{e^{2x}}^{t^2}}{\underbrace{e^{2x}}_{= t^2}+1}\,dx \qquad e^x\,dx = dt$$

$$= \int \frac{t^2}{t^2+1}\,dt = \int \frac{(t^2+1)-1}{t^2+1}\,dt$$

$$= \int 1 - \frac{1}{t^2+1}\, dt =$$

$$= t - \operatorname{arctg} t + c$$

ES 2 :

$$f(x) = \log(x^2+2) - 3x^2$$

Calcolare il polinomio di Taylor in $x = 1$ di ordine 2

$$P(x) = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2$$

$$f(1) = \log(1+2) - 3 = \log 3 - 3$$

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+2} - 6x \qquad f(1) = \frac{2}{3} - 6 = \frac{2-18}{3} = -16/3$$

$$f''(x) = \frac{2\left[x^2+2\right] - 2x \cdot 2x}{(x^2+2)^2} - 6 =$$

$$= \frac{2x^2+4-4x^2}{(x^2+2)^2} - 6 =$$

$$= \frac{-2x^2+4}{(x^2+2)^2} - 6$$

$$f''(1) = \frac{-2+4}{(3)^2} - 6 =$$

$$= \frac{2}{9} - 6 = \frac{2-54}{9} = -\frac{52}{9}$$

Dunque:

$$P(x) = (\log 3 - 3) - \frac{16}{3}(x-1) + $$
$$- \frac{26}{9}(x-1)^2$$

MATEMATICA 26 marzo 2024, 3 appello a.a. 2023-24

Tempo a disposizione: 1 ora e 45 minuti

---

1. Al variare di $\alpha > 0$ calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} (x + \log x)^{\alpha} \left(\sqrt{x^4 + e^{\frac{1}{x}}} - \sqrt{x^4 + 1}\right)$$

2. Data

$$f(x) = |x - 1|e^{-x},$$

calcolare il dominio di f e studiare la continuità e la derivabilità di f nel suo dominio. Se f non è derivabile nel suo dominio, classificare i punti di non derivabilità.

---

3. Calcolare

$$\int \frac{1}{x(x^2 + 2)}\, dx$$

SECONDA PARTE:

4. Sia $f : \text{dom} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dare la definizione di funzione crescente e decrescente. Enunciare il teorema di esistenza del limite destro e sinistro di f, funzione monotona, in un punto x_0 di accumulazione per domf e darne un'interpretazione geometrica. Dare la definizione di estremo superiore e inferiore di un insieme $A \subseteq \mathbb{R}$ limitato.

5. Enunciare e dimostrare il teorema che lega la derivabilità alla continuità. Fornire un esempio di funzione continua ma non derivabile. Dire se la seguente implicazione è vera o falsa motivando la risposta:
sia $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ ($a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$) una funzione derivabile su (a, b), allora f è integrabile su $[\alpha, \beta] \subseteq (a, b)$ per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, con $a < \alpha < \beta < b$.

6. Enunciare e dimostrare la formula di integrazione per parti.

ES 1

$\alpha > 0$

$$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{(x+\log x)^\alpha}_{\substack{\simeq \\ x^\alpha}} \underbrace{\left(\sqrt{x^4+e^{1/x}} - \sqrt{x^4+1}\right)}_{\text{razionalizzo}} = \ell =$$

perché x^α vince sul $\log x$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^\alpha \frac{\cancel{x^4} + e^{1/x} - \cancel{x^4} - 1}{\underbrace{\sqrt{x^4+e^{1/x}} + \sqrt{x^4+1}}_{2\sqrt{x^4}}} =$$

$e^{1/x} \to 0$ per $x \to +\infty$

$x^4+1 \simeq x^4$ per $x \to +\infty$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha \overbrace{\left(e^{1/x} - 1\right)}}{2\sqrt{x^4}} =$$

Taylor:

$\frac{1}{x} \to 0$

$e^{1/x} - 1 \simeq \frac{1}{x}$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\alpha} \cdot \frac{1}{x}}{2 \underbrace{\sqrt{x^4}}_{= x^2}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\alpha - 1}}{2x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\alpha - 1 - 2}}{2} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\alpha - 3}}{2} = \begin{cases} \alpha > 3 & \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\alpha-3}}{2} = +\infty \\ \alpha = 3 & \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\alpha-3}}{2} = \frac{1}{2} \\ \alpha < 3 & \lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\alpha-3}}{2} = 0 \end{cases}$$

Risposta:

$\alpha > 3$: $\ell = +\infty$

$\alpha = 3$ $\ell = 1/2$

$0 < \alpha < 3$ $\ell = 0$.

ES.2

$$f(x) = |x-1|\, e^{-x}$$

1. dom f

dom f $= \mathbb{R}$

2. Continuità di f nel suo dominio

$$f(x) = \underbrace{|x-1|}_{\substack{\text{continua} \\ \forall x \in \mathbb{R}}}\, \underbrace{e^{-x}}_{\substack{\text{continua} \\ \forall x \in \mathbb{R}}} \in C(\mathbb{R})$$

$\downarrow$

perché prodotto di fz. continue.

Oppure:

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)\, e^{-x} & x \geq 1 \\ (1-x)\, e^{-x} & x < 1 \end{cases}$$

L'unico pto che potrebbe dare probl.
è $x_0 = 1$.

