MATEMATICA 14 Gennaio 2022, PROVA INTERMEDIA

Tempo a disposizione 1 ora

---

1. Data la funzione
$$f(x) = \begin{cases} \left(\frac{e^{3x}-1}{x}\right)^a & \text{se } x > 0 \\ 9^{x+a^2} & \text{se } x \leq 0, \end{cases}$$
determina i valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ tali che f sia continua su $\mathbb{R}$.

---

2. Data la funzione $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}$, determinare
   - $domf$;
   - $domf'$ e verificare che f è strettamente crescente nel suo dominio;
   - $f'_+(0)$;
   - $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e stabilire se ammette aventuali asintoti obliqui a $+\infty$;
   - Imf.

---

3. Calcolare l'insieme delle primitive della funzione $f(x) = \frac{\arctan(x)}{x^2}$.

SECONDA PARTE:

4. Date f, g, funzioni infinitesime per $x \to x_0$, dare la definizione di $f = o(g)$ per $x \to x_0$. Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = (sinx)^\alpha$ è $o(g)$ per $x \to 0$, dove $g(x) = x^3$?

5. Rispondere, motivando la risposta, alle seguenti domande.
   - Dire se la seguente affermazione è vera o falsa: sia $f : domf \to \mathbb{R}$, $x_0 \in domf$. Allora f è continua in x_0 se e solo $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.
   - Una funzione continua in un punto del suo dominio è sempre derivabile in tale punto?
   - Un punto di massimo o minimo per una funzione è un punto stazionario?

6. Dare la definizione di primitiva di una funzione f. Enunciare e dimostrare il primo teorema fondamentale del calcolo. Sapresti indicare un insieme di funzioni che ammettono sempre una primitiva?
Fornire un esempio di una funzione non integrabile secondo Riemann, motivando.

---

14 gennaio 2022

MATEMATICA (BIOTECNOLOGIE): Prova intermedia a.a. 2021-22
(compito fatto in versione telematica)

RISULTATI

- Esercizio 1: L'unico punto che dà problemi è $x = 0$. Essendo $x = 0$ un punto d'accumulazione per il dominio della funzione studio la continuità usando il limite. Occorre che:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0).$$

Si ha $f(0) = 9^{x+a^2}|_{x=0} = 9^{a^2}$ e

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 9^{x+a^2} = 9^{a^2};$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{e^{3x} - 1}{x} \right)^a = \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{e^{3x} - 1}{3x} 3 \right)^a = 3^a.$$

Occorre che

$$9^{a^2} = 3^a \Leftrightarrow 3^{2a^2} = 3^a \Leftrightarrow 2a^2 = a \Leftrightarrow a(2a-1) = 0 \Leftrightarrow a = 0, a = 1/2.$$

Dunque, per $a = 0$ e $a = 1/2$ la funzione f risulta continua su tutto $\mathbb{R}$.

- Esercizio 2:

  1 $dom f = \{x \in \mathbb{R} \ : x \geq 0\}$;

  2 Con le regole di calcolo delle derivate si ha:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(\sqrt{x}+1) - (\sqrt{x}-1)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2},$$

  da cui $dom f' = \{x \in \mathbb{R} \ : x > 0\}$. Inoltre, per $x > 0$ si ha $f'(x) > 0$, dunque f è strettamente crescente.

3 Si ha con la definizione di derivata destra:

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{\sqrt{h}-1}{\sqrt{h}+1}+1}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{2\sqrt{h}}{h(\sqrt{h}+1)} = \lim_{h\to 0^+} \frac{2}{\sqrt{h}(\sqrt{h}+1)} = +\infty$$

(oppure, poichè esiste il $\lim_{x\to 0^+} f'(x)$, si può anche trovare la derivata destra facendo: $f'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = +\infty$).

4

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim x \to +\infty \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} = 1,$$

Dunque la retta $y = 1$ è asintoto orizzontale destro a $+\infty$. Non ci sono asintoti obliqui.

5 Osservo che $f(0) = -1$, allora $Imf = [-1, 1)$.

- Esercizio 3: L'insieme delle primitive è dato da (integrando per parti, scegliendo $f'(x) = \frac{1}{x^2}$ dacui $f(x) = -\frac{1}{x}$ e $g(x) = \arctan x$ da cui $g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$)

$$\int \frac{\arctan x}{x^2} dx = (\text{per parti}) = -\frac{1}{x} \arctan x + \int \frac{1}{x(1+x^2)} dx.$$

Uso il metodo dei fratti semplici per determinare l'integrale a secondo membro:

$$\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{(A+B)x^2+Cx+A}{x(x^2+1)}$$

da cui $A = 1, B = -1, C = 0$. Dunque

$$\int \frac{1}{x(1+x^2)} dx = \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{x}{x^2+1} dx = \log|x| - \frac{1}{2}\log|x^2+1| + c.$$

Dunque:

$$\int \frac{\arctan x}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \arctan x + \log|x| - \frac{1}{2}\log|x^2+1| + c.$$

Domande di teoria

5 Occorre trovare α tale che $\lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)^\alpha}{x^3} = 0$. Usando Taylor si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{(\sin x)^\alpha}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^\alpha}{x^3} = \lim_{x\to 0} x^{\alpha-3} = 0 \Leftrightarrow \alpha > 3.$$

6 Falso Falso Falso

MATEMATICA 7 febbraio 2022, 1 appello a.a. 2021-22

Tempo a disposizione 1 ora

---

1. Determinare per quali valori di α il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+\log(1+x)}-\sqrt{e^x}}{x^{2\alpha}(e^x-\cos x)}$$

NON sia finito.

