Funzioni elementari

Paola Trebeschi

Università di Brescia

Analisi I

Funzioni elementari

Vengono comunemente definite *funzioni elementari* le

- le funzioni potenza a esponente naturale, intero, razionale, e reale;
- le funzioni esponenziali di base $a > 0$;
- le funzioni logaritmiche di base $a > 0$, con $a \neq 1$;
- le funzioni trigonometriche sin, cos, tan, cot;
- le funzioni trigonometriche inverse arcsin, arccos, arctan, arccot.

Le funzioni potenza a esponente naturale

Consideriamo le funzioni

$$x \in \mathbb{R} \mapsto x^n, \qquad \text{con } n \in \mathbb{N} \quad \text{e dominio } D_f = \mathbb{R}\,.$$

1. Per $n = 0$, otteniamo la funzione costante

$$f(x) = x^0 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

   Si ha che $f(x) \equiv 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Il grafico di tale funzione è la retta $y = 1$. Chiaramente $\mathrm{im}(f) = \{1\}$, quindi f non è né suriettiva, né iniettiva. f è pari. f è periodica con periodo $T > 0$ **per ogni** $T > 0$ (quindi f non ha periodo minimo). **Le considerazioni appena sviluppate valgono anche per la generica funzione costante** $\mathrm{f(x)} \equiv \mathrm{c}$, con $c \in \mathbb{R}$.

2 Per $n = 1$, otteniamo la funzione identità

$$f(x) = x \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Il suo grafico è la bisettrice del primo e del terzo quadrante $y = x$. È immediato vedere che f è iniettiva e che $\mathrm{im}(f) = \mathbb{R}$, quindi f è anche suriettiva. Inoltre f è dispari.

- più in generale, consideriamo la funzione lineare

$$f(x) = ax + b \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \text{con } a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0. \qquad (1)$$

  Il suo grafico è la retta $y = ax + b$. f è iniettiva e $\mathrm{im}(f) = \mathbb{R}$, quindi f è anche suriettiva. Inoltre, f è dispari se e solo se $b = 0$.

- A partire dalla funzione identità definiamo la funzione modulo

$$|x| := \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0\,, \\ -x & \text{se } x < 0\,. \end{cases}$$

  Si vede subito che l'insieme immagine della funzione modulo è la semiretta positiva $[0, +\infty)$, quindi $|\cdot|$ non è suriettiva. Essendo

$$|x| = |-x| \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

  (in virtù della definizione di modulo), si ha che la funzione modulo $|\cdot|$ è pari, e quindi non è neppure iniettiva.

3 Per $n = 2$, otteniamo la funzione quadratica

$$f(x) = x^2 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Il suo grafico è la parabola $y = x^2$. Si ha che $\mathrm{im}(f) = [0, +\infty)$ (quindi f non è suriettiva). Inoltre f è pari, quindi non è iniettiva. Notiamo tuttavia che le funzioni

$$\left.\begin{array}{ll} f|_{[0,+\infty)} & \text{restrizione di } x \mapsto x^2 \text{ a } [0, +\infty), \\ f|_{(-\infty,0]} & \text{restrizione di } x \mapsto x^2 \text{ a } (-\infty, 0], \end{array}\right. \quad \text{sono iniettive.}$$

- più in generale, consideriamo la funzione quadratica

$$f(x) = ax^2 + bx + c \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \text{con } a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0. \tag{2}$$

Il suo grafico è la parabola di equazione $y = ax^2 + bx + x$.

4 Per $n = 3$, otteniamo la funzione cubica

$$f(x) = x^3 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Il suo grafico è la curva cubica $y = x^3$. Si vede che $\mathrm{im}(f) = \mathbb{R}$, quindi f è suriettiva. Inoltre f è iniettiva. Si verifica immediatamente che f è dispari.

5 In generale, le funzioni potenza a esponente **naturale pari**

$$f(x) = x^{2k} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \text{con } k \in \mathbb{N}\,,\ k \geq 1,$$

hanno le stesse proprietà e lo stesso andamento grafico <u>qualitativo</u> della funzione $f(x) = x^2$.

1. In generale, le funzioni potenza a esponente **naturale dispari**

$$f(x) = x^{2k+1} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \text{con } k \in \mathbb{N}\,,\ k \geq 1,$$

hanno le stesse proprietà e lo stesso andamento grafico <u>qualitativo</u> della funzione $f(x) = x^3$.

Definizione

Chiamiamo *funzione polinomiale* una funzione $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ della forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

ove i coefficienti a_i, $i = 1, \ldots, n$, sono numeri reali, con $a_n \neq 0$, e il numero $n \in \mathbb{N}$ viene detto *grado del polinomio*.