$x_0 = 1$ è pto d'accum. per dom f. $\Longrightarrow$

studio la continuità in tali pti

con il limite.

f è continua in $x_0 = 1$ $\iff$ $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) =$

$= f(x_0)$

$$f(x_0) = (x-1)\,e^{-x}\Big|_{x = x_0 = 1} = 0$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \underbrace{(x-1)}_{\downarrow\, 0}\,\underbrace{e^{-x}}_{\downarrow\, e^{-1}} = 0$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \underbrace{(1-x)}_{\downarrow\, 0}\,\underbrace{e^{-x}}_{\downarrow\, e^{-1}} = 0$$

Allora:

$$\exists \underbrace{\lim_{x \to 1} f(x)}_{=0} = \underbrace{f(1)}_{=0}$$

Dunque f è continua in $x_0 = 1$.

3. Derivabilità in dom f

Studiamo la derivabilità:

$\forall x \neq 1$ si ha

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-x} - (x-1)e^{-x} & x > 1 \\ -e^{-x} - (1-x)e^{-x} & x < 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} \underbrace{e^{-x}}_{\downarrow \, e^{-1}} - \underbrace{(x-1)e^{-x}}_{\downarrow \, 0} = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

$$= f'_+(1)$$

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} \underbrace{-e^{-x}}_{\downarrow \atop -e^{-1}} - \underbrace{(1-x)e^{-x}}_{\downarrow \atop 0} =$$

$$= -\frac{1}{e} = f'_-(1)$$

$$\left.\begin{array}{l} f'_+(1) \neq f'_-(1) \\ f'_+(1),\ f'_-(1) \in \mathbb{R} \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ ha in } x=1 \text{ un pto ANGOLOSO}$$

Conclusioni:

- f è derivabile $\forall x \neq 1$ (perchè composizione di fun. derivabili

infatti:

$$f(x) = \underbrace{|x-1|}_{\text{derivabile } \forall x\neq 1}\ \underbrace{e^{-x}}_{\text{derivabile } \forall x\in\mathbb{R}} \quad \text{è DERIVABILE } \forall x\neq 1$$

• in $x=1$ $f(x)$ ha un pto di

NON derivabilità di tipo ANGOLOSO.

$\boxed{\text{ES 3}}$

$$\int \frac{1}{x(x^2+2)}\,dx$$

$$\frac{1}{x(x^2+2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2} =$$

$$= \frac{Ax^2+2A+Bx^2+Cx}{x\cdot(x^2+2)} =$$

$$= \frac{(A+B)x^2+Cx+2A}{x(x^2+2)}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} A + B = 0 \\ C = 0 \\ 2A = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} B = -1/2 \\ C = 0 \\ A = 1/2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{x(x^2+2)} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{x} - \frac{1/2\, x}{x^2+2}$$

$$\int \frac{1}{x(x^2+2)}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\,dx - \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2+2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\log|x| - \underbrace{\frac{1}{4}\log|x^2+2|}_{=\ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\log|x^2+2| = \frac{1}{2}\log\sqrt{|x^2+2|}} + C$$

$$= \frac{1}{2}\log\frac{|x|}{\sqrt{x^2+2}} + C$$

MATEMATICA 21 giugno 2024, 4 appello a.a. 2023-24

Tempo a disposizione: 1 ora e 45 minuti

---

1. Calcolare il seguente limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x} + \log(1+x) - 1}{x \sin(\frac{x^2}{6})}$$

2. Data la funzione $f(x) = \sqrt{x^2+1}$, determinare il dominio di f e stabilire l'insieme in cui essa è crescente e decrescente. Determinare, se esistono, estremi relativi/assoluti della funzione. Determinare, infine, il polinomio di Taylor di ordine 2 centrato nel punto $x_0 = 1$.

---

3. Determinare la soluzione del problema di Cauchy:
$$\begin{cases} y' = x^2 y \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

SECONDA PARTE:

4. Enunciare e dimostrare il teorema di unicità del limite di funzioni.

5. Enunciare e dimostrare il teorema di Rolle.

6. Dare la definizione di somma inferiore e superiore. Dare la definizione di integrale superiore e inferiore. Dare la definizione di funzione integrabile secondo Riemann. Fornire un esempio di funzione integrabile secondo Riemann e un esempio di funzione non integrabile secondo Riemann.

ES1:

Calcolare il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-x}+\log(1+x)-1}{x\sin\left(\frac{x^2}{6}\right)}$$

$$e^z = 1+z+\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3!}+\dots \Longrightarrow$$

$$e^{-x} = 1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\dots$$

$$\log(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\dots$$

$$e^{-x}+\log(1+x) = 1-\cancel{x}+\cancel{\frac{x^2}{2}}-\frac{x^3}{6}+\left(\cancel{x}-\cancel{\frac{x^2}{2}}+\frac{x^3}{3}\right)$$

$$= 1-\frac{x^3}{6}+\frac{x^3}{3} = 1+\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\right)x^3$$

$$= 1+\frac{x^3}{6}$$

Allora:

$$Num = e^{-x} + \log(1+x) - 1 \simeq$$

$$\simeq \cancel{1} + \frac{x^3}{6} - \cancel{1} \quad \sim + \frac{x^3}{6}$$

$$Den = x \sin\left(\frac{x^2}{6}\right) \sim x \cdot \frac{x^2}{6} = \frac{x^3}{6}$$

