MATEMATICA 12 gennaio 2023, prova intermedia a.a. 2022-23

Tempo a disposizione: 1 ora e 30 minuti

---

1. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{3+x^2}-\sqrt{3-x^2}}{\sin(1-\cos x)}.$$

---

2. Si consideri la funzione $f(x) = \log(e^x - x)$.
Per lo studio della funzione ricordare che vale la disuguaglianza

$$e^x \geq x+1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Calcolare il dominio di f.
Studiare il segno di f.
Calcolare i limiti e gli eventuali asintoti orizzontali, verticali. Dire se a $+\infty$ la funzione ammette asintoto obliquo e eventualmente calcolarlo.
Calcolare la derivata prima e studiare la monotonia della funzione.

---

3. Calcolare la media integrale della funzione $f(x) = xe^{x^2-3}$ sull'intervallo $[\sqrt{3}, 2]$.

SECONDA PARTE:

4. Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Dare la definizione di $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ con $l \in \mathbb{R}$ e darne l'interpretazione geometrica. La funzione f é limitata? Motivare la risposta.

5. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false motivando la risposta.
   (a) Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tale che $lim_{x\to 3} f(x) = -5$. Allora $f(x) < 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.
   (b) Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funzione strettamente crescente, allora $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
   (c) Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ $(a,b\in\mathbb{R},\ a<b)$ continua. Allora f é limitata.
   (d) Sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ $(a,b\in\mathbb{R},\ a<b)$ integrabile. Allora f é continua.
   (e) Se f é derivabile in $x = x_0$, allora f é continua in $x = x_0$.
   (f) Sia $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ $(a,b\in\mathbb{R},\ a<b)$. Sia $x = x_0 \in (a,b)$ un punto di estremo relativo per f. Allora $x = x_0$ é stazionario per f.

6. Enunciare e dimostrare il teorema di Rolle e darne un'interpretazione geometrica.

ES1:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{3+x^2} - \sqrt{3-x^2}}{\sin(1-\cos x)} \underset{\text{razionalizzo}}{=}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{3}+x^2-\cancel{3}+x^2}{\underbrace{\left(\underbrace{\sqrt{3+x^2}}_{\to\sqrt{3}}+\underbrace{\sqrt{3-x^2}}_{\to\sqrt{3}}\right)}_{\to 2\sqrt{3}} \sin(1-\cos x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}\sqrt{3}\,\sin(1-\cos x)} \underset{\text{Taylor}}{=}$$

- $\sin z \sim z$ per $z \to 0$

  $\Rightarrow \sin(1-\cos x) \sim 1-\cos x$

- $\cos x \sim 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$\Rightarrow \sin(1-\cos x) \sim 1-\cos x \sim$

$\sim 1-\left(1-\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2}$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x^2}}{\sqrt{3}\,\frac{\cancel{x^2}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Es 2:

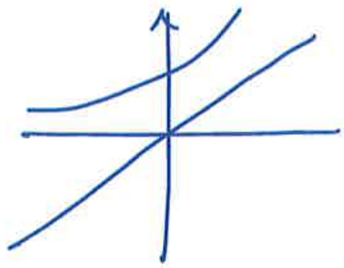
$$f(x) = \log(e^x - x)$$

1. dom f: $x \in \mathbb{R}$: $e^x - x > 0 \iff$

$$e^x > x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Dunque:

dom $f = \mathbb{R}$

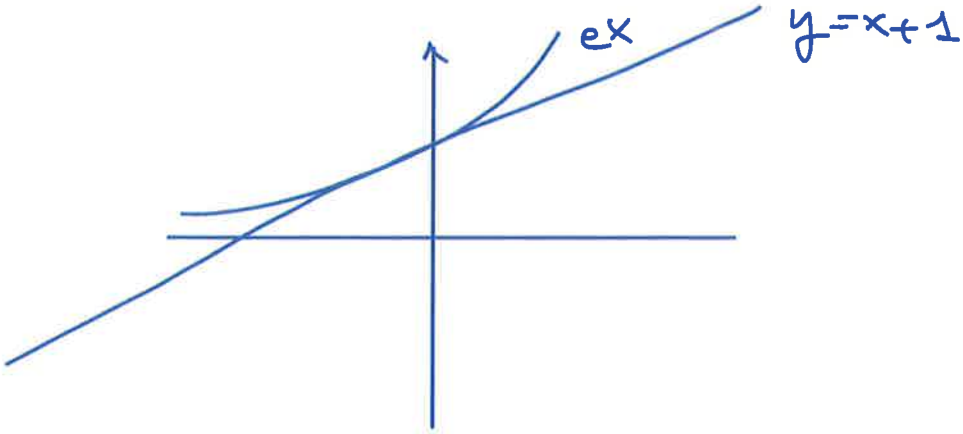


2. Segno: $f(x) > 0 \iff \log(e^x - x) > 0$

$$\iff e^x - x > 1$$

$$\iff e^x > x + 1 \qquad \forall x \neq 0$$

In $x=0$ si ha $e^x = x+1$



Dunque:

$f(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = 0$ sse $x = 0$

3. Limiti:

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \log(\underbrace{e^x - x}_{\text{fra i 2 vince } e^x}) =$

$= \lim_{x\to+\infty} \log e^x = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$

- $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \log(\underbrace{e^x}_{\downarrow\, 0} \underbrace{-x}_{\downarrow\, +\infty}) = +\infty$$

$\nexists$ asintoti orizzontali

$\nexists$ asintoti verticali

Asintoto obliquo a $+\infty$:

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\log(e^x - x)}{x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\log\left(e^x\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)\right)}{x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\log e^x + \overbrace{\log\left(1 - \overbrace{\frac{x}{e^x}}^{\to 0}\right)}^{\to 0}}{x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x} = 1$$

$$q = \lim_{x \to +\infty} f(x) - mx =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \log(e^x - x) - x =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \log\left(e^x\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)\right) - x =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \log e^x + \underbrace{\log\left(1 - \frac{x}{e^x}\right)}_{0} - x =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} x - x = 0$$