Le funzioni potenza a esponente intero negativo

Consideriamo le funzioni

$$x \in \mathbb{R} \mapsto x^{-n} := \frac{1}{x^n}, \qquad \text{con } n \in \mathbb{N},\ \ n > 0, \quad \text{e dominio } D_f = \mathbb{R}\backslash\{0\}\,.$$

1. Per $n = 1$, otteniamo la funzione reciproco

$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

   Il suo grafico è l'iperbole $y = \frac{1}{x}$. Si ha che $\mathrm{im}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, quindi f non è suriettiva. f è iniettiva e dispari.

2 Per $n = 2$, otteniamo la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\,.$$

Si ha che $\mathrm{im}(f) = (0, +\infty)$, quindi f non è suriettiva. Inoltre, f è pari, quindi non è iniettiva.

3 In generale, le funzioni potenza a esponente **intero negativo pari**

$$f(x) = x^{-2k} := \frac{1}{x^{2k}} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \qquad \text{con } k \in \mathbb{N}\,,$$

hanno le stesse proprietà e lo stesso andamento grafico qualitativo della funzione $f(x) = x^{-2}$.

1. In generale, le funzioni potenza a esponente **intero negativo dispari**

$$f(x) = x^{-(2k+1)} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \qquad \text{con } k \in \mathbb{N}\,,$$

hanno le stesse proprietà e lo stesso andamento grafico qualitativo della funzione $f(x) = x^{-3}$.

Definizione

Chiamiamo *funzione razionale fratta* una funzione data dal quoziente di due polinomi, cioè della forma

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$$

$$\begin{cases} a_i \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n \quad a_n \neq 0 \\ b_j \in \mathbb{R},\ j = 1, \ldots, m, \quad b_m \neq 0 \end{cases} .$$

Il dominio di f è allora

$\mathrm{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} :\ b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0 \neq 0\}$.

Inverse delle funzioni potenza a esponente naturale (strettamente positivo)

- La funzione identità $f(x) = x$ è iniettiva su $\mathbb{R}$, quindi invertibile. Poichè $\mathrm{im}(f) = \mathbb{R}$, la funzione inversa f^{-1} è definita su $\mathbb{R}$. Si vede immediatamente che $f(x) = x$ coincide con la sua inversa.
- Più in generale, la funzione lineare $f(x) = ax + b$, con $a \neq 0$, è invertibile. Essendo $\mathrm{im}(f) = \mathbb{R}$, si ha che f^{-1} è definita su tutto $\mathbb{R}$. Si verifica immediatamente che

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{a} - \frac{b}{a} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}\,.$$

Prima di introdurre le inverse delle funzioni potenza $f(x) = x^n$, con $n \geq 2$, diamo la seguente

Definizione

Siano $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, e $x \in [0, +\infty)$. Chiamiamo *radice n-esima di x* l'unico numero $y \in [0, +\infty)$ verificante $y^n = x$. Useremo la notazione $y = \sqrt[n]{x}$.

Distinguiamo i seguenti casi:

1. $n \geq 2$, n **pari**: in questo caso, la funzione $x \mapsto x^n$ è pari, quindi non è invertibile su tutto $\mathbb{R}$. **Si conviene di considerare la restrizione di f alla semiretta** $[0, +\infty)$. Tale restrizione ha ancora come insieme immagine la semiretta $[0, +\infty)$ ed è una funzione iniettiva, quindi invertibile. La funzione inversa avrà quindi come dominio la semiretta $[0, +\infty)$, e come insieme immagine il dominio della restrizione di x^n a $[0, +\infty)$. Allora l'insieme immagine della funzione inversa è $[0, +\infty)$. Si vede immediatamente che

$$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} \qquad \forall\, x \in [0, +\infty)\,.$$

2 $n \geq 2$, n **dispari**: in questo caso, la funzione $x \mapsto x^n$ è iniettiva, quindi è invertibile su tutto $\mathbb{R}$. Il suo insieme immagine è $\mathbb{R}$. Quindi la funzione f^{-1} è definita su $\mathbb{R}$, con $\mathrm{im}(f^{-1}) = \mathbb{R}$. Si ha

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[n]{x} & \forall\, x \in [0, +\infty)\,, \\ -\sqrt[n]{-x} & \forall\, x \in (-\infty, 0)\,. \end{cases}$$

In generale, useremo la notazione $x^{1/n}$ per la funzione inversa di x^n. Si hanno quindi le formule

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x} \qquad \forall\, x \in [0, +\infty) \quad \text{per } n \geq 2,\ n \text{ PARI},$$

$$x^{1/n} = \begin{cases} \sqrt[n]{x} & \forall\, x \in [0, +\infty)\,, \\ -\sqrt[n]{-x} & \forall\, x \in (-\infty, 0)\,, \end{cases} \qquad \text{per } n \geq 2,\ n \text{ DISPARI}.$$

Funzioni potenza a esponente razionale.