Allora

$$\lim_{x \to 0} \frac{N}{D} = \frac{+\frac{x^3}{6}}{\frac{x^3}{6}} = 1$$

ES 2 :

Det. il polinomio di Taylor di ordine 2 centrato in $x_0 = 1$ di $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

$$\boxed{T_{x_0} f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2}$$

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} \qquad \boxed{f(x_0) = f(1) = \sqrt{2}}$$

$$f'(x) = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \qquad \boxed{f'(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$f''(x) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)' = \frac{\sqrt{x^2+1} - x \cdot \frac{\cancel{2}x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$= \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} =$$

$$= \frac{\cancel{x^2}+1 - \cancel{x^2}}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$\boxed{f''(1) = \frac{1}{2\sqrt{2}}}$$

Dunque:

$$T_{x_0} f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 =$$

$$= \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}(x-1) + \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}(x-1)^2 =$$

$$= \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}(x-1) + \frac{1}{4\sqrt{2}}(x-1)^2$$

Studio di

$$f(x) = \sqrt{x^2+1}$$

$$\text{dom } f = \{x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$f'(x) \geq 0 \iff \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \geq 0$$

$$\iff x \geq 0.$$

Dunque:

		0	
$f'(x)$	$-$		$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

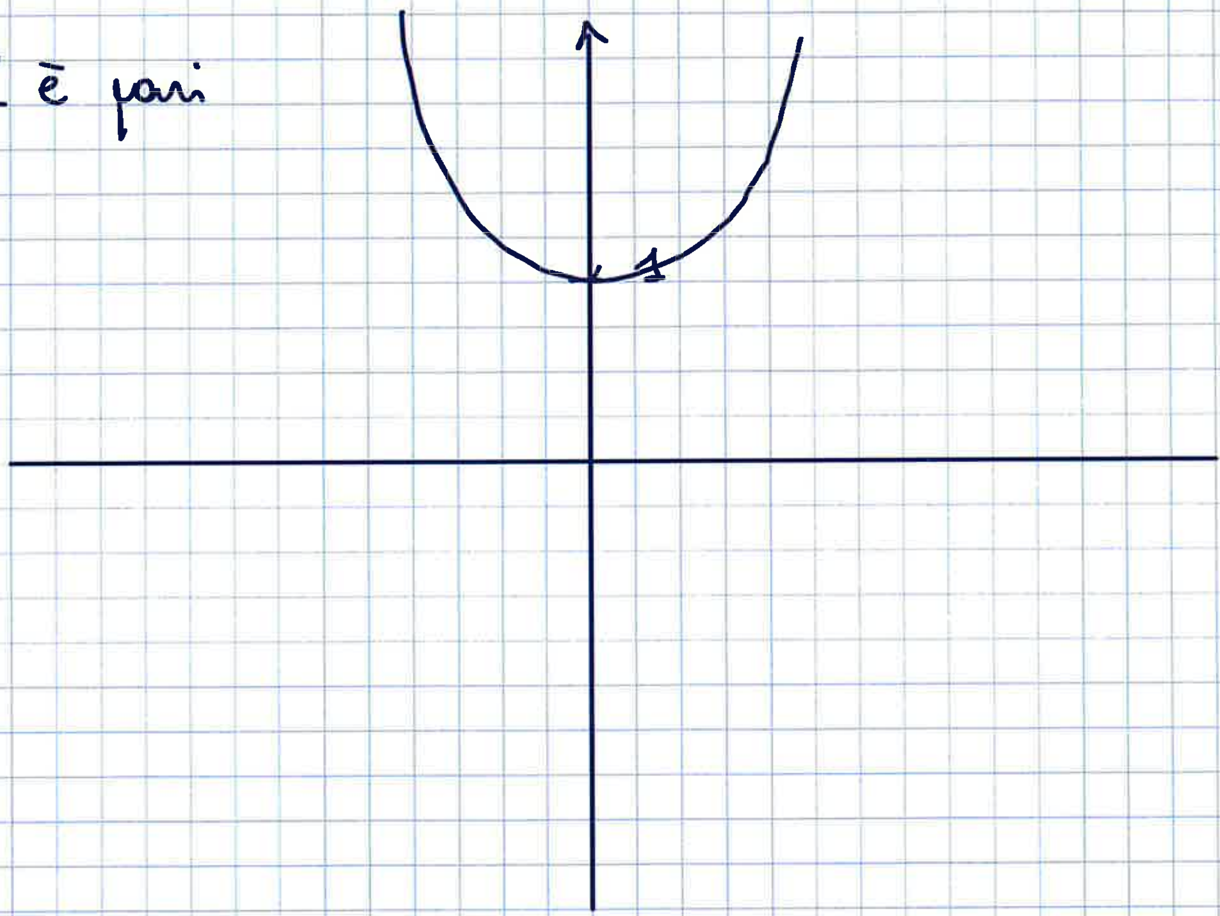
$x_0 = 0$ pto di MIN assoluto.

$$f(0) = 1$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty \\ &\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2+1} = +\infty \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\nexists \max f$$

f è pari



$f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ $\qquad f'(0)=0$

$\Longrightarrow$ $x_0 = 0$ pto di MIN e tang orizzontale.