$y = x$ asintoto obliquo a $+\infty$

4. Monotonia

$$f(x) = \log(e^x - x)$$

$$f'(x) = \frac{1}{e^x - x}(e^x - 1) \geq 0 \iff$$

$$N \geq 0 \iff e^x - 1 \geq 0$$

$$\iff e^x \geq 1$$

$$\iff \boxed{x \geq 0}$$

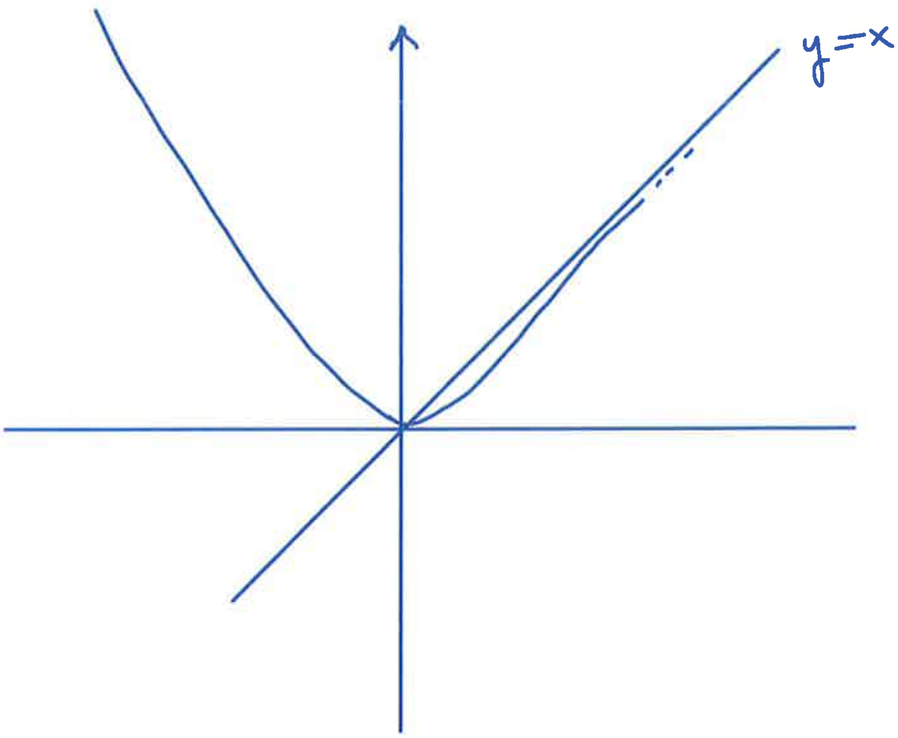
$$D > 0 \iff e^x - x > 0$$

$$\iff e^x > x \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Dunque: $f'(x) \geq 0 \iff x \geq 0$

		0	
f'	$-$		$+$
f	$\searrow$		$\nearrow$

$x = 0$ pto di min assoluto


y=x

ES 3

$$M_f = \frac{\int_{\sqrt{3}}^{2} x\, e^{x^2-3}\, dx}{2-\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\int_{\sqrt{3}}^{2} 2x\, e^{x^2-3}\, dx}{2-\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{e^{x^2-3}\Big|_{\sqrt{3}}^{2}}{2-\sqrt{3}} = \frac{e^{4-3} - e^{3-3}}{2-\sqrt{3}} =$$

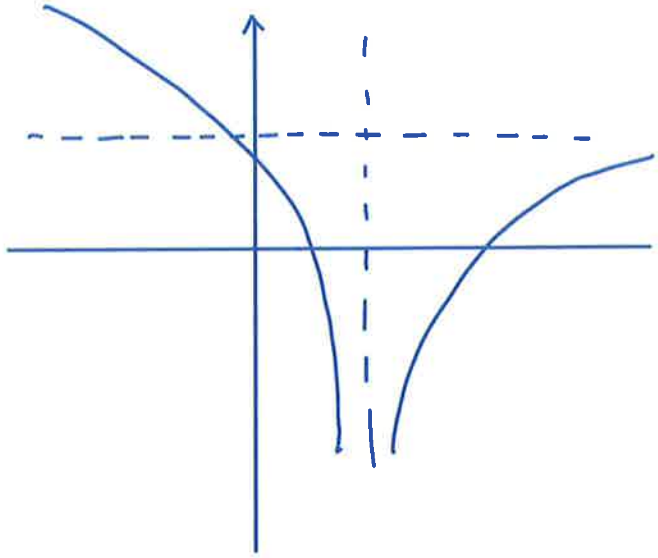
$$= \frac{e-1}{2-\sqrt{3}}$$

Risposte alle domande

1. Se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R} \implies f$ è limitata ?

No!

Esempio:



LIMITATA significa limitata sia sup. che inferiormente.
L'informazione di limite a $+\infty$
NON esclude che la funz possa tendere
a $-\infty$ o $+\infty$ da qualche altra
parte.

ES 5:

(a) F

(b) F

(c) V

(d) F

(e) V

(f) F

MATEMATICA 3 febbraio 2023, 1 appello a.a. 2022-23

Tempo a disposizione: 1 ora e 30 minuti

---

1. Data la funzione:
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ x^2 & \text{se } x \leq 0, \end{cases}$$
studiare la continuità e la derivabilità della funzione nel suo dominio.

---

2. Si consideri la funzione $f(x) = x - \frac{1}{x+2}$.
Calcolare il dominio di f.
Calcolare i limiti e gli eventuali asintoti orizzontali, verticali e obliqui.
Calcolare la derivata prima e studiare la monotonia della funzione.
Calcolare la derivata seconda e studiare la concavità e la convessità della funzione.

---

3. Calcolare l'insieme delle primitive della funzione $f(x) = \frac{1}{x}(\log x)^3$.

SECONDA PARTE:

4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dare la definizione di $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ e darne l'interpretazione geometrica. Scrivere la definizione di insieme immagine di f. L'insieme immagine di f ha massimo? Esiste l'estremo superiore dell'insieme immagine? Se si, quanto vale?

5. Dare la definizione di derivata destra e sinistra di una funzione in un punto. Fornire un esempio di funzione che ammetta un punto di cuspide, dicendo in questo caso come si comportano la derivata destra e sinistra.
Se una funzione è NON derivabile in un punto x_0, allora è discontinua in tale punto? Motivare la risposta.

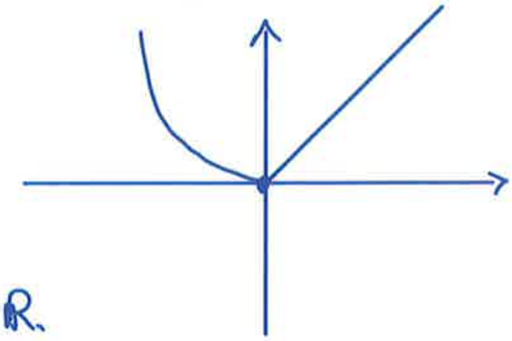
6. Enunciare e dimostrare il primo teorema fondamentale del calcolo integrale. Fornire un esempio di una funzione non integrabile secondo Riemann.

ES1

Data la funzione $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x > 0 \\ x^2 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$

studiare la continuità e la derivabilità della funzione nel suo dominio.

dom $f = \mathbb{R}$



f è continua $\forall x \in \mathbb{R}$.

Infatti, per $x > 0$ $f(x) = x$ fnc continua

per $x < 0$ $f(x) = x^2$ fnc continua

L'unico pto che potrebbe dar problemi è il pto di raccordo $x = 0$, pto di accum. del dominio. Su tale pto però:

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} x^2 = 0 = f(0)$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x = 0$$

Dunque: $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$

dunque f è continua in $x = 0$.