Vogliamo ora definire le funzioni $f(x) = x^q$, con $q \in \mathbb{Q}$. Distingueremo il caso $q > 0$ dal caso $q < 0$ (abbiamo già studiato il caso $q = 0$!).

- $q > 0$: allora $q = \frac{m}{n}$, con $m, n \in \mathbb{Z}$, $m, n \neq 0$, e concordi. Non è limitativo supporre che m e n siano entrambi strettamente positivi. Allora definiamo

$$x^q = x^{m/n} := (x^{1/n})^m \quad \begin{cases} \forall\, x \in D_f = [0, +\infty) & \text{se } n \text{ è pari,} \\ \forall\, x \in D_f = \mathbb{R} & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

- caso $q < 0$. Non è limitativo supporre che $q = -\frac{m}{n}$, con $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n > 0$. Allora definiamo

$$x^q = x^{-m/n} := \frac{1}{x^{m/n}} \quad \begin{cases} \forall\, x \in D_f = (0, +\infty) & \text{se } n \text{ è pari,} \\ \forall\, x \in D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Osserviamo quindi che **il dominio naturale della generica funzione x^q è $(0, +\infty)$.**

Funzioni potenza a esponente reale.

Dato $r \in \mathbb{R}$, definiamo la funzione potenza $x \mapsto x^r$ sfruttando la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$. Quest'ultima proprietà assicura infatti che

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists q \in \mathbb{Q} : \quad |r - q| < \varepsilon,$$

cioè che il numero reale $r \in \mathbb{R}$ può essere approssimato "arbitrariamente bene" da numeri razionali $q \in \mathbb{Q}$. Allora si può definire x^r tramite approssimazione (lo sviluppo rigoroso di questo procedimento di approssimazione si basa sulla nozione di limite di successione), con le potenze x^q, $q \in \mathbb{Q}$, che abbiamo testè definito. Poiché il dominio naturale della generica potenza x^q è $(0, +\infty)$, abbiamo che

per ogni $r \in \mathbb{R}$, il dominio naturale della funzione $x \mapsto x^r$ è $(0, +\infty)$.

Abbiamo quindi definito la funzione

$$\begin{aligned} f : &\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ &x \mapsto x^r \end{aligned}$$

dove $r \in \mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$.

Le funzioni esponenziali

Sia a un numero reale strettamente positivo e consideriamo la funzione esponenziale di base a

$$x \in \mathbb{R} \mapsto a^x, \qquad \text{con dominio } D_f = \mathbb{R}\,.$$

Si osservi che, per dare senso alla potenza a^x con esponente reale x, il numero a deve essere strettamente positivo!

Proprietà delle funzioni esponenziali.

Valgono per ogni base $a \in (0, +\infty)$ le seguenti proprietà:

1. $a^0 = 1$,
2. $a^{x+y} = a^x a^y$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$,
3. $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$,
4. $(a^x)^y = a^{xy}$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$,
5. $(ab)^x = a^x b^x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, per ogni $b > 0$.

Abbiamo tre tipi di andamenti grafici qualitativi per le funzioni esponenziali:

1. $a = 1$. In questo caso $f(x) = 1^x \equiv 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, cioè ritroviamo la funzione costantemente uguale a 1.
2. $a > 1$. In questo caso $\mathrm{im}(f) = (0, +\infty)$, quindi f non è suriettiva. f è invece iniettiva e monotona strettamente crescente. Un caso notevole si ha per $a = e = 2,7218......$, la costante di Nepero (o costante di Eulero). Nel caso $a = e$ si usa

$$\text{la notazione alternativa} \quad e^x \equiv \exp(x) \;\; \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

3. $0 < a < 1$. In questo caso $\mathrm{im}(f) = (0, +\infty)$, quindi f non è suriettiva. f è invece iniettiva e monotona strettamente decrescente.

Si noti la relazione

$$\left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x} = a^{-x} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \quad \forall\, a > 0\,,$$

che permette di passare dal caso 2. al caso 3. e viceversa.

Le funzioni logaritmiche

Le funzioni esponenziali $x \in \mathbb{R} \mapsto a^x$ sono iniettive (quindi invertibili) per $a \neq 1$ e, in tal caso, hanno come insieme immagine $(0, +\infty)$.