---

2. Data la funzione $f(x) = \log x - \log(x^2+2)$, determinare
   - *domf*;
   - $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ e dire se ammette asintoti orizzontali destri.
   - $\lim_{x\to 0^+} f(x)$;
   - Calcolare la derivata prima $f'(x)$ e dire se il punto $x=1$ è stazionario per f.
   - Calcolare la retta tangente al grafico di f nel punto di ascissa $x=1$.

---

3. Calcolare l'insieme delle primitive della funzione $f(x) = \frac{1}{1+e^{3x}}$.

SECONDA PARTE:

4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dare la definizione di $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ e darne un'interpretazione geometrica. Calcolare, se esiste, $\sup f$.

5. Rispondere, motivando la risposta, alle seguenti domande.
   - Dire se la seguente affermazione è vera o falsa: sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, ($a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$) continua in [a,b]. Allora f è limitata in $[a,b]$.
   - Dire se la seguente affermazione è vera o falsa: sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, ($a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$) continua in [a,b] tale che $f(a)f(b) < 0$. Allora esiste uno e un solo $c \in]a,b[$ tale che $f(c) = 0$.
   - Dire se la seguente affermazione è vera o falsa: sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, ($a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$) continua in [a,b] e derivabile in]a,b[. Allora esiste $c \in]a,b[$ tale che $f'(c) = 0$.

6. Dare la definizione di media integrale. Enunciare e dimostrare il teorema della media e darne un'interpretazione geometrica.

---

7 febbraio 2022

MATEMATICA (BIOTECNOLOGIE): 1 appello a.a. 2021-22 (compito fatto in versione telematica)

RISULTATI

- Esercizio 1: Razionalizzo e si ha

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1+\log(1+x)}-\sqrt{e^x}}{x^{2\alpha}(e^x-\cos x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1+\log(1+x)-e^x}{(\sqrt{1+\log(1+x)}+\sqrt{e^x})x^{2\alpha}(e^x-\cos x)} =$$
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1+\log(1+x)-e^x}{2x^{2\alpha}(e^x-\cos x)}.$$

Uso gli sviluppi di Taylor per il numeratore (N) e il denominatore (D): il numeratore diventa

$$N = 1+\log(1+x)-e^x = 1+(x-\frac{x^2}{2}+o(x^2))-(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)) = -x^2+o(x^2),$$

mentre il denominatore

$$D = 2x^{2\alpha}(e^x-\cos x) = 2x^{2\alpha}\left((1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2))-(1-\frac{x^2}{2}+o(x^2))\right) =$$
$$= 2x^{2\alpha}(x+x^2+o(x^2)) = 2x^{2\alpha}(x+o(x)) = 2x^{2\alpha+1}+o(x).$$

Da cui

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{N}{D} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2}{2x^{2\alpha+1}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{2x^{2\alpha-1}}$$

esiste NON finito se e solo se $2\alpha-1>0$ ossia $\alpha>\frac{1}{2}$.

- Esercizio 2:

  1 $domf = \{x \in \mathbb{R} \ : x > 0\}$;

  2 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \log\frac{x}{x^2+2} = -\infty$. Non esitono asintoti orizzontali a $+\infty$.

  3 $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \log\frac{x}{x^2+2} = -\infty$

4 $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2+2}$, $\forall x > 0$. In $x = 1$ si ha $f'(1) = 1-2/3 = 1/3 \neq 0$, dunque $x = 1$ non è un punto stazionario.

5 l'equazione della retta tangente al grafico di f in un punto x_0 è data da

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Sostituendo, $x_0 = 1$, $f(1) = \log 1 - \log 3 = -\log 3$ e $f'(1) = 1/3$, si ha

$$y = 1/3(x-1) - \log 3.$$

- Esercizio 3: Integro usando la sostituzione: $e^{3x} = t$ da cui differenziando ambo i membri si ha

$$3e^{3x}dx = dt, \qquad dx = \frac{1}{3e^{3x}}dt = \frac{1}{3t}dt.$$

L'integrale diventa:

$$\int \frac{1}{1+e^{3x}}dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{(1+t)t}dt.$$

Uso il metodo dei fratti semplici per determinare l'integrale a secondo membro:

$$\frac{1}{(1+t)t} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t} = \frac{At + B + Bt}{t(t+1)}$$

da cui $A = -1, B = 1$. Dunque

$$\frac{1}{3}\int \frac{1}{(1+t)t}dt = \frac{1}{3}\left(\int \frac{1}{t}dt - \int \frac{1}{t+1}dt\right) = \frac{1}{3}(\log|t| - \log|t+1|) + c$$
$$= \frac{1}{3}(\log e^{3x} - \log(e^{3x}+1)) + c = \frac{1}{3}(3x - \log(e^{3x}+1)) + c.$$

Domande di teoria

5 $\sup f = +\infty$.