Da cui: f è continua in $\mathbb{R} = \text{dom} f$.

Derivabilità.

Abbiamo:
$$f'(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 2x & x < 0 \end{cases}$$

dunque, $\forall x \neq 0$ f è derivabile.

Controlliamo che cosa succede in $x = 0 \in \text{dom} f$.

In $x = 0$ si ha:

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} 1 = 1$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} 2x = 0$$

$\Longrightarrow$ $x = 0$ è un punto angoloso (di non derivabilità).

Conclusione, – f è derivabile in $\forall x \neq 0$

– in $x = 0$ ha un punto angoloso.

Es 2 :

$$f(x)=x-\frac{1}{x+2}$$

1. dom f

$$\text{dom} f=\{x\in\mathbb{R}:\ x\neq -2\}=\mathbb{R}\setminus\{-2\}$$

2. limiti

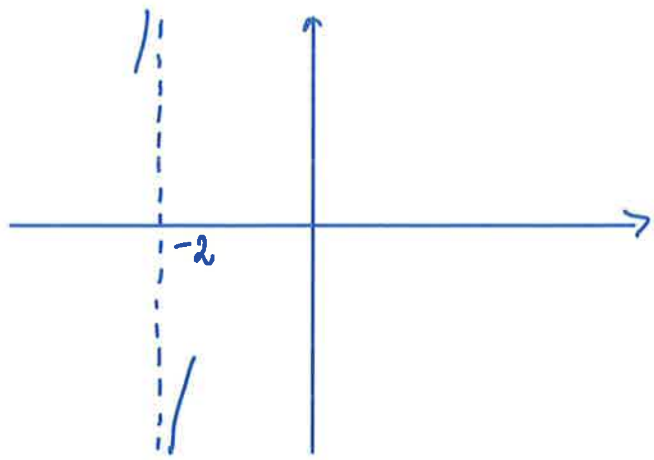
$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x-\underbrace{\frac{1}{x+2}}_{0}=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x-\underbrace{\frac{1}{x+2}}_{0}=+\infty$$

$\Rightarrow$ NO asintoti orizzontali

$$\lim_{x\to-2^-} f(x)=\lim_{x\to-2} \underbrace{x}_{-2}\underbrace{-\underbrace{\frac{1}{\underbrace{x+2}_{0^-}}}_{-\infty}}_{+\infty}=+\infty$$

$$\lim_{x\to-2^+} f(x)=\lim_{x\to-2^+} x\underbrace{-\underbrace{\frac{1}{\underbrace{x+2}_{0^+}}}_{+\infty}}_{-\infty}=-\infty$$



$x=-2$ è asintoto verticale

Possibili asintoti obliqui:

$+\infty$: • $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x-\frac{1}{x+2}}{x} =$

$$= \lim_{x\to+\infty} 1 - \underbrace{\frac{1}{x(x+2)}}_{0} = 1 = m$$

• $\lim_{x\to+\infty} f(x) - mx =$

$$= \lim_{x\to+\infty} x - \frac{1}{x+2} - x = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x+2} = 0 = q$$

$y = mx + q = x$ = asintoto obliquo a $+\infty$

$-\infty$: $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x - \frac{1}{x+2}}{x} = 1 := m$

$q = \lim_{x \to -\infty} f(x) - mx = 0$

come sopra.

Dunque

$y = x$ è asintoto obliquo anche a $-\infty$

3. Derivata 1ª e monotonia

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{(x+2)^2}$$

$f'(x) \geq 0 \iff 1 + \frac{1}{(x+2)^2} \geq 0$ sempre

Dunque f è sempre crescente.

4. Derivata 2ª e convessità

$$f''(x) = \frac{-2(x+2)}{(x+2)^4} = -\frac{2}{(x+2)^3} \geq 0$$

$\Updownarrow$

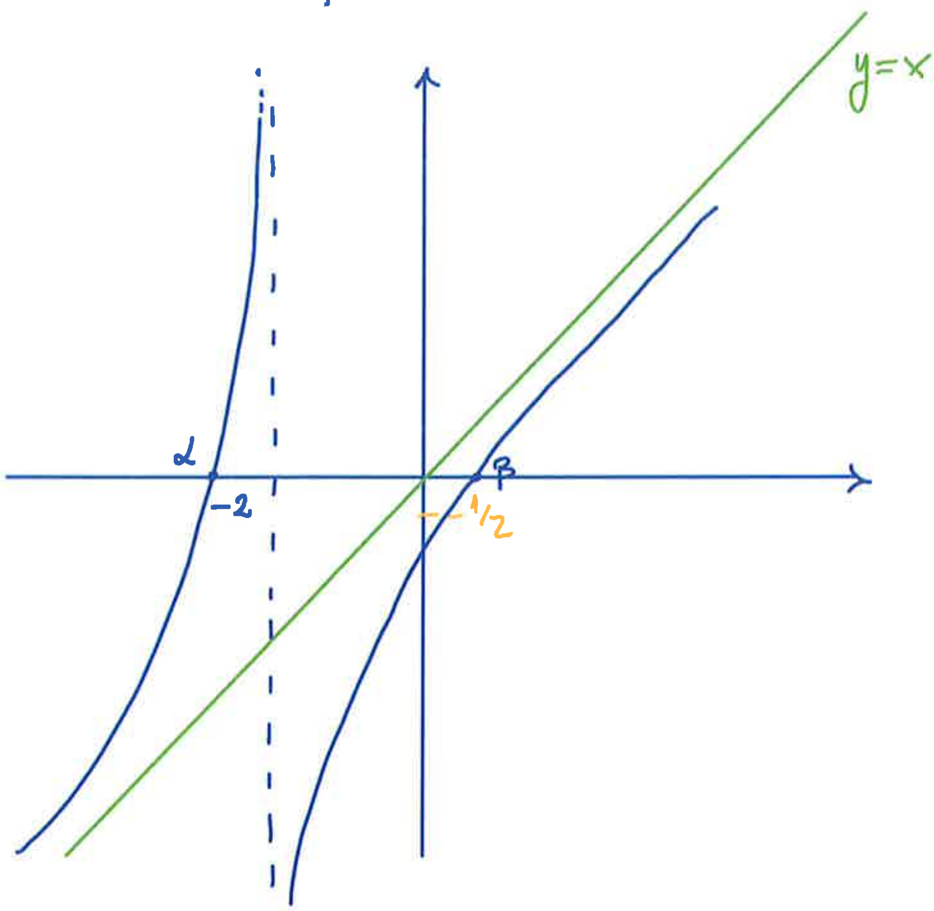
$x+2<0 \iff$

$x<-2$

		-2
f''	$+$	$-$
f	$\cup$	$\cap$

per $x<-2$ $f(x)$ convessa

per $x>-2$ $f(x)$ concava



Intersezione con l'asse x:

$$f(x) = 0 \iff x - \frac{1}{x+2} = 0$$

$$\iff \frac{x^2+2x-1}{x+2} = 0$$

$$\iff x^2+2x-1 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = -1 \pm \sqrt{2} =$$

$$= \begin{cases} -1-\sqrt{2} = \alpha \\ -1+\sqrt{2} = \beta \end{cases}$$

ES3: Calcolare l'insieme delle primitive

$$f(x) = \frac{1}{x}(\log x)^3$$

$$\int \frac{1}{x}(\log x)^3 \, dx = \int g'(x)(g(x))^\alpha \, dx$$

con $\alpha = 3$

$g(x) = \log x$

$$= \frac{1}{\alpha+1}\left(g(x)\right)^{\alpha+1} + c$$

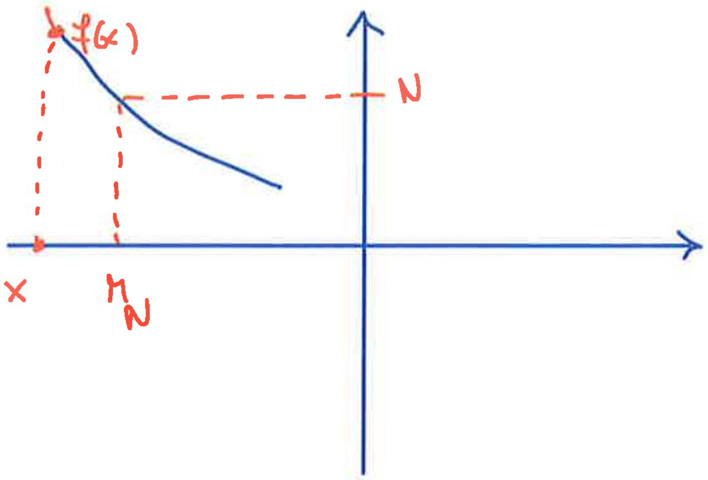
$$= \frac{1}{4}\left(\log x\right)^{4} + c.$$

DOMANDE di TEORIA.

1. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \overset{def}{\Longleftrightarrow}$

$$\forall N > 0 \quad \exists M_N > 0 : \quad \forall x \leq -M_N \implies f(x) \geq N$$



- Sia $f : A \longrightarrow B$.

$$\operatorname{Im} f = \{ y \in B : \ \exists x \in A \ \text{t.c.} \ f(x) = y \}$$

Se f è t.c. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$,

allora $\operatorname{Im} f$ NON è limitata superiormente,

ha estremo superiore uguale a $+\infty$,

ma non ha massimo.

Dunque: $\exists \sup \operatorname{Im} f = +\infty$

$\nexists \max \operatorname{Im} f$

2. Sia $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo aperto.

Sia $x_0 \in I$

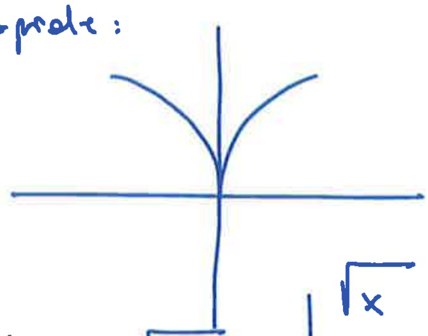
$$f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \text{DERIVATA dx}$$

$$= \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{x \to x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \text{DERIVATA SX}$$

Esempio di fne che ammette un pto di cuspide:



$$f(x) = \sqrt{|x|} = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x \geq 0 \\ \sqrt{-(x)} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & x > 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{-x}}(-1) = -\frac{1}{2\sqrt{-x}} & x < 0 \end{cases}$$

in $x = 0$:

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{2\sqrt{x}} = +\infty = f'_+(0)$$

$$\lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} -\frac{1}{2\sqrt{-x}} = -\infty = f'_-(0)$$

Nel pto di cuspide si ha: f è continua in x_0 e

$f'_+(x_0) = +\infty$ (oppure $-\infty$)

$f'_-(x_0) = -\infty$ (oppure $+\infty$)

Se una funzione è NON derivabile in un pto x_0, allora è discontinua in tale pto?

La RISPOSTA è NO.

Infatti i pti di NON derivabilità (pti ANGOLOSI, CUSPIDI, FLESSI a Tang. verticali sono) esempi di pti di NON derivabilità ma che sono pti di continuità!

3. Esempio di fnc NON integr. secondo Riemann è la fnc di DIRICHLET

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \forall x \in [-1,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \forall x \in [-1,1] \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{per } x \text{ razionali, } x \in [-1,1] \\ 0 & \text{per } x \text{ irrazionali, } x \in [-1,1]. \end{cases}$$

Tempo a disposizione: 1 ora e 30 minuti

---

1. Calcolare il limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^x - \sin x - 1)x^5}{(\sin x)^7}.$$

---

2. Si consideri la funzione $f(x) = \frac{|2x-1|}{x}$.
Calcolare il dominio di f.
Studiare la continuità e la derivabilità della funzione nel punto $x = \frac{1}{2}$ e stabilire se è un punto di estremo per la funzione.

---

3. Calcolare l'integrale
$$\int \frac{x}{x^2 - 3x + 2}\, dx$$

SECONDA PARTE:

4. Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sia $x_0 \in A$. Dare la definizione di funzione continua in x_0. Che cosa succede nei punti isolati del dominio? La funzione è continua? Motivare la risposta.
5. Dare la definizione di massimo e minimo relativo. Enunciare e dimostrare il teorema di Fermat.
6. Enunciare e dimostrare il secondo teorema fondamentale del calcolo integrale.

ES 1:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^x - \sin x - 1)x^5}{(\sin x)^7} =$$

$\downarrow$

Taylor:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left[\cancel{1} + \cancel{x} + \frac{x^2}{2} + \dots - \left(\cancel{x} - \frac{x^3}{6} + \dots\right) - \cancel{1}\right]x^5}{(\sin x)^7}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right]x^5}{(\sin x)^7} =$$

$\frac{x^3}{6} = o(x^2)$

$\hookrightarrow \sin x \sim x$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2} \cdot x^5}{x^7} = \frac{1}{2}$$

Es 2

$$f(x) = \frac{|2x-1|}{x}$$

1: dom $f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-1}{x} & \text{se } x \geq 1/2 \\[2ex] \dfrac{1-2x}{x} & \text{se } x < 1/2 \end{cases}$$

f è continua in $x = 1/2$.

Infatti:

$$f(1/2) = 0$$

$$\lim_{x \to 1/2^+} f(x) = \lim_{x \to 1/2^+} \frac{2x-1}{x} = 0 = f(1/2)$$

$$\lim_{x \to 1/2^-} f(x) = \lim_{x \to 1/2^-} \frac{1-2x}{x} = 0$$

Dunque f è continua in $x = 1/2$
e dunque f è continua
su tutto il suo dominio.