ES 3 Risolvere il probl. di Cauchy

$$\begin{cases} y' = x^2 y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

L'eq. è a variabili separabili:

$\frac{y'}{y} = x^2$ $\Longrightarrow$ Integro da entrambi i membri:

$$\int \frac{dy}{y} = \int x^2 dx$$

$$\log y = \frac{1}{3} x^3 + c$$

$$y(x) = e^{\frac{1}{3}x^3 + c}$$

$$y(0) = e^c = 1 = e^0 \iff c=0$$

Da cui, la soluzione è

$$y(x) = e^{\frac{1}{3}x^3}$$

Verifico che risolve l'eq:

$$y' = x^2 y$$

$$y(x) = e^{\frac{1}{3}x^3}$$

$$1^\circ m = y' = e^{\frac{1}{3}x^3} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{3}} x^2 = \underbrace{e^{\frac{1}{3}x^3}}_{\overset{\shortparallel}{y}} \cdot x^2$$

$$= y \cdot x^2 = 2^\circ m.$$

Dunque l'eq. è soddisfatta.

Verifico la condizione iniziale:

$$y(0) = e^{\frac{1}{3}x^2}\Big|_{x=0} = e^0 = 1 \qquad \text{ok.}$$

MATEMATICA 5 settembre 2024, 5 appello a.a. 2023-24

Tempo a disposizione: 1 ora e 45 minuti

---

1. Data la funzione $f(x) = \frac{1}{1+x^2|\log x|}$, determinare:

   1. l'insieme $domf$, ossia il dominio di $f(x)$ e dire se $domf$ è un insieme limitato o no. Calcolare l'estremo inferiore di $domf$;
   2. se la funzione f ha simmetrie (se è pari o dipari);
   3. studiare l'eventale esistenza di asintoti verticali, orizzontali e obliqui.

2. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^x(x+1) & \text{se } x \geq 0 \\ 1 & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

stabilire se f è continua e derivabile nel suo dominio, classificando gli eventuali punti di discontinuità e derivabilità.

---

3. Calcolare

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\, dx.$$

SECONDA PARTE:

4. Enunciare e dimostrare il teorema di Lagrange e darne un'interpretazione geometrica.

5. Discutere la validità o meno delle seguenti implicazioni (motivando la risposta): sia data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$, derivabile due volte in I, con $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo,

   1. $f'(x) > 0$, $\forall x \in I \implies f$ é strettamente crescente;
   2. f strettamente decrescente $\implies f'(x) < 0$, $\forall x \in I$.
   3. $f''(x) \geq 0$, $\forall x \in I \iff f$ è convessa.

6. Dare la definizione di media integrale.

   Enunciare e dimostrare il teorema della media integrale e darne un'interpretazione geometrica.

MATEMATICA 5 settembre 2024, 5 appello a.a. 2023-24

Tempo a disposizione: 1 ora e 45 minuti

---

1. Data la funzione $f(x) = \frac{1}{1+x^2|\log x|}$, determinare:

   1. l'insieme $domf$, ossia il dominio di $f(x)$ e dire se $domf$ è un insieme limitato o no. Calcolare l'estremo inferiore di $domf$;
   2. se la funzione f ha simmetrie (se è pari o dipari);
   3. studiare l'eventale esistenza di asintoti verticali, orizzontali e obliqui.

2. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} e^x(x+1) & \text{se } x \geq 0 \\ 1 & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

stabilire se f è continua e derivabile nel suo dominio, classificando gli eventuali punti di discontinuità e derivabilità.

---

3. Calcolare

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx.$$

SECONDA PARTE:

4. Enunciare e dimostrare il teorema di Lagrange e darne un'interpretazione geometrica.

5. Discutere la validità o meno delle seguenti implicazioni (motivando la risposta): sia data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$, derivabile due volte in I, con $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo,

   1. $f'(x) > 0$, $\forall x \in I \implies f$ é strettamente crescente;
   2. f strettamente decrescente $\implies f'(x) < 0$, $\forall x \in I$.
   3. $f''(x) \geq 0$, $\forall x \in I \iff f$ è convessa.

6. Dare la definizione di media integrale.

   Enunciare e dimostrare il teorema della media integrale e darne un'interpretazione geometrica.

ES 1 :

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2|\log x|}$$

1. dom f:

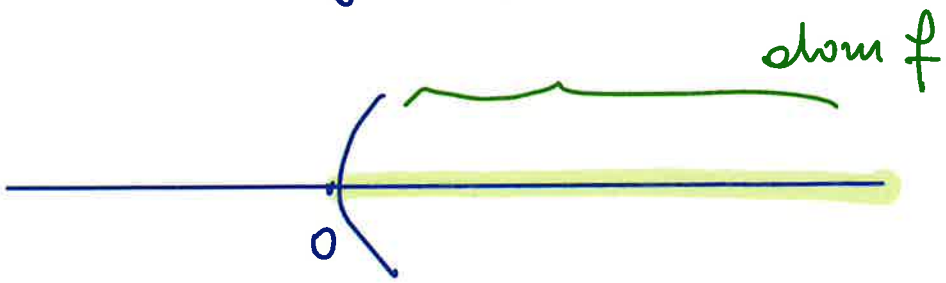
$$\begin{cases} x>0 \\ \underbrace{1+\underbrace{x^2|\log x|}_{\geq 0 \ \forall x\in\mathbb{R}}}_{\geq 1} \neq 0 \quad \text{sempre} \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad x>0$$

$$\text{dom} f = \{x\in\mathbb{R} : \ x>0\} = (0, +\infty)$$

Insieme illimitato superiormente.

$$\text{Inf}\,\{\text{dom} f\} = \{0\}$$



$\lambda = 0$ è estremo inferiore di $\operatorname{dom} f$

Infatti è il più grande fra i minoranti di $\operatorname{dom} f$

$\lambda = 0 \notin \operatorname{dom} f$.