Definizione

Sia $a \in (0, +\infty)$, $a \neq 1$. Chiamiamo *funzione logaritmica in base a* (o *logaritmo in base a*) la funzione inversa dell'esponenziale $x \mapsto a^x$, e usiamo la notazione $\log_a$. Nel caso particolare in cui $a = e$, useremo la notazione ln (o semplicemente log) invece di $\log_e$ e ci riferiremo alla funzione ln con il nome *logaritmo naturale*.

- Per definizione di funzione inversa, la funzione $\log_a$ è data dalla formula

$$\forall\, x > 0 \quad \log_a(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad a^y = x$$

cioè *il logaritmo in base a di un numero strettamente positivo x è quel numero reale y tale che a elevato alla y sia uguale a x.*

- In particolare, segue dal fatto che $a^0 = 1$ che

$$\log_a(1) = 0 \qquad \forall\, a \in (0, +\infty),\ a \neq 1.$$

- Per costruzione si che per ogni $a \in (0, +\infty)$, $a \neq 1$

$$\mathrm{dom}(\log_a) = (0, +\infty), \qquad \mathrm{im}(\log_a) = \mathbb{R}, \qquad \log_a \text{ è iniettiva.}$$

Abbiamo due tipi di andamenti grafici qualitativi per le funzioni logaritmiche (si noti che per ogni $a \in (0, +\infty)$, $a \neq 1$, il grafico di $\log_a$ passa per il punto $(1, 0)$):

1. $a > 1$. In questo caso il grafico di $\log_a$ si ottiene considerando il simmetrico (rispetto alla retta $y = x$) del grafico di $x \mapsto a^x$ nel caso $a > 1$. $\log_a x$ è una funzione monotona strettamente crescente.
2. $0 < a < 1$. In questo caso il grafico di $\log_a$ si ottiene considerando il simmetrico (rispetto alla retta $y = x$) del grafico di $x \mapsto a^x$ nel caso $0 < a < 1$. $\log_a x$ è una funzione monotona strettamente decrescente.

Proprietà delle funzioni logaritmiche. Valgono per ogni base $a \in (0, +\infty)$, $a \neq 1$ le seguenti proprietà:

$$\log_a(1) = 0, \tag{3}$$

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y) \qquad \text{per ogni } x, y > 0, \tag{4}$$

$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x) \qquad \text{per ogni } x > 0, \tag{5}$$

$$\log_a(x^y) = y\log_a(x) \qquad \text{per ogni } x \in (0, +\infty) \text{ e per ogni } y \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} \qquad \text{per ogni } x > 0 \text{ e per ogni } b \in (0, +\infty),\ b \neq 1. \tag{7}$$

Da (4) e (5) segue che

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y) \qquad \forall\, x,\ y > 0.$$

Le funzioni trigometriche

Definizione di seno e coseno mediante la circonferenza goniometrica. Si consideri un punto P che si muove sulla circonferenza goniometrica $x^2 + y^2 = 1$, percorrendola in senso antiorario, a partire dal punto $(1, 0)$.
Sia $t > 0$ la lunghezza dell'arco di circonferenza compreso fra il punto $(1, 0)$ e il punto P. Si noti che t è la misura in radianti dell'angolo compreso fra il segmento congiungente $O = (0, 0)$ e $(1, 0)$, e il raggio OP.
D'altra parte, ogni valore $t \in [0, 2\pi]$ individua uno e un solo punto P sulla circonferenza trigonometrica, tale che l'arco orientato da $(1, 0)$ a P abbia lunghezza t (il punto corrispondente a $t = 0$ e $t = 2\pi$ è il punto $(1, 0)$). Possiamo quindi considerare il punto $P = P_t$ come in funzione del parametro t e definire le quantità *seno di* t e *coseno di* t.

$$\text{Fissato } t \in [0, 2\pi], \text{ definiamo} \quad \begin{cases} \cos(t) := \text{ascissa di } P_t, \\ \sin(t) := \text{ordinata di } P_t. \end{cases}$$

- La funzione *seno*:
$$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
ha
  - $dom(f) = \mathbb{R}$
  - è dispari : $\sin(-x) = -\sin(x), \forall x \in \mathbb{R}$,
  - 2π-periodica : $\sin(x) = \sin(x + 2\pi)$,
  - ha come insieme immagine $[-1, 1]$.

- La funzione *coseno*:
$$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
  ha
  - $dom(f) = \mathbb{R}$
  - è pari : $\cos(-x) = \cos(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$,
  - 2π-periodica : $\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$,
  - ha come insieme immagine $[-1, 1]$.