6 Vero (conseguenza del teorema di Weiestrass) Falso (in generale il punto può non essere unico) Falso (esempio $y = x$ in $[0,1]$).

MATEMATICA 23 febbraio 2022, 2 appello a.a. 2021-22

Tempo a disposizione 1 ora

---

1. Calcolare il limite
$$\lim_{x\to 0}(\sin(x^2))^{\frac{1}{\log(x^2)}}.$$

---

2. Data la funzione
$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } |x| \le 1 \\ x^2-1 & \text{se } |x| > 1, \end{cases}$$
determinare
   - *domf*;
   - segno di f;
   - Determinare se f è continua nel suo dominio e classificare gli eventuali punti di discontinuità;
   - Determinare l'insieme in cui f è derivabile e classificare gli eventuali punti di non derivabilità;
   - Calcolare l'insieme Imf
   - Dire se la funzione ristretta all'intervallo $[-3,3]$ è integrabile secondo Riemann, motivando la risposta.

---

3. Determinare la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' + y\sin x = \sin x \\ y(\frac{\pi}{2}) = 5. \end{cases}$$

SECONDA PARTE:

4. Sia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Dare la definizione di $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ e darne un'interpretazione geometrica. Dire se l'immagine di f è limitata inferiormente.

5. Enunciare e dimostrare il Teorema di Fermat.
Data una funzione $f:]a,b[\to\mathbb{R}$ derivabile in $]a,b[$ dire se la seguente implicazione è vera o falsa motivando la risposta:
$$x_0 \in]a,b[\text{ punto stazionario di } f \Rightarrow x_0 \in]a,b[\text{ punto di estremo per } f$$

6. Dare la definizione di somma inferiore e superiore. Enunciare il teorema che dà una condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità secondo Riemann e darne un'interpretazione geometrica. Dare un esempio esplicito di una funzione integrabile secondo Riemann sull'intervallo $[-2,2]$ che abbia integrale uguale a zero, motivando la risposta.

---

23 febbraio 2022

MATEMATICA (BIOTECNOLOGIE): 2 appello a.a. 2021-22 (compito fatto in versione telematica)

RISULTATI

- Esercizio 1: Passo alla forma esponenziale e uso Taylor ricordando che

$$\sin t = t + o(t) \text{ per } t \to 0$$

$$\lim_{x\to 0}(\sin(x^2))^{\frac{1}{\log(x^2)}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{\log(x^2)}\log(\sin x^2)} =$$

$$\lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{2\log(x)}\log(x^2)} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{2\log(x)}2\log(x)} = e$$

- Esercizio 2:

  1 $domf = \mathbb{R}$;

  2 $f(x) \geq 0$ nel suo dominio.

  3 La funzione è una funzione definita a pezzi: è la retta $y = x + 1$ nell'intervallo $[-1, 1]$ e i due archi della parabola $y = x^2 - 1$ per $x < -1$ e $x > 1$. Gli unici punti del dominio che potrebbero dare problemi per la continuità sono i punti di raccordo $x = \pm 1$. Disegnando il grafico di f si vede immediatamente che $x = 1$ è un punto di discontinuità di tipo salto (oppure con i limiti dx e sx essendo un punto d'accumulazione del dominio:

$$f(1) = x + 1|_{x=1} = 2,$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} x + 1 = 2, \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} x^2 - 1 = 0,$$

  i limiti sono diversi, dunque non esiste il limite, ma sono entrambi finiti, dunque è un punto di salto).
  Invece, $x = -1$ è un punto di continuità della funzione (si può

anche determinare, essendo punto d'accumulazione del dominio, facendo i limiti dx e sx: si ha $f(-1) = x^2 - 1|_{x=-1} = 0$ e

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^-} x^2 - 1 = 0 = \lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} x + 1,$$

dunque,

$$\lim_{x \to -1} f(x) = f(-1)$$

e quindi f è continua in $x = -1$).
L'insieme di continuità è dunque $I = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

4 In $x = 1$ la funzione non è continua, dunque non è derivabile in tale punto.
Il punto $x = -1$ è un punto di continuià per f in cui esistono le derivate destra e sinistra e sono entrambe finite, dunque è un punto angoloso (ne basta una finita). Infatti

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| < 1 \\ 2x & \text{se } |x| > 1. \end{cases}$$

Si ha

$$f'_-(-1) = \lim_{x \to -1^-} f'(x) = \lim_{x \to -1^-} 2x = -2$$

e

$$f'_+(-1) = \lim_{x \to -1^+} f'(x) = \lim_{x \to -1^-} 1 = 1.$$

L'insieme di derivabilità per f è $J = \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

5 $Imf = [0, +\infty)$.