Studiamo la derivabilità in
$x = 1/2$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-1}{x} & x \geq 1/2 \\ \\ \dfrac{1-2x}{x} & x < 1/2 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 2 - \dfrac{1}{x} & x \geq 1/2 \\ \\ \dfrac{1}{x} - 2 & x < 1/2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & x > 1/2 \\ -\dfrac{1}{x^2} & x < 1/2 \end{cases}$$

in $x = 1/2$:

$$f'_+\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{x \to 1/2^+} f'(x) =$$

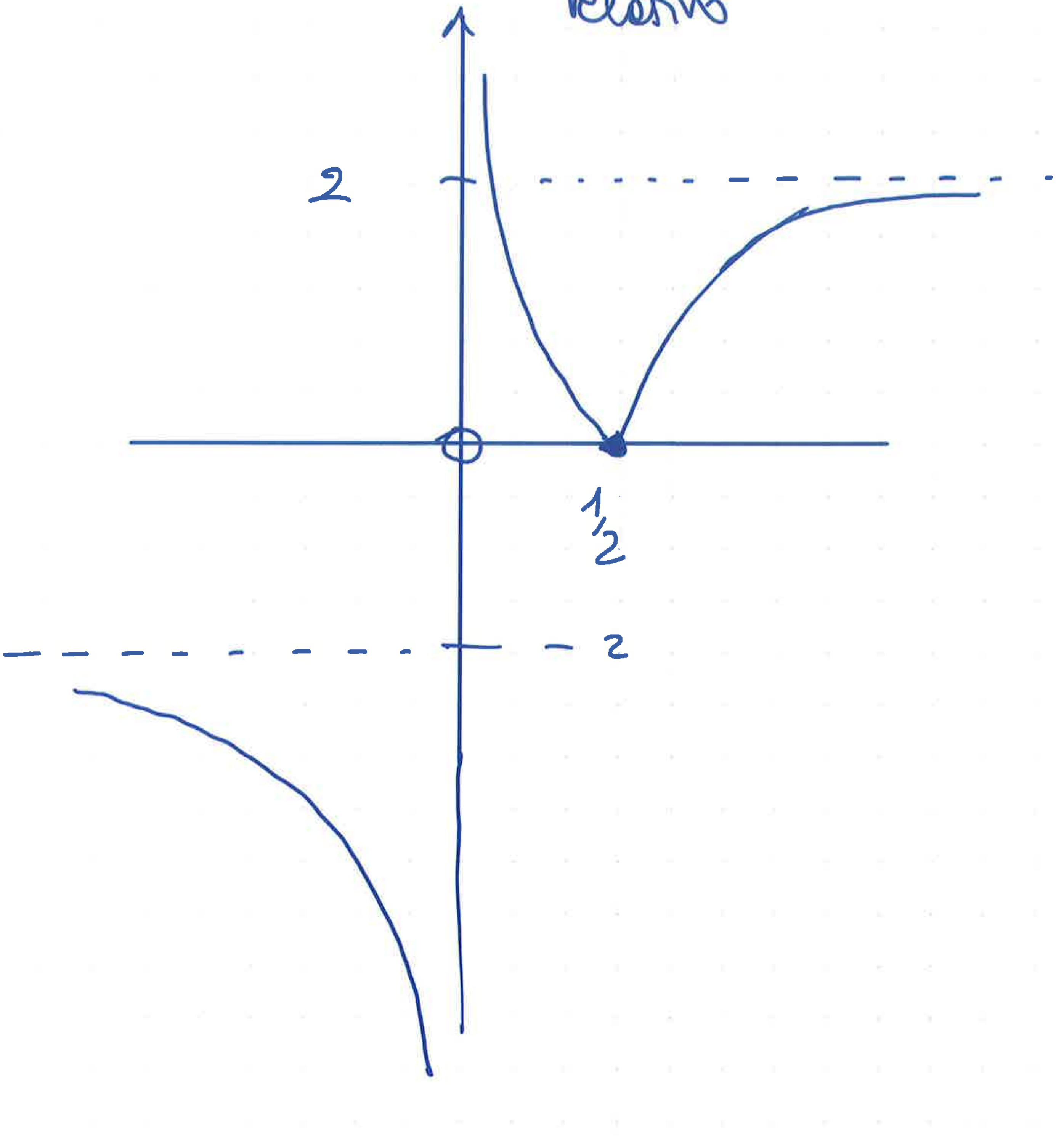
$$= \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} \frac{1}{x^2} = 4$$

$$f'_-\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f'(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} -\frac{1}{x^2} = -4$$

$$f'_+\left(\frac{1}{2}\right) \neq f'_-\left(1/2\right)$$

$$f'_+\left(\tfrac{1}{2}\right),\ f'_-\left(\tfrac{1}{2}\right) \in \mathbb{R}$$

$\Longrightarrow x = \dfrac{1}{2}$ pto angoloso di MIN relativo



Limiti:

- $$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{|2x - 1|}{x} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{2x - 1}{x} = 2$$

$y = 2$ asintoto orizzontale dx

- $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{|2x - 1|}{x} =$$

$x \to -\infty$ dunque $x < 1/2$

$$= \lim_{x \to -\infty} \frac{1 - 2x}{x} = -2$$

$y = -2$ asintoto orizzontale sx

$$\cdot \lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{|2x-1|}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{|-1|}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\cdot \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{|2x-1|}{x} =$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

ES 3 :

Calcolare l'integrale

$$\int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx$$

$$\frac{x}{x^2-3x+2} = \frac{x}{(x-1)(x-2)} =$$

$$= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} =$$

$$= \frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)} =$$

$$= \frac{Ax-2A+Bx-B}{(x-1)(x-2)} =$$

$$= \frac{(A+B)x - 2A - B}{(x-1)(x-2)}$$

$$\iff \begin{cases} A+B = 1 \\ -2A - B = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3A = 1 \\ B = 2A \end{cases}$$

$$A = 1/3 \qquad B = \frac{2}{3}$$

$$\int \frac{x}{x^2-3x+2}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}\,dx +$$

$$+ \frac{2}{3}\int \frac{1}{x-2}\,dx =$$

$$= \frac{1}{3}\log|x-1| + \frac{2}{3}\log|x-2| + c$$

$$= \frac{1}{3}\left(\log|x-1| + \log|x-2|^2\right) + C$$

$$= \frac{1}{3}\log\frac{|x-1|}{|x-2|^2} + C =$$

$$= \log\left(\frac{|x-1|}{|x-2|^2}\right)^{1/3} + C$$

MATEMATICA 5 aprile 2023, 3 appello a.a. 2022-23

Tempo a disposizione: 1 ora e 30 minuti

---

1. Sia $f(x)$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x}, & x < 0. \end{cases}$$

Dire se la funzione è continua in $x = 0$. Dire se la funzione ammette derivata in $x = 0$ e eventualmente calcolarla. La funzione è derivabile in $x = 0$? Motivare la risposta.