2. $\operatorname{dom} f = (0, +\infty) =$ <u>NON</u> è un insieme simmetrico rispetto all'origine

Dunque f NON è né pari né dispari

3. Limiti agli estremi del dominio:

- $$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{1 + \underbrace{x^2 |\log x|}_{0^+}} = 1$$

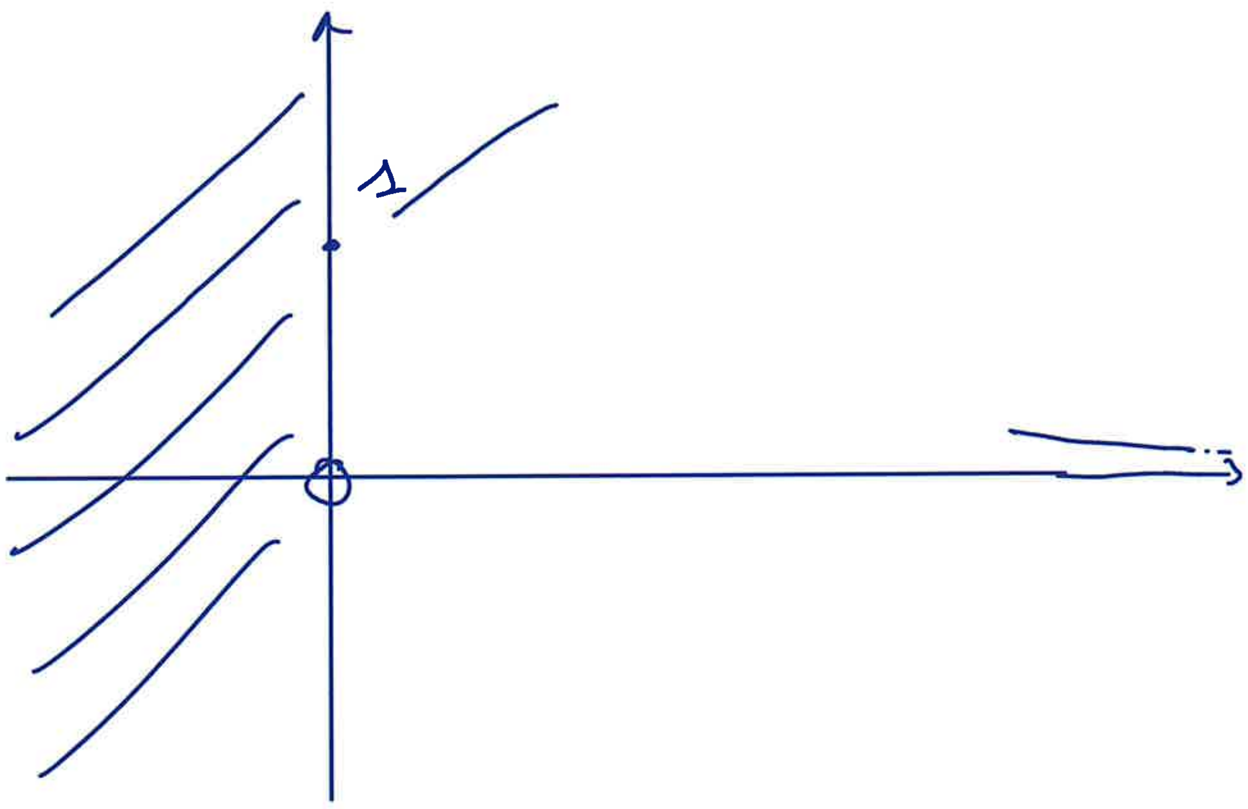
VINCE la potenza sul logaritmo!

$\Longrightarrow$ $x = 0$ NON è asintoto verticale dx

- $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\underbrace{1 + x^2 \underbrace{|\log x|}_{\to +\infty}}_{+\infty}} =$$

$$= \frac{1}{+\infty} = 0^+$$

$\Longrightarrow$ $y = 0$ è asintoto orizzontale sx



- $\nexists$ asintoti obliqui.

ES 2 :

$$f(x) = \begin{cases} e^x(x+1) & x \geq 0 \\ 1 & x < 0 \end{cases}$$

dom $f = \mathbb{R}$.

$\forall x \neq 0$ f è continua

studiamo la continuità in $x_0 = 0$

$$f(0) = e^x(x+1)\Big|_{x=0} = e^0 \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1.$$

$x_0 = 0$ è pto d'accum. per $f(x)$.
studio la continuità usando il limite

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 1 = 1$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \underbrace{e^x}_{\downarrow \atop 1} \underbrace{(x+1)}_{\downarrow \atop 1} = 1$$

Allora

$\exists \lim_{x\to 0} f(x) = 1 = f(0)$

$\Longrightarrow$ f è continua in $x_0 = 0$.