6 La funzione è continua a tratti, dunque è integrabile secondo Riemann nell'intervallo $[-3, 3]$.

- Esercizio 3: L'equazione differenziale è del tipo

$$y' + a(x)y = b(x)$$

ossia è una equazione differenziale lineare del primo ordine a coefficienti continui, la cui soluzione generale è data da

$$y(x) = e^{-A(x)} \left(c + \int e^{A(x)} b(x) dx \right)$$

dove $A(x) = \int a(x)dx$. In questo caso:

$$A(x) = \int \sin x dx = -\cos x + c'$$

da cui

$$y(x) = e^{\cos x}\left(c + \int e^{-\cos x} \sin x \, dx\right) = e^{\cos x}\left(c + e^{-\cos x}\right).$$

La soluzione del problema di Cauchy si ottiene determinando il valore della costante c in modo che sia soddisfatta anche la condizione iniziale $y(\frac{\pi}{2}) = 5$:

$$y(\frac{\pi}{2}) = 5 \Leftrightarrow 5 = e^0(c + e^0) \Leftrightarrow 5 = c + 1 \Leftrightarrow c = 4.$$

La soluzione del problema di Cauchy è data quindi da

$$y(x) = 4e^{\cos x} + 1.$$

Domande di teoria

4 Si ha $\inf f = -\infty$, dunque l'immagine di f non è limitata inferiormente.

5 Falso, ad esempio $y = x^3$ ha in $x = 0$ un punto stazionario che non è di estremo relativo essendo un punto di flesso.

6 Basta considerare una funzione continua sull'intervallo che sia dispari. Per esempio $f(x) = x$.

MATEMATICA 13 aprile 2022, 3 appello a.a. 2021-22

Tempo a disposizione 1 ora

---

1. Calcolare il limite
$$\lim_{x \to +\infty} (x)^{-\frac{1}{\log(1+x)}}.$$

---

2. Determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ la funzione:
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{\sin x}{x^k} & \text{se } x > 0, \end{cases}$$
è continua su tutto $\mathbb{R}$. Per gli altri valori di k classificare il punto $x_0 = 0$.

---

3. Determinare la soluzione $y(x)$ del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = xe^{x^2-1} \\ y(1) = 1. \end{cases}$$
e scrivere il polinomio di Taylor di grado 2 centrato in $x = 1$ della soluzione $y(x)$.

SECONDA PARTE:

4. Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dare la definizione di $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ (caso $x_0, L \in \mathbb{R}$) e darne un'interpretazione geometrica. Enunciare e dimostrare il teorema dell'unicità del limite.
5. Enunciare e dimostrare il Teorema di Lagrange e darne un'interpretazione geometrica.
6. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione due volte derivabile. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false motivando la risposta:
   - $f''(x) \geq 0 \ \forall x \in (a, b) \quad \Rightarrow \quad f$ è convessa in $[a, b]$.
   - $x_0 \in (a, b) \ : \ f''(x_0) = 0 \quad \Rightarrow x_0$ è punto di flesso.
   - f é continua in $[a, b]$.
   - Sia $A(x) = \int_a^x f(t)\, dt$ la funzione integrale di f. Allora A è una primitiva di f.

---

13 aprile 2022

MATEMATICA (BIOTECNOLOGIE): 3 appello a.a. 2021-22 (compito fatto in versione telematica)

RISULTATI

- Esercizio 1: Passo alla forma esponenziale:

$$\lim_{x\to+\infty} x^{-\frac{1}{\log(1+x)}} = \lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{\log x}{\log(1+x)}} = e^L,$$

dove $L = \lim_{x\to+\infty} -\frac{\log x}{\log(1+x)}$.
Studio il limite dell'esponente: e' una forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$. Risolvo l'indeterminazione usando il teorema di de l'Hopital:

$$L = \lim_{x\to+\infty} -\frac{\log x}{\log(1+x)} =$$
$$\lim_{x\to+\infty} -\frac{1/x}{1/(1+x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-(x+1)}{x} = -1.$$

Da cui si ottiene che

$$\lim_{x\to+\infty} x^{-\frac{1}{\log(1+x)}} = \lim_{x\to+\infty} e^{-\frac{\log x}{\log(1+x)}} = e^L = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

- Esercizio 2: L'unico punto che può dare problemi per la continuità è il punto $x_0 = 0$ che risulta un punto d'accumulazione per il dominio della funzione che è tutto $\mathbb{R}$. Studio la continuità con il limite.

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = 0 = f(0) = \lim_{x\to0^+} \frac{\sin x}{x^k} = \lim_{x\to0^+} \frac{x}{x^k} = \lim_{x\to0^+} x^{1-k} = 0 \quad \text{se e solo se} \quad k < 1.$$

Se $k = 1$, si ha

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

dunque $x_0 = 0$ è punto di salto.
Se $k > 1$, si ha

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x^k} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x^k} = \lim_{x\to 0^+} x^{1-k} = +\infty$$

dunque $x_0 = 0$ è punto di infinito (ricorda: per avere un punto di infinito basta che almeno uno fra il limite dx o sx sia finito).
Conclusione:

- per $k < 1$, si ha $f \in C^0(\mathbb{R})$;
- per $k = 1$, si ha $f \in C^0(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ e $x_0 = 0$ punto di salto;
- per $k > 1$, si ha $f \in C^0(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ e $x_0 = 0$ punto di infinito.

