Funzioni

Paola Trebeschi

Università di Brescia

Analisi I

Prime definizioni

Definizione di funzione:

è una terna (A, B, f), con:

- A, B insiemi (non vuoti)
- f: legge che ad ogni elemento $x \in A$ associa uno e un solo elemento di $f(x) \in B$.

Notazioni:

- A si dice dominio di f, anche denotato con $\mathrm{dom}(f), D_f$
- B si dice codominio di f,
- scriviamo $f : A \to B$, e

$$x \in \mathrm{dom}(f) \mapsto f(x)$$

per la legge che alla *variabile indipendente* x associa la sua *immagine* $f(x)$.

- Riscriviamo la condizione nella definizione di funz.

$$\forall\, x \in A, \qquad \exists!\, y \in B \;:\; y = f(x).$$

La def. <u>permette</u> che a diversi x corrisponda lo stesso y.

Codominio e insieme immagine:

Data $f : A \to B$,

- il codominio B è oggetto poco significativo: solo un "contenitore" dei valori assunti da f.

  Non univocamente determinato:

  $$\text{se } C \text{ è insieme } C \text{ tale che } B \subset C$$
  $$\text{allora } C \text{ è un codominio per } f$$

- Oggetto significativo: **insieme immagine**

  $$\boxed{\mathrm{im}(f) = f(A) = \{y \in B \,:\, \exists\, x \in A, \quad y = f(x)\}}$$

  è l'insieme dei **valori assunti** da f.

In generale, $\mathrm{im}(f) \subset B$

Esempi

1) Un normale impianto elettrico è una funzione che ad ogni interruttore fa corrispondere un lampadario.
2) la somma di due numeri reali è una funzione:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\to x + y \end{aligned}$$

La funzione sopra scritta è un esempio di funzione di due variabili.

3) In questo corso ci occuperemo di funzioni di una sola variabile. Studieremo le **funzioni reali ($B = \mathbb{R}$) di variabile reale ($A \subseteq \mathbb{R}$)**, ossia di funzioni

$$f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

Grafico di una funzione: Data $f : A \to B$, il grafico di f è

$$\mathrm{graf}(f) := \{(x, y) \in A \times B \,:\, x \in A,\ y = f(x)\}\ .$$

$\mathrm{graf}(f) \subseteq A \times B$ è un insieme di coppie ordinate.

Dalla definizione di funzione segue la seguente proprietà di cui godono i punti del grafico:

$$\forall\, x \in A, \quad \exists!\, y \in B \,:\, (x, y) \in \mathrm{graf}(f).$$

In questo corso, consideriamo solo funzioni

$$f : A = \mathrm{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

- **funzioni <u>reali</u> ($\mathrm{codom}(f) = \mathbb{R}$),**
- **di <u>variabile reale</u> ($A = \mathrm{dom}(f) \subseteq \mathbb{R}$).**

Allora

$$\mathrm{graf} f = \{(x, y) \in \mathrm{dom}(f) \times \mathbb{R} : x \in \mathrm{dom}(f),\ y = f(x)\} \subset \mathbb{R}^2 \text{ e}$$

$$\forall\, x \in \mathrm{dom}(f), \quad \exists!\, y \in \mathbb{R} : (x, y) \in \mathrm{graf}(f)$$

- **Esempio:** dati

$$\begin{aligned} &A = \{x \in \mathbb{R} : \; -1 \le x \le 1\}, \\ &B = \mathbb{R} \end{aligned}$$

consideriamo la circonferenza $\gamma \subseteq A \times B$

$$\gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 1, \quad x^2 + y^2 = 1\}.$$

<u>Domanda</u>: γ è il grafico di una funzione da A in B?? **NO!!**

al punto $x_0 = 0$ corrispondono $\begin{cases} y_1 = 1 \\ y_2 = -1 \end{cases}$ con $\begin{cases} (x_0, y_1) \in \gamma \\ (x_0, y_2) \in \gamma \end{cases}$

Invece

$$\gamma \cap \{(x, y)\ :\ x \in A\ \ y \geq 0\}\ \textbf{è un grafico.}$$

• Una funzione reale di variabile reale è ben definita quando sono dati:

- il dominio di f
- la legge che definisce f

• Quindi, $f_1 : \mathrm{dom}(f_1) \to \mathbb{R}$ e $f_2 : \mathrm{dom}(f_2) \to \mathbb{R}$ **coincidono** se e solo se

$$\mathrm{dom}(f_1) = \mathrm{dom}(f_2) \text{ e}$$
$$f_1(x) = f_2(x) \quad \forall\, x \in \mathrm{dom}(f_1) = \mathrm{dom}(f_2).$$

Esempio

$$f_1(x) = x^2 \quad \forall\, x \geq 0$$

$$f_2(x) = x^2 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

non coincidono.

Dominio naturale di definizione

Quando una funzione reale di variabile reale è data senza che venga specificato il dominio, si sottintende che

il dominio è l'insieme di tutti gli $x \in \mathbb{R}$ tali che
$f(x)$ ha senso ed è un numero reale.

Esempi:

$$f_1(x) := \frac{1}{x^2 - 1}\,.$$

Si ha

$$\begin{aligned} \mathrm{dom}(f_1) &= \{x \in \mathbb{R} :\; x^2 - 1 \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} :\; x \neq \pm 1\} \end{aligned}$$

$$f_2(x) := \sqrt{4 - x^2}\,.$$

Si ha

$$\begin{aligned}
\mathrm{dom}(f_2) &= \{x \in \mathbb{R} \;:\; 4 - x^2 \geq 0\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} \;:\; x^2 - 4 \leq 0\} \\
&= \{x \in \mathbb{R} \;:\; -2 \leq x \leq 2\}
\end{aligned}$$

Funzioni suriettive, iniettive, biiettive

Sia $f : A \to B$. Dato $y \in B$, un elemento $x \in A$ si chiama <u>controimmagine</u> di y tramite f se $f(x) = y$.

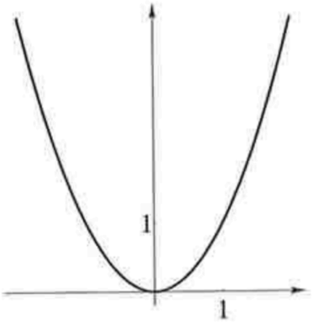
• Denotiamo con $f^{-1}(\{y\})$ l'insieme (eventualmente vuoto) delle controimmagini di y tramite f.

• Si ha

$$y \in \mathrm{im}(f) \quad \Leftrightarrow \quad f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset$$

• **Interpretazione grafica** per $f : \mathrm{dom}(f) \to \mathbb{R}$: dato $\bar{y} \in \mathbb{R}$, individuo graficamente l'insieme controimmagine $f^{-1}(\{\bar{y}\})$ considerando la retta $r_{\bar{y}}$ di equaz. $y = \bar{y}$:

- se $y = \bar{y}$ non interseca $\mathrm{graf}(f)$ in alcun punto, allora $f^{-1}(\{\bar{y}\}) = \emptyset$;
- viceversa, per ogni punto $(x, \bar{y}) \in \mathrm{graf}(f) \cap r_{\bar{y}}$, si ha $x \in f^{-1}(\{\bar{y}\})$.



Iniettività

Sia $f : A \to B$. Diciamo che f è iniettiva se

$$\forall\, x_1, x_2 \in A,\ \left[(x_1 \neq x_2) \Rightarrow (f(x_1) \neq f(x_2))\right]$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall\, x_1, x_2 \in A,\ \left[f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (x_1 = x_2)\right].$$

• N.B.: non confondere l'ordine in cui è scritta la formula: infatti la proprietà

$$\forall\, x_1, x_2 \in A,\ [(x_1 = x_2) \Rightarrow (f(x_1) = f(x_2)]$$

è verificata da ogni funzione.

L'iniettività

$$\forall\, x_1, x_2 \in A,\ [(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (x_1 = x_2)]$$

implica che

a ogni elemento $y \in B$ ha al più una controimmagine, cioè

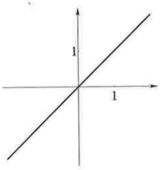
$$\begin{cases} y \in B \setminus \mathrm{im}(f) & \Rightarrow \quad f^{-1}(\{y\}) = \emptyset \\ y \in \mathrm{im}(f) & \Rightarrow \quad f^{-1}(\{y\}) \text{ è singoletto} \end{cases}$$

Interpretazione grafica della iniettività: Una $f : \mathrm{dom}(f) \to \mathbb{R}$ è iniettiva se e solo se

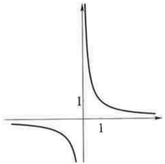
$$\underline{\text{per ogni}}\ \ \bar{y} \in \mathbb{R}, \text{ la retta } y = \bar{y}$$
$$\text{interseca } \mathrm{graf}(f) \text{ in } \textbf{al piú} \text{ un punto.}$$

Ricorda:
in **al piú** *un punto* = *in* **al massimo** *un punto* = 0 o 1intersezioni

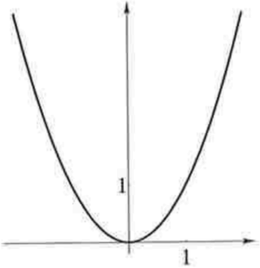
- **Esempi:**
  1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = x$ **è iniettiva**:



  2. la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ definita per $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ **è iniettiva**



- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^2$ non è iniettiva



Suriettività

Sia $f : A \to B$. Diciamo che f è <u>suriettiva</u> se

$$\mathrm{im}(f) = B$$

o, equivalentemente, se

$$\forall\, y \in B \ \exists\, x \in A : \quad f(x) = y.$$

• N.B. nel caso di una **funzione reale di variabile reale**
$f : \mathrm{dom}(f) \to \mathbb{R}$,
<u>considereremo sempre come codominio l'insieme $\mathbb{R}$.</u> Quindi

$$f \text{ è suriettiva se } \mathrm{im}(f) = \mathbb{R}.$$

- **Interpretazione grafica della suriettività:** Una $f : \mathrm{dom}(f) \to \mathbb{R}$ è suriettiva se e solo se

$$\forall\, \bar{y} \in \mathbb{R},\ \bar{y} \in \mathrm{im}(f) \ \Leftrightarrow\ \forall\, \bar{y} \in \mathbb{R},\ f^{-1}(\{\bar{y}\}) \neq \emptyset$$

e quindi se e solo se

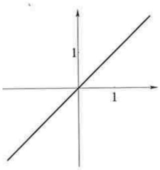
<u>per ogni</u> $\bar{y} \in \mathbb{R}$, la retta $y = \bar{y}$

interseca $\mathrm{graf}(f)$ in **almeno** un punto.

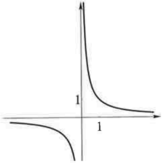
Ricorda: *in* **almeno** *un punto