Dunque f è CONTINUA su $\mathbb{R}$.

Derivabilità: $\forall x \neq 0$:

$$f'(x) = \begin{cases} e^x(x+1) + e^x = e^x(x+2), & x > 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

Studiamo la derivabilità in $x_0 = 0$.

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \underbrace{e^x}_{e^0 = 1} \underbrace{(x+2)}_{2} = 2$$

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0$$

Dunque $\exists \; f'_{\pm}(0) \in \mathbb{R}$

ma

$$f'_{+}(0) \neq f'_{-}(0)$$

$\Longrightarrow \quad x_0 = 0 \quad$ pto ANGOLOSO.

ES 3 :

$$\int \frac{1}{1+\sqrt{x}}\,dx =$$

sostituzioni:

$$\sqrt{x} = t$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = dt$$

$$dx = 2\sqrt{x}\,dt = 2t\,dt$$

$$= \int \frac{1}{1+t}\,2t\,dt = 2\int \frac{(t+1)-1}{1+t}\,dt$$

$$= 2\int \left(1 - \frac{1}{1+t}\right)dt =$$

$$= 2\;t - \log|1+t| + c =$$

$$= 2\sqrt{x} - \log(1+\sqrt{x}) + c$$

MATEMATICA 17 gennaio 2024, prova intermedia a.a. 2023-24

Tempo a disposizione: 1 ora e 30 minuti

---

1. Calcolare il limite
$$\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x^2)+3x^3}{1+\frac{1}{3}x^2-\cosh x}$$

---

2. Si consideri la funzione $f(x)=2|x|(\sin x)^{\frac{1}{3}}$.
Calcolare il dominio di f.
Studiare la continuità di f nel suo dominio.
Studiare la derivabilità di f nel suo dominio.
Data $g(x)=x^{\frac{1}{3}}$ dire se $f=o(g)$ per $x\to 0$.

---

3. Calcolare l'insieme delle primitive della funzione $f(x)=\frac{1}{x(\log(x)-2)}$. Determinare poi la primitiva $F(x)$ di $f(x)$ tale che $F(e)=2$.

SECONDA PARTE:

4. Sia $f:\mathrm{dom}f\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Dare la definizione di funzione continua in un punto $x_0\in\mathrm{dom}f$ e darne un'interpretazione geometrica. Dimostrare che se x_0 è un punto isolato del dominio, allora f è continua in tale punto.

5. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false motivando la risposta.
   (a) Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tale che $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$. Allora l'insieme immagine $\mathrm{Im}(f)$ è un insieme inferiormente illimitato.
   (b) Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funzione limitata, allora ha massimo.
   (c) Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ($a,b\in\mathbb{R},\ a<b$) continua tale che in $x_0\in(a,b)$ ha minimo. Allora x_0 è stazionario per f .
   (d) Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tale che ammette limite finito in $x_0\in\mathbb{R}$ (ossia $\lim_{x\to x_0}f(x)=L$ con $L\in\mathbb{R}$), allora è limitata.
   (e) Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ strettamente crescente e derivabile. Allora in $f'>0$.
   (f) Se f è derivabile nel suo dominio I, allora $f\in C^1(I)$.
   (g) Sia f tale che esiste f'' in un punto x_0 del suo dominio e $f''(x_0)=0$, allora $x=x_0$ è un punto di flesso.

6. Enunciare il teorema della condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità e darne un'interpretazione geometrica. Fornire un esempio di funzione limitata e non integrabile secondo Riemann, motivando la risposta.

ES 1 :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2)+3x^3}{1+\frac{1}{3}x^2-\cosh x} =$$

TAYLOR:

- $\log(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + o(z^2)$
- $\cosh z = 1 + \frac{z^2}{2} + o(z^2)$

$$D = \cancel{1} + \frac{1}{3}x^2 - \cancel{1} - \frac{x^2}{2} + o(x^2) = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)x^2 + o(x^2) =$$

$$= -\frac{1}{6}x^2 + o(x^2) = -\frac{1}{6}x^2 + o(x^2)$$

$$N = x^2 \underbrace{- \frac{x^4}{2} + 3x^3}_{o(x^2)} + o(x^2) = +x^2 + o(x^2)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x^2)+3x^3}{1+\frac{1}{3}x^2-\cosh x} = \lim_{x\to 0} \frac{+x^2}{-\frac{1}{6}x^2} = -6$$

ES 2:

$$f(x) = 2|x| (\sin x)^{1/3}$$

1. $\text{dom} f = \mathbb{R}$

2. Continuità: f è continua nel suo dominio perché prodotto di funzioni continue.

Si può vedere anche così:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0 \\ -x & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 2x (\sin x)^{1/3} & x \geq 0 \\ -2x (\sin x)^{1/3} & x < 0 \end{cases}$$

- $\forall x \neq 0$ $\quad f \in C^0$

- $x = 0$: è un pto d'accum. per dom f. Allora posso studiare la continuità usando il limite.