- Esercizio 3: L'equazione differenziale è a variabili separabili. Per ottenere la soluzione $y(x)$ basta integrare rispetto a x ambo i membri. La soluzione generale dell'equazione differenziale è data da :

$$y(x) = \int xe^{x^2-1}\, dx = \frac{1}{2}e^{x^2-1} + c$$

con c costante arbitraria. Determino c usando la condizione iniziale del problema di Cauchy:

$$y(1) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}e^0 + c = 1 \Leftrightarrow c = \frac{1}{2},$$

da cui

$$y(x) = \frac{1}{2}e^{x^2-1} + \frac{1}{2}.$$

Calcolo il polinomio di Taylor di grado 2 centrato in $x_0 = 1$. Ricordiamo che per definizione il polinomio di Taylor $p(x)$ è dato da

$$p(x) = y(1) + y'(1)(x-1) + \frac{y''(1)}{2}(x-1)^2.$$

Abbiamo $y(1) = 1$,

$$y'(x) = xe^{x^2-1} \quad\Rightarrow\quad y'(1) = 1e^0 = 1\,,$$

$$y''(x) = e^{x^2-1} + xe^{x^2-1}(2x) \quad\Rightarrow\quad y''(1) = e^0 + 1e^0 2 = 1 + 2 = 3$$

da cui

$$p(x) = y(1) + y'(1)(x-1) + \frac{y''(1)}{2}(x-1)^2 = 1 + (x-1) + \frac{3}{2}(x-1)^2 = x + \frac{3}{2}(x-1)^2.$$

Domande di teoria

6 VERO;
FALSO (basta considerare $f(x) = x^4$, $x_0 = 0$ e' un punto in cui si annulla la derivata seconda ma non e' di flesso, e' di minimo assoluto);
VERO (f e' derivabile due volte, dunque e' derivabile e dunque continua);
VERO (e' il primo teorema fondamentale del calcolo).

MATEMATICA 27 giugno 2022, 4 appello a.a. 2021-22

Tempo a disposizione 1 ora

---

1. Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Calcolare al variare di α il limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - \frac{1}{2}\sin(2x)}{(e^x-1)^\alpha}.$$

---

2. Data la funzione $f(x) = \sqrt[3]{\sin^2 x}$ determinare
   - *domf*
   - dire se essa è continua nel suo dominio
   - studiare la derivabilità di f nell'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$
   - classificare il punto $x = 0$ come punto di non derivabilità

---

3. Calcolare

$$\int \frac{e^{2x}+2}{e^{2x}+4} dx$$

SECONDA PARTE:

4. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme. Dare la definizione di estremo superiore di A e di massimo di A. Fornire un esempio di insieme che ammette estremo superiore ma non massimo.
   Data una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ strettamente crescente dire se e' vero o falso che l'insieme immagine imf ha estremo superiore uguale a $+\infty$, motivando la risposta.

5. Spiegare le relazioni esistenti fra il concetto di continuità e derivabilità di una funzione in un punto, fornendo teoremi o controesempi che spieghino le relazioni.
   Motivando la risposta dire se e' vera o falsa la seguente implicazione:
   Data $f : I \subseteq R \to \mathbb{R}$ due volte derivabile in I, tale che f' è una funzione crescente. Allora f è convessa.

6. Enunciare e dimostrare il primo teorema fondamentale del calcolo integrale.

---

27 giugno 2022

MATEMATICA (BIOTECNOLOGIE): 4 appello a.a. 2021-22 (compito fatto in versione telematica)

RISULTATI

- Esercizio 1: Usiamo le formule della trigonometria e gli sviluppi di Taylor:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x-\frac{1}{2}\sin(2x)}{(e^x-1)^\alpha}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x-\frac{1}{2}2\sin x\cos x}{(e^x-1)^\alpha}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x(1-\cos x)}{(e^x-1)^\alpha}=$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x(1-1+\frac{1}{2}x^2)}{x^\alpha}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1/2x^3}{x^\alpha}=\begin{cases}+\infty & \text{se } \alpha>3\\ \frac{1}{2} & \text{se } \alpha=3,\\ 0 & \text{se } \alpha<3.\end{cases}$$

- Esercizio 2: Sia $f(x)=\sqrt[3]{\sin^2 x}=(\sin^2 x)^{\frac{1}{3}}$. Allora:
  - $dom f=\mathbb{R}$;
  - f è continua del suo dominio.
  - Con le regole di calcolo, per ogni $x\neq k\pi$, $(k\in\mathbb{N})$ si ha:

    $$f'(x)=\frac{1}{3}(\sin^2 x)^{\frac{1}{3}-1}2\sin x\cos x=\frac{2\sin x\cos x}{3\sqrt[3]{\sin^4 x}}=\frac{2\sin x\cos x}{3\sin x\sqrt[3]{\sin x}}=\frac{2\cos x}{3\sqrt[3]{\sin x}}$$