- La funzione *tangente* è definita dall'espressione

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Il suo dominio naturale è dato da tutti gli $x \in \mathbb{R}$ per i quali $\cos(x) \neq 0$, da cui concludiamo che

- $$\mathrm{dom}(\tan) = \left\{ x \in \mathbb{R} \,:\, x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \;\forall\, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$
- La funzione tangente è dispari su $\mathrm{dom}(\tan)$ (in quanto è quoziente di sin, dispari, e di cos, pari): $\tan(-x) = -\tan(x)$
- π-periodica: $\tan(x) = \tan(x + \pi)$
- ha come insieme immagine $\mathbb{R}$.

- La funzione *cotangente* è definita dall'espressione

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

Il suo dominio naturale è dato da tutti gli $x \in \mathbb{R}$ per i quali $\sin(x) \neq 0$. Concludiamo che

- $$\mathrm{dom}(\cot) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \neq \pi + k\pi \;\forall\, k \in \mathbb{Z}\}.$$
- La funzione cotangente è dispari su $\mathrm{dom}(\cot)$ (in quanto, è quoziente di cos, pari, e di sin, dispari): $\cot(-x) = \cot(x)$
- π-periodica: $\cot(x) = \cot(x + \pi)$
- ha come insieme immagine $\mathbb{R}$.

Funzioni trigonometriche inverse.

Le funzioni sin, cos, tan e cot essendo periodiche sui loro domini, sono ben lontane dall'essere iniettive (e quindi invertibili) sui rispettivi domini. Tuttavia, esistono dei sottoinsiemi di tali domini, dette *regioni fondamentali*, con la proprietà che le restrizioni di sin, cos , tan e cot a questi sottoinsiemi sono iniettive (e quindi invertibili).

- Si conviene di considerare la restrizione di sin all'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Si verifica che

  $$\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]} \text{ è iniettiva, e ha come insieme immagine } [-1,1].$$

  Chiamiamo *arcoseno* la funzione inversa della restrizione di sin a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Quindi

  $$\arcsin = \left(\sin|_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}\right)^{-1} : [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

  è definito da

  $$\arcsin(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad \sin(y) = x$$

  (cioè l'arcoseno di x è l'arco y il cui seno è x), e ha come insieme immagine $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Il suo grafico si ottiene considerando la curva simmetrica del grafico del seno, ristretto a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, rispetto alla retta $y = x$. La funzione arcsin è dispari.

- Si conviene di considerare la restrizione di cos all'intervallo $[0, \pi]$. Si verifica che

  $$\cos|_{[0,\pi]} \text{ è iniettiva, e ha come insieme immagine } [-1, 1].$$

  Chiamiamo *arcocoseno* la funzione inversa della restrizione di cos a $[0, \pi]$. Quindi

  $$\arccos = \left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi],$$

  è definito da

  $$\arccos(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad \cos(y) = x$$

  (cioè l'arcocoseno di x è l'arco y il cui coseno è x), e ha come insieme immagine $[0, \pi]$. Il suo grafico si ottiene considerando la curva simmetrica del grafico del coseno, ristretto a $[0, \pi]$, rispetto alla retta $y = x$.

- Si conviene di considerare la restrizione di tan all'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Si verifica che

  $$\tan\big|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})} \quad \text{è iniettiva, e ha come insieme immagine } \mathbb{R}.$$

  Chiamiamo *arcotangente* la funzione inversa della restrizione di tan a $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Quindi

  $$\arctan = \left(\tan\big|_{(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})}\right)^{-1} : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

  è definita da

  $$\arctan(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad \tan(y) = x$$

  (cioè l'arcotangente di x è l'arco y la cui tangente è x), e ha come insieme immagine $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Il suo grafico si ottiene considerando la curva simmetrica del grafico della tangente, ristretta a $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, rispetto alla retta $y = x$. La funzione arctan è dispari.

- Si conviene di considerare la restrizione di cot all'intervallo $(0, \pi)$. Si verifica che

  $$\cot\big|_{(0,\pi)} \quad \text{è iniettiva, e ha come insieme immagine } \mathbb{R}.$$

  Chiamiamo *arcocotangente* la funzione inversa della restrizione di cot a $(0, \pi)$. Quindi

  $$\operatorname{arccot} = \left(\cot\big|_{(0,\pi)}\right)^{-1} : \mathbb{R} \to (0, \pi)\,,$$

  è definita da

  $$\operatorname{arccot}(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad \cot(y) = x$$