$f(0) = 0$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} 2x (\sin x)^{1/3} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} -2x (\sin x)^{1/3} = 0$$

Allora

$$f(0) = \lim_{x \to 0} f(x).$$

$\Rightarrow f$ è continua in $x = 0$

3) derivabilità:

$\boxed{1° \text{ MODO}}$: Calcolo f' con le regole di calcolo dove è possibile:

$$f'(x) = 2\,\frac{|x|}{x}(\sin x)^{1/3} + 2|x|\,\frac{1}{3}(\sin x)^{1/3-1}\cos x =$$

$$= \frac{2|x|}{x}(\sin x)^{1/3} + \frac{2}{3}|x|(\sin x)^{-2/3}\cos x$$

dom $f' = \mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$

Il comportamento di f' in $k\pi$ è analogo a quello in $x=0$ (per $k=0$)

Allora studio $x=0$.

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \overbrace{\underbrace{\frac{2|x|}{x}}_{\frac{x}{x}=1}\overbrace{(\sin x)^{1/3}}^{\to 0}}^{\to 0} + \frac{2}{3}\,\frac{\overbrace{|x|}^{x}\cos x}{(\sin x)^{2/3}}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{3}\,\frac{x}{(\sin x)^{2/3}} = \frac{0}{0} \underset{\text{Hôpital}}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{3}\,\frac{1}{\frac{2}{3}(\sin x)^{2/3-1}\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}}\cdot\frac{\cancel{3}}{\cancel{2}}\,\frac{1}{(\sin x)^{-1/3}\underbrace{\cos x}_{1}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} (\sin x)^{1/3} = 0 \;:=\; f'_+(0)$$

Analogamente:

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} 2\,\underbrace{\frac{|x|}{x}}_{\frac{-x}{x}=-1}\overbrace{(\sin x)^{1/3}}^{\to 0} + \frac{2}{3}|x|\frac{\cos x}{(\sin x)^{2/3}}$$

$$= \lim_{x\to 0^-} -\frac{2}{3}\frac{x\cos x}{(\sin x)^{2/3}} =$$

$$= \lim_{x\to 0^-} -\frac{2}{3}\frac{x}{(\sin x)^{2/3}} = \frac{0}{0} \underset{\text{Hôpital}}{=}$$

$$= -\lim_{x\to 0^-} \frac{2}{3}\frac{1}{\frac{2}{3}(\sin x)^{-1/3}\cos x} =$$

$$= -\lim_{x\to 0^-} \cancel{\frac{2}{3}}\cdot\cancel{\frac{3}{2}}\underbrace{(\sin x)^{1/3}}_{0} = 0 = f'_-(0)$$

Allora $f'_+(0) = f'_-(0) = f'(0)$

$\Longrightarrow$ f è derivabile in tutto il suo dominio.

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$

$$f(x) = \begin{cases} 2x(\sin x)^{1/3} & x \geq 0 \\ -2x(\sin x)^{1/3} & x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2(\sin x)^{1/3} + 2x\,\frac{1}{3}(\sin x)^{-2/3}\cos x & x > 0,\ x \neq k\pi \\ -2(\sin x)^{1/3} - 2x\,\frac{1}{3}(\sin x)^{-2/3}\cos x & x < 0,\ x \neq k\pi \end{cases}$$

. $x = k\pi \in \text{dom} f$. Studio $x = 0$ (tanto gli altri sono analoghi).
Provo a studiare la derivabilità in $x = 0$ facendo i limiti

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \underbrace{2(\sin x)^{1/3}}_{\to 0} + \frac{2}{3}x(\sin x)^{-2/3}\underbrace{\cos x}_{\to 1} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{2}{3}\frac{x}{(\sin x)^{2/3}} \underset{\text{Hôpital}}{=} 0$$

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} \underbrace{-2(\sin x)^{1/3}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{2}{3}x(\sin x)^{-2/3}\cos x}_{\to 0 \text{ come sopra}} = 0$$

$\boxed{3^{\circ}\ \text{MODO}}$

$$f(x) = 2|x|(\sin x)^{1/3}$$

$\text{dom} f = \mathbb{R}$

- $|x|$ NON è derivabile in $x=0$
- $(\sin x)^{1/3}$ è derivabile in TUTTO $\mathbb{R} \setminus k\pi$

$\Rightarrow$ $f(x)$ potrebbe NON essere derivabile in $x = k\pi$. Devo studiarlo.

Dunque:

$\forall x \neq k\pi \quad \exists f'(x)$

In $x=k\pi$ provo a vedere con la def. Studio $x=0$. Gli altri sono analoghi.
Calcolo

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-\overbrace{f(0)}^{=0}}{x-0} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2|x|(\sin x)^{1/3}}{x} =$$

$$= \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{2\cancel{x}(\sin x)^{1/3}}{\cancel{x}} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^-} -2\dfrac{\cancel{x}}{\cancel{x}}(\sin x)^{1/3} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0 = f'(0)$$

$\Rightarrow$ f è derivabile anche in $x=0$

$\Longrightarrow$ f è derivabile in $\mathbb{R} = \text{dom} f$

3) $f(x) = 2|x|(\sin x)^{1/3}$

$g(x) = x^{1/3}$

$f = o(g)$ per $x \to 0$ $\Longleftrightarrow$ $\lim_{x \to 0} \frac{f}{g} = 0$

Studio:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2|x|(\sin x)^{1/3}}{x^{1/3}} = \lim_{x \to 0} \underbrace{2|x|}_{0} \underbrace{\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/3}}_{1} = 0$$

(è il limite notevole)

$\Longrightarrow$ $f = o(g)$.