---

2. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \log(3x) + 1$$

Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 2 centrato nel punto $x_0 = 1$ $(T_1^2(f(x)))$ della funzione f. Calcolare poi il limite

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{T_1^2(f(x))}{\sin(x-1)}$$

$x \to 1^+$

---

3. Determinare la soluzione $y(x)$ del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^y \cos x \\ y(0) = \log 4. \end{cases}$$

SECONDA PARTE:

4. Sia $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, I intervallo. Sia $x_0 \in I$. Dare la definizione di funzione derivabile in x_0 e darne un'interpretazione geometrica. Spiegare i legami fra la continuità e la derivabilità.

5. Enunciare il teorema Monotonia e derivata.

6. Dare la definizione di primitiva di una funzione $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, con I intervallo aperto. Dire se la seguente implicazione è vera o falsa: sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ($a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$) continua, allora f ammette una primitiva. In caso affermativo esibire una primitva di f, motivando la risposta.

ES 1:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ -\sqrt{-x} & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

dom $f = \mathbb{R}$

$f \in C^0(\mathbb{R} \setminus \{0\})$

Studiamo la continuità in $x=0 \in$ dom f ed è anche pto d'accumulazione per dom f.

$$f(0) = \sqrt{x}\Big|_{x=0} = \sqrt{0} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \sqrt{x} = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} -\sqrt{-x} = 0$$

Allora

$$\exists \lim_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$$

$\Longrightarrow$ f è continua in $x=0$

Studio la derivata in $x=0$.

$\forall x \neq 0$ si ha:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & x>0 \\[2ex] -\dfrac{1}{2\sqrt{-x}}(-1) = \dfrac{1}{2\sqrt{-x}} & x<0 \end{cases}$$

in $x=0$:

$$f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{0^+} =$$

$$= +\infty$$

$$f'_-(0) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} \underbrace{+\frac{1}{2\sqrt{\underbrace{-x}_{\to 0^+}}}}_{\to +\infty}$$

$$= +\infty$$

Allora in $x=0$ f ammette derivata che è $=+\infty$, ossia:

$\exists f'(0)=+\infty$

Poiché $f'(0)$ NON è finita, allora f NON è derivabile in $x=0$.

2° MODO per calcolare la derivata in $x=0$.
Uso la def.

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-\overbrace{f(0)}^{=0}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\begin{cases}\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sqrt{x}}=\\ \quad =+\infty\\ \lim_{x\to 0^-}\frac{-\sqrt{-x}}{x}=\end{cases}$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{-\sqrt{-x}}{-(-x)} =$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{-1}{-\sqrt{-x}} =$$

$$= \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{\sqrt{\underset{\downarrow}{-x}}} \to \frac{1}{0^+} = +\infty$$

0^+

$= \quad +\infty.$

limite dx
è = all
limite sx
dunque

$\nexists\ f'(0)$

ES 2

$$f(x) = \log 3x + 1$$

$$T_1^2 f = f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2}(x-1)^2$$

$$f(1) = \log 3x + 1 \Big|_{x=1} = \log 3 + 1$$

$$f(x) = \log 3x + 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{3x} \cdot 3 = \frac{1}{x} \qquad f'(1) = 1$$

$$f'' = -\frac{1}{x^2} \qquad f''(1) = -1$$

Dunque:

$$T_1^2 f(x) = \log 3 \cancel{+1} + (x \cancel{-1}) - \frac{1}{2}(x-1)^2$$

$$= \log 3 + x - \frac{1}{2}(x-1)^2$$

Calcolare

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{T_1^2 f(x)}{\sin(x-1)} =$$

$$= \lim_{x \to 1^+} \frac{\log 3 + x - \frac{1}{2}(x-1)^2}{\sin(x-1)} =$$

cambio di variabili

$z = x-1$

$x \to 1^+ \Rightarrow z \to 0^+$

$$= \lim_{z \to 0^+} \frac{\log 3 + z + 1 - \frac{1}{2} z^2}{\sin z} =$$

Taylor

$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \dots$

$$= \lim_{z \to 0^+} \frac{\log 3 + z + 1 - \frac{1}{2} z^2}{z}$$

N ~ $\log 3 + z + 1$

D ~ z

$$= \lim_{z \to 0^+} \frac{\log 3 + 1 + z}{z} = +\infty$$

ES3:

$$\begin{cases} y' = e^y \cos x \\ y(0) = \log 4 \end{cases}$$

E' un'eq. diff. a variabili separabili

$$\frac{y'}{e^y} = \cos x$$

$$\int \frac{dy}{e^y} = \int \cos x \, dx$$

$$\underbrace{\int e^{-y} \, dy}_{= -e^{-y}} = \int \cos x \, dx = \sin x + c$$

$$-e^{-y} = \sin x + c$$

$$e^{-y} = -(\sin x + c)$$

$$-y = \log\left(-\left(\sin x + c\right)\right)$$

$$y(x) = -\log\left(-\sin x - c\right)$$

$$= \log \frac{1}{-\sin x - c}$$

$$= \log\left(-\frac{1}{\sin x + c}\right)$$

$$y(0) = \log\left(-\frac{1}{\sin x + c}\right)\Bigg|_{x=0} =$$

$$= \log\left(-\frac{1}{c}\right) = \log 4$$

$$\Updownarrow$$

$$-\frac{1}{c} = 4$$

$$-1 = 4c \qquad \boxed{c = -1/4}$$

$$y(x) = \log\left(-\frac{1}{\sin x - \frac{1}{4}}\right) =$$

$$= \log\left(-\frac{4}{4\sin x - 1}\right)$$

Testo + soluzioni

MATEMATICA 28 giugno 2023, 4 appello a.a. 2022-23

Tempo a disposizione: 1 ora e 30 minuti

---

1. Calcolare il limite

$$\lim_{x \to 0} \frac{2e^{-x}}{3e^{x}} + \frac{e^{x} - 1 - \sin x}{x^{2}}$$

---

2. Sia

$$f(x) = \frac{2e^{x}}{x+1}$$

Calcolare:

- il dominio di f;
- dire se f ammette asintoto obliquo a $+\infty$;
- calcolare la derivata prima di f e gli eventuali punti di massimo o di minimo;
- calcolare la derivata seconda. La funzione è convessa per $x > -1$?
- determinare l'insieme immagine $\mathrm{im} f$.

---

3. Determinare la soluzione $y(x)$ del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = xy^2 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

SECONDA PARTE:

4. Dare la definizione di punto di accumulazione di un insieme. Dare la definizione di $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, con $x_0 \in \mathbb{R}$ e darne un'interpretazione geometrica.

5. Enunciare e dimostrare il teorema di Rolle e darne un'interpretazione geometrica.

6. Dare la definizione di funzione integrabile secondo Riemann. Enunciare il primo teorema fondamentale del calcolo integrale.