    Per $x=0$ calcolo il limite del rapporto incrementale e uso Taylor:

    $$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{\sin^2 x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^{\frac{2}{3}}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}.$$

    Allora

    $$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}=+\infty$$

    e

    $$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x^{\frac{1}{3}}}=-\infty$$

dunque $x = 0$ è un punto di cuspide. Dunque $domf'|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

- Esercizio 3: Sostituisco $e^{2x} = t$. Differenzando ambo i membri si ottiene

$$2e^{2x}dx = dt \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{dt}{2t},$$

da cui

$$I = \int \frac{e^{2x}+2}{e^{2x}+4}dx = \int \frac{t+2}{(t+4)}\frac{dt}{2t} = \frac{1}{2}\int \frac{t+2}{t(t+4)}dt.$$

Uso il metodo dei fratti semplici:

$$\frac{t+2}{t(t+4)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t+4} = \frac{(A+B)t+4A}{t(t+4)} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} A+B=1 \\ 4A=2 \end{cases}$$

da cui $A = B = 1/2$. Si ha quindi

$$I = \frac{1}{2}\int \frac{t+2}{t(t+4)}dt = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{t+4}dt\right) = \frac{1}{4}(\log t + \log(t+4) + c)$$
$$= \frac{1}{4}\left(\log e^{2x} + \log(e^{2x}+4) + c\right) = \frac{1}{4}\left(2x + \log(e^{2x}+4) + c\right)$$

Domande di teoria

4 $A = [-1, 3)$ è un insieme che ha sup m non ha max. L'affermazione è falsa: basta considerare $f(x) = \arctan x$ che è una funzione strettamente crescente su $\mathbb{R}$ ma tale che $imf = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, dunque $\sup(imf) = \frac{\pi}{2} < +\infty$

5 Se f è derivabile in x_0, allora f è continua in x_0, ma non vale il viceversa. Basta considerare $f(x) = |x|$ che è continua in $x = 0$ ma non è derivabile in $x = 0$.
L'affermazione è VERA: infatti

$$f' \text{ è crescente} \quad \Leftrightarrow \quad f'' \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad f \quad \text{è convessa.}$$

(vedi i teoremi)

MATEMATICA 9 settembre 2022, 5 appello a.a. 2021-22

Tempo a disposizione 1 ora

---

1. Calcolare il limite
$$\lim_{x \to +\infty} (x + 3^x)^{\frac{1}{x}}.$$

---

2. Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Data la funzione
$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} + 2 & \text{se } x > 0 \\ x^3 + ax + b & \text{se } x \leq 0, \end{cases}$$
determinare per quali valori di a e b il teorema di Lagrange è applicabile nell'intervallo $[-1, 1]$.

---

3. Determinare la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' + 2xy = -x \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

SECONDA PARTE:

4. Dare la definizione di funzione continua in un punto x_0. Classificare i punti di non continuità.
5. Data una funzione $f : I \to \mathbb{R}$, con $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo reale, dire che cosa significa che f è crescente, strettamente crescente, decrescente, strettamente decrescente in I. Per una funzione nelle condizioni precedenti, motivando la risposta, dire se la seguente implicazione è vera o falsa:
$$f \quad \text{derivabile in } I \text{ e } f'(x) > 0 \quad \forall x \in I \quad \Rightarrow \quad f \text{ strettamente crescente in } I$$
Commentare infine la validità (o meno) dell'implicazione inversa.
6. Dare la definizione di primitiva di una funzione. Enunciare e dimostrare il secondo teorema fondamentale del calcolo integrale.

---

9 settembre 2022

MATEMATICA (BIOTECNOLOGIE): 5 appello a.a. 2021-22 (compito fatto in versione telematica)

RISULTATI

- Esercizio 1: E' una forma indeterminata del tipo ∞^0. Passiamo alla forma esponenziale:

$$\lim_{x\to+\infty}(x+3^x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}\log(x+3^x)} = e^L$$

Studiamo l'esponente:

$$L = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\log(x+3^x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\log\left(3^x(\frac{x}{3^x}+1)\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\left(\log 3^x + \log(\frac{x}{3^x}+1)\right) =$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}x\log 3 + \frac{1}{x}\log(\frac{x}{3^x}+1) = \log 3$$

Il valore del limite di partenza è quindi $e^L = e^{\log 3} = 3$.