ES 3 : $f(x) = \dfrac{1}{x(\log x - 2)}$

$$\int \frac{1}{x(\log x - 2)}\,dx = \log|\log x - 2| + c = F(x)$$

Calcolo c t.c $F(e) = 2$

$$F(e) = \log|\log e - 2| + c = \log|1 - 2| + c = \log|-1| + c$$

$$= \underbrace{\log 1}_{=0} + c = c$$

$$F(e) = 2 \iff c = 2$$

Da cui la primitiva richiesta è:

$$F(x) = \log|\log x - 2| + 2$$

MATEMATICA 17 dicembre 2024, 6 appello a.a. 2023-24

Tempo a disposizione: 1 ora e 45 minuti

---

1. Data la funzione $f(x) = \sqrt[3]{x}$ studiare la continuità e la derivabilità della f nel suo dominio e, se esistono, classificare i punti di non derivabilità.

2. Calcolare
$$\lim_{x \to 0} \frac{4x^2 \cos x - \log(1 + 4x^2)}{6x^2 \sin(x^2)}$$

---

3. Calcolare
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\sin(2x)} \cos(2x)\, dx.$$

SECONDA PARTE:

4. Dare la definizione di funzione derivabile in un punto e darne un'interpretazione geometrica.

   Fornire un esempio di funzione continua ma non derivabile in un punto del suo dominio.

5. Enunciare e dimostrare il teorema "monotonia e derivata"

6. Dare la definizione di primitiva di una funzione. Enunciare e dimostrare il primo teorema fondamentale del calcolo.

---

17 dicembre 2024

6° appello 2024

ES1: $f(x) = \sqrt[3]{x}$ $\qquad$ dom $f = \mathbb{R}$

studiare la continuità e la derivabilità di $f(x)$

Continuità: f è continua in tutto il suo dominio

Derivabilità: $$f'(x) = \frac{1}{3} x^{1/3-1} = \frac{1}{3} x^{-2/3} = \frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\text{dom } f' = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$$

$$\text{dom } f' \subsetneq \text{dom } f$$

$x=0$ è un pto del dominio di f

$x=0$ NON appartiene al dominio di f'

Studio la derivabilità di f in $x=0$.

1° modo: Uso la def.: Calcolo la derivata in $x=0$ come limite del rapporto incrementale:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x} - 0}{x-0} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \lim_{x \to 0} x^{1/3-1} = \lim_{x \to 0} x^{-2/3} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty = \underbrace{f'(0)}_{\substack{\text{derivata} \\ \text{in } x=0}}, \text{ infatti:}$$

$$= \begin{cases} \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty \\ \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $x=0$ è un pto di flesso a tang. verticale perché $f'(0) = +\infty$.

2° modo: Calcolo $f'_+(0)$ e $f'_-(0)$ come limiti delle fne derivate:

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty := f'_+(0)$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty := f'_-(0)$$

$\Longrightarrow f'_+(0) = f'_-(0) = f'(0) = +\infty$

$\Longrightarrow x = 0$ è pto di flesso a tang. verticale

(Ricorda: Se $\exists \lim_{x\to x_0^+} f'(x) = l^+ \Longrightarrow \exists f'_+(x_0) = l^+$

$\exists \lim_{x\to x_0^-} f'(x) = l^- \Longrightarrow \exists f'_-(x_0) = l^-$)

ES 2:

Calcolare
$$\lim_{x\to 0} \frac{4x^2\cos x - \log(1+4x^2)}{6x^2 \sin x^2}$$

Uso gli sviluppi di Taylor:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + o(z^3) \quad \text{per } z\to 0 \qquad \text{con } z = x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + o(z^4) \quad \text{per } z \to 0 \qquad \text{con } z = x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

$$\log(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + o(z^3) \quad \text{per } z\to 0$$
$$\text{con } z = 4x^2 \xrightarrow[x\to 0]{} 0.$$

Denominatore: $6x^2 \sin x^2 \sim 6x^2x^2 = 6x^4$

Numeratore:

$$4x^2\cos x - \log(1+4x^2) \sim$$

$$4x^2\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) - \left(4x^2 - \frac{1}{2}(4x^2)^2 + o(x^4)\right) =$$

$$= \cancel{4x^2} - 2x^4 + o(x^4) - \cancel{4x^2} + \frac{1}{2}16x^4 + o(x^4) =$$

$$= -2x^4 + 8x^4 + o(x^4) = 6x^4 + o(x^4)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{4x^2\cos x - \log(1+4x^2)}{6x^2\sin x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{6x^4}{6x^4} = 1.$$

ES 3

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} \underbrace{2e^{\sin(2x)}}_{e^{f(x)}}\ \underbrace{\cos(2x)}_{f'(x)}\,dx = \frac{1}{2}\, e^{\sin 2x}\Big|_0^{\pi/4} =$$

$$\int e^{f(x)} f'(x)\,dx = e^{f(x)}$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{\overbrace{\sin \cancel{2}\pi/\cancel{4}_2}^{\sin \pi/2 = 1}} - e^{\overbrace{\sin 0}^{=0}}\right] = \frac{1}{2}\left[e^{1} - e^{0}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[e - 1\right]$$