1.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2e^{-\frac{1}{x}}}{3e^{x}} + \frac{e^{x}-1-\sin x}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x}-1-\sin x}{x^2} =$$

TAYLOR:

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

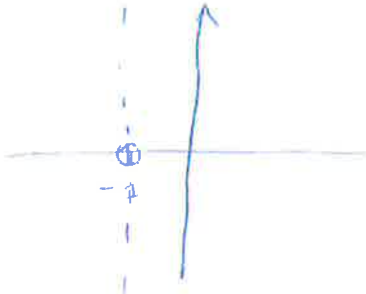
$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots - 1 - x + \frac{x^3}{3!} + \dots}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x^2}{2}}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

$$f(x) = \frac{2e^x}{x+1}$$

1. dom f

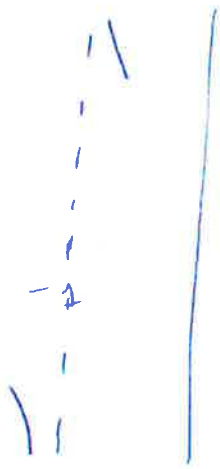
dom $f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq -1\} = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$



2. limiti:

- $\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{2e^x}{\underset{0^+}{x+1}} = +\infty$
- $\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{2e^x}{\underset{0^-}{x+1}} = -\infty$

$x = -1$ asintoto verticale



- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2e^x}{x+1} = \frac{\infty}{\infty} = +\infty$ prevalenza l'exp

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{2e^x}{x+1} = 0$ prevalenza l'ex

$\Rightarrow y = 0$ asintoto orizzontale sx vediamo l'asintoto obliquo a $+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2e^x}{x(x+1)} = +\infty$$

predomina l'exp al NUM

$\Longrightarrow$ NO ASINTOTO OBLIQUO a $+\infty$

3 Derivata prima e pti di MAX e MIN

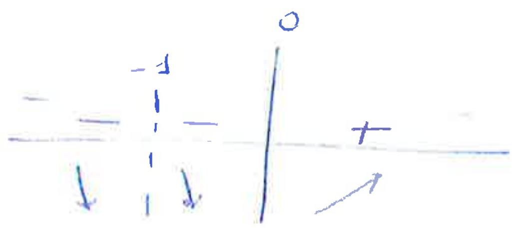
$$f(x) = \frac{2e^x}{x+1}$$

$$f'(x) = \frac{2e^x(x+1) - 2e^x}{(x+1)^2} = \frac{2xe^x + \cancel{2e^x} - \cancel{2e^x}}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{2xe^x}{(x+1)^2}$$

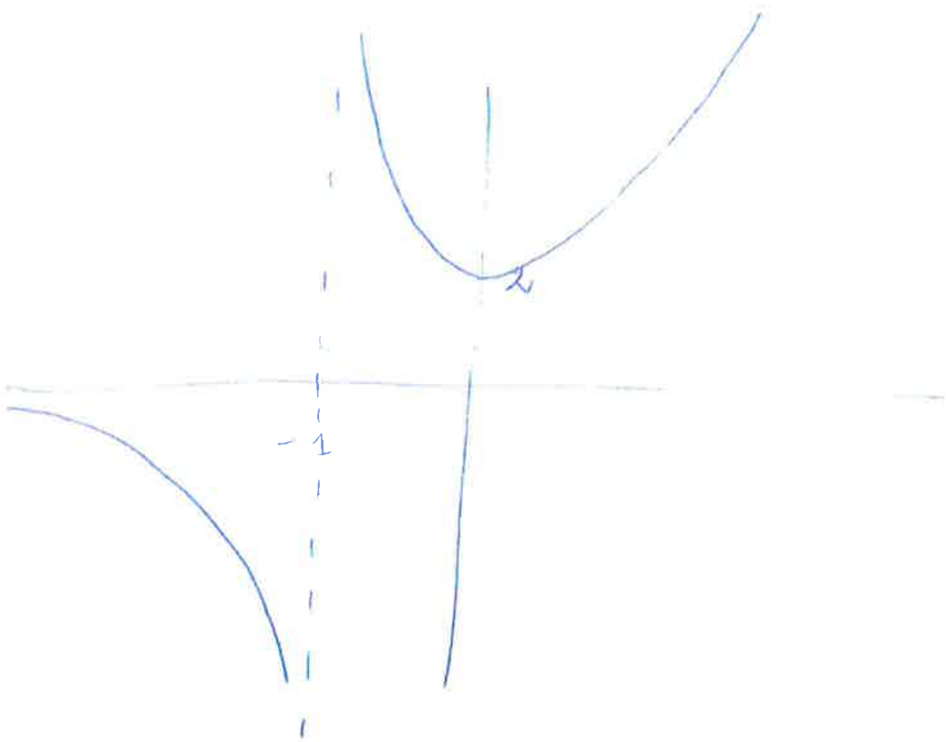
$$f'(x) \geq 0 \iff \frac{2x\,e^x}{(x+1)^2} \geq 0$$

$$\iff x \geq 0$$



$x=0$ pto di MIN (locale) perché $\lim_{x \to -1^-} f = -\infty$

$$f(0) = \left.\frac{2e^x}{x+1}\right|_{x=0} = \frac{2}{1} = 2$$



∄ pti di MAX locale e assoluto perché $\lim_{x \to +\infty} f = +\infty$

$\lim_{x \to -1^+} f = +\infty$

Derivata 2ª + concavità e convessità

$$f'(x) = \frac{2xe^x}{(x+1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{\left[2e^x + 2xe^x\right](x+1)^2 - 2xe^x \, 2(x+1)}{(x+1)^4} =$$

$$= \frac{2e^x(1+x)(1+x)^2 - 4xe^x(x+1)}{(x+1)^4} =$$

$$= \frac{2e^x(x+1)\left[(1+x)^2 - 2x\right]}{(x+1)^4} =$$

$$= \frac{2e^x(x+1)\left[1+x^2\cancel{+2x}\cancel{-2x}\right]}{(x+1)^4} \geq 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x+1 \geq 0$$

$$\Updownarrow$$

$$x \geq -1$$

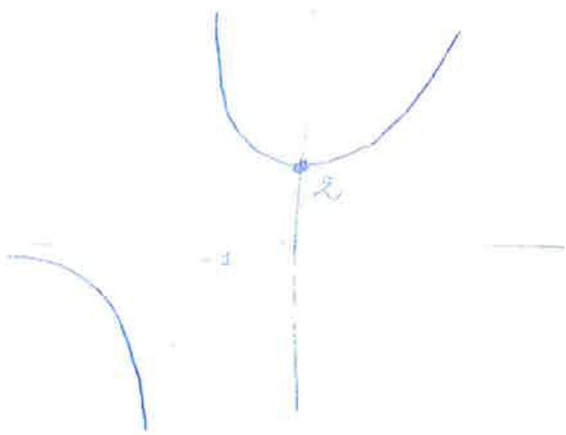
$$\Updownarrow \quad x=-1 \notin \operatorname{dom} f$$

$$x > -1$$

		-1	
f''	$-$		$+$
f	$\cap$		$\cup$

$\Rightarrow f$ è convessa per $x > -1$

Im f



Im f = (-∞, 0) ∪ [2, +∞)