- Esercizio 2: Occorre che $f \in C([-1,1])$ e f derivabile in $(-1,1)$. Studiamo la continuità in $[-1,1]$. L'unico punto che potrebbe creare problemi è $x=0$ (che è un punto d'accumulazione per l'insieme $[-1,1]$). Essendo un punto di accumulazione di $[-1,1]$, in tale punto possiamo studiare la continuità usando il limite. Calcolo:

$$f(0) = (x^3+ax+b)|_{x=0} = b = \lim_{x\to0^-} x^3+ax+b$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} e^{-x}+2 = 3.$$

Dunque, f è continua in $x=0$ se e soltanto se

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^-} x^3+ax+b = f(0) \quad \Leftrightarrow \quad b=3.$$

Per la derivabilità nell'intervallo $(-1, 1)$, ancora l'unico punto che potrebbe dare problemi è $x = 0$. Possiamo ragionare in due modi diversi.
Primo modo: calcolo

$$f'(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{se } x > 0 \\ 3x^2 + a & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Da cui,

$$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0^+} -e^{-x} = -1 = f'_+(0), \quad \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0^-} 3x^2+a = a = f'_-(0)$$

e imponenedo che le due derivate destra e sinistra siano uguali otteniamo che $a = -1$.
Secondo modo: calcolo direttamente la derivata in $x = 0$ come limite del rapporto incrementale. Osservo che $f(0) = b = 3$

$$\lim_{x\ to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x\ to 0} \frac{f(x) - 3}{x}. \tag{1}$$

Distinguiamo i due casi:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - 3}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-x} + 2 - 3}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-x} - 1}{x} = -1 = f'_+(0)$$

e

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - 3)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x^3 + ax + 3 - 3}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x(x^2 + a)}{x} = a = f'_-(0)$$

Dunque

$$\exists \quad \lim_{x\ to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \quad \Leftrightarrow \quad a = -1.$$

Dunque il teorema di Lagrange è applicabile in $[-1, 1]$ se e solo se $a = -1, b = 3$.

- Esercizio 3: L'equazione differenziale è un'equazione del primo ordine lineare a coefficienti continui. La soluzione si ottiene dalla seguente formula

$$y(t) = e^{-A(x)} \left(c + \int e^{A(x)} b(x) d\,x \right)$$

dove $A(x) = \int a(x)dx = \int 2xdx = x^2$, $b(x) = -x$ e $c \in \mathbb{R}$. Si ha

$$y(x) = e^{-x^2}\left(c + \int e^{x^2}(-x)dx\right) = e^{-x^2}\left(c - \frac{1}{2}e^{x^2}\right) = ce^{-x^2} - \frac{1}{2}.$$

Calcolo c con la condizione iniziale del problema di Cauchy:

$$y(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c - \frac{1}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad c = \frac{1}{2}.$$

Da cui,

$$y(x) = \frac{1}{2}e^{-x^2} - \frac{1}{2}.$$

Domande di teoria

5 L'implicazione è vera (vedi teorema di monotonia). L'implicazione inversa è falsa: basta considerare $f(x) = x^3$, funzione strettamente crescente, ma $f'(x) \geq 0$ (in $x = 0$, si ha $f'(0) = 0$) e non $f'(x) > 0$.

MATEMATICA 19 dicembre 2022, 6 appello a.a. 2021-22

Tempo a disposizione 1 ora

---

1. Calcolare il limite
$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\log(1+3x^2)}.$$

---

2. Si consideri la funzione $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in [-1,1] \setminus \{0\}, \\ 4 & \text{se } x = 0. \end{cases}$

   Calcolare il dominio di f. Dire se la funzione ammette massimo e minimo assoluti oppure se ammette estremo superiore o inferiore e eventualmente calcolarli. Ammette anche dei punti di massimo relativo? Determinare poi l'insieme immagine.

---

3. Calcolare l'integrale $I = \int_1^2 \frac{x}{x^2+1}\, dx$.

SECONDA PARTE:

4. Dare la definizione di funzione derivabile in un punto. Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $y = e^{3x+2}$ nel punto di ascissa $x_0 = 0$.
5. Enunciare e dimostrare il teorema di Fermat.

   I punti di max o minimo di una funzione sono sempre stazionari? Motivare la risposta.
6. Dare la definizione di primitiva di una funzione. Enunciare e dimostrare il secondo teorema fondamentale del calcolo integrale.

SVOLGIMENTO ESERCIZI

1.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{\log(1+3x^2)} = \text{F.I} \left(\frac{0}{0}\right) =$$

Uso gli sviluppi di Taylor:

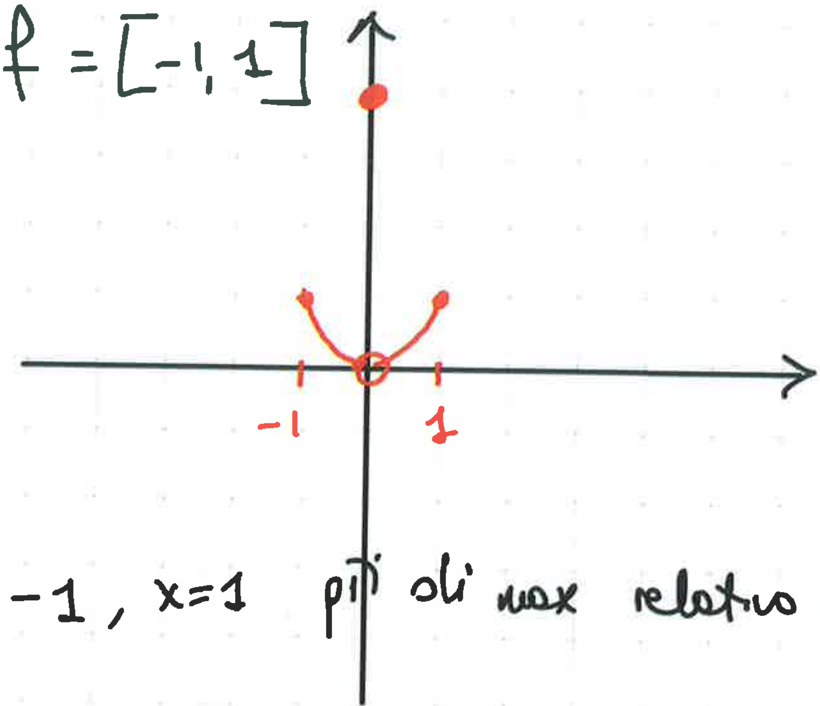
- $\log(1+z) \sim z$ per $z \to 0$
- $\cos z \sim 1 - \frac{z^2}{2!}$ per $z \to 0$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{1} - \frac{x^2}{2} - \cancel{1}}{3x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{\cancel{x^2}}{2}}{3\cancel{x^2}} = -\frac{1}{6}$$

2. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in [-1,1] \setminus \{0\} \\ 4 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

• dom $f = [-1, 1]$



• $x = -1$, $x = 1$ pti di max relativo per f

• $\exists \max\limits_{[-1,1]} f = 4 = M$ assunto in $x_0 = 0$

Dunque:

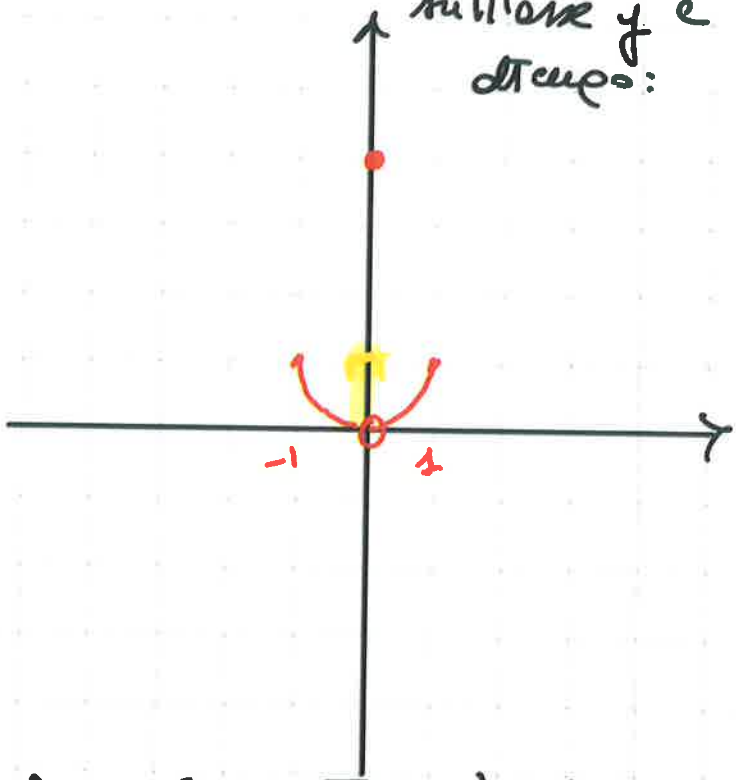
$x_0 = 0$ pto di MAX assoluto e $f(0) = 4 = M =$ valore massimo di f

(in questo caso: $\sup\limits_{[-1,1]} f = \max\limits_{[-1,1]} f$)

• $\nexists \min\limits_{[-1,1]} f$, ma $\exists \inf\limits_{[-1,1]} f = 0$

• $\nexists$ neppure min relativi.

Calcolo $\operatorname{Im} f$ = proietto il grafico sull'asse y e ottengo:



$$\operatorname{Im} f = (0, 1] \cup \{4\}$$

3 $$\int_1^2 \frac{x}{x^2+1}\,dx$$

$$\int_1^2 \frac{x}{x^2+1}\,dx \underset{\text{è un integrale immediato}}{=} \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{2x}{x^2+1}\,dx =$$

$$= \log|x^2+1|\Big|_1^2 = \log 5 - \log 2 = \log\frac{5}{2}$$

PARTE DUE: domande di Teoria

1. Calcolo l'eq. della retta tang. al grafico di $f(x) = e^{3x+2}$ in $x_0 = 0$

Eq. retta tang. in $(x_0, f(x_0))$:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$f(x) = e^{3x+2} \implies f(x_0) = f(0) = e^2$$

$$f'(x) = 3e^{3x+2} \implies f'(x_0) = f'(0) = 3e^2$$

La retta tang. ha equazione

$$y - e^2 = 3e^2 x$$

$$y = 3e^2 x + e^2 = e^2(3x+1)$$

2. NO i pti di MAX e MIN non sono in generale stazionari

(vedi esempi svolti in aula e tutte le spiegazioni fatte quando è stato introdotto l'argomento dei massimi e minimi).