5

$$\begin{cases} y' = x y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

eq a variabili separabili

$$\frac{y'}{y^2} = x$$

$$\int \frac{dy}{y^2} = \int x \, dx$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{1}{2} x^2 + c$$

$$\frac{1}{y} = -\frac{1}{2} x^2 - c$$

$$y = \frac{1}{-\frac{1}{2} x^2 - c}$$

calcolo c con la cond iniziali:

$$y(0) = 1 \iff 1 = \frac{1}{-c}$$

$$\iff -c = 1$$

$$\iff c = -1$$

La soluzione è:

$$y(x) = \frac{1}{-\frac{1}{2} x^2 + 1} = \frac{2}{2 - x^2}$$

MATEMATICA 8 settembre 2023, 5 appello a.a. 2022-23

Tempo a disposizione: 1 ora e 30 minuti

---

1. Data la funzione $f(x) = \frac{3x^2-2}{x+1}$ dire se essa ammette asintoto verticale in $x = -1$ e asintoto obliquo a $+\infty$ e, se esiste, calcolarlo.

---

2. Sia Sia $f(x)$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{|x|}, & x \neq 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0 \end{cases}$$

Studiare la continuità e la derivabilità di f nel suo dominio e eventualmente classificare, se esistono, i punti di discontinuità e di non derivabilità.

---

3. Calcolare l'integrale

$$\int_{-2}^{2} x\, e^{2x}\, dx.$$

SECONDA PARTE:

4. Dare la definizione di $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$, con $L \in \mathbb{R}$ e darne un'interpretazione geometrica.

5. Dare la definizione di punto di estremo relativo (massimo e minimo relativo). Una funzione discontinua puo' avere punti di estremo relativo? Motivare la risposta.
Dare la definizone di punto stazionario.
Chiarire il legame fra la nozione di estremo relativo e punto stazionario.

6. Dare la definizione di media integrale.
Enunciare e dimostrare il teorema della media e darne un'interpretazione geometrica.
Fornire un esempio in cui la media integrale di una funzione f non è assunta dalla funzione stessa.

Es 1:

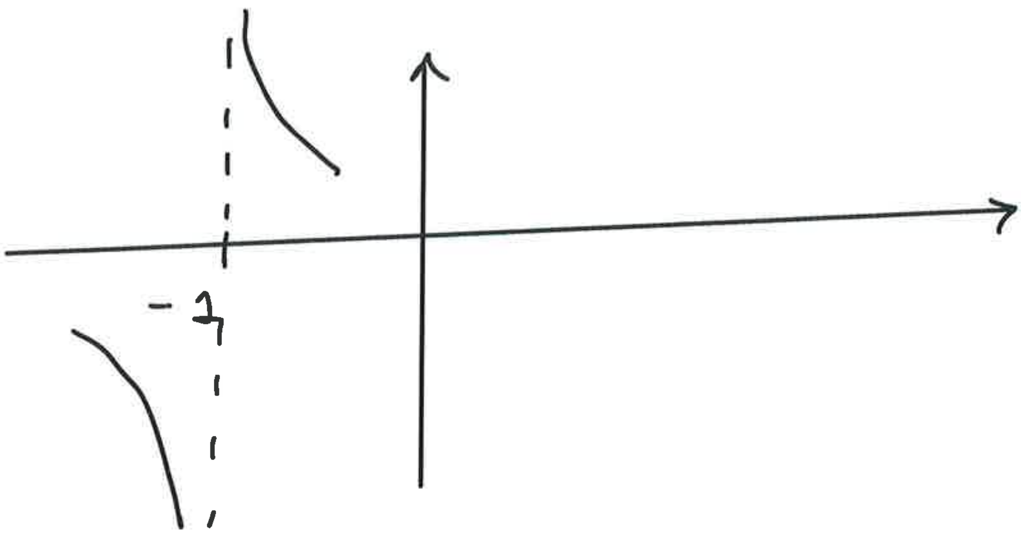
$$f(x) = \frac{3x^2 - 2}{x+1}$$

- Asintoto verticale in $x = -1$.

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{\overset{\to 1}{3x^2 - 2}}{\underset{\to 0^+}{x+1}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} \frac{\overset{\to 1}{3x^2 - 2}}{\underset{\to 0^-}{x+1}} = -\infty$$

$x = -1$ è asintoto verticale



Asintoto obliquo a $+\infty$

- $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-2}{x+1} = +\infty$$

- $$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-2}{x(x+1)} = 3 := m$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - mx = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2-2}{x+1} - 3x =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{3x^2}-2-\cancel{3x^2}-3x}{x+1} = -3 := q$$

$y = mx+q = 3x-3$ = Asintoto obliquo a $+\infty$.

ES 2:

$$f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{|x|} & x \neq 0 \\ \pi/2 & x = 0 \end{cases}$$

Continuità:

- $f(x)$ è continua $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- Studio la continuità in $x=0$.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \arctan \frac{1}{|x|} = \pi/2$$

$$\frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \arctan \frac{1}{|x|} = \pi/2$$

$$\frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} f(x) = \pi/2 = f(0) = \pi/2$$

$\Rightarrow$ f è continua anche in $x=0$

Derivabilità:

f è derivabile in $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
(perché composizione di fz derivabili).
Studio la derivabilità in $x=0$

$$f(x) = \begin{cases} \arctan \frac{1}{x} & x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0 \\ \arctan\left(-\frac{1}{x}\right) & x < 0 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = -\dfrac{1}{x^2+1} & x > 0 \\ \dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2} \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{x^2+1} & x < 0 \end{cases}$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} -\frac{1}{x^2+1} = -1$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^2+1} = 1$$

$x=0$ è pto angoloso.

ES 3:

$$\int_{-2}^{2} x e^{2x} \, dx = \text{p.p.}$$

$$f'(x) = e^{2x} \qquad f(x) = \frac{1}{2} e^{2x}$$

$$g(x) = x \qquad g'(x) = 1$$

$$= \frac{1}{2} e^{2x} \cdot x \Big|_{-2}^{2} - \int_{-2}^{2} \frac{1}{2} e^{2x} \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} e^{4} \cdot 2 - \frac{1}{2} e^{-4} (-2) - \frac{1}{4} e^{2x} \Big|_{-2}^{2}$$

$$= e^{4} + e^{-4} - \frac{1}{4} e^{4} + \frac{1}{4} e^{-4} =$$

$$= \frac{3}{4} e^{4} + \frac{5}{4} e^{-5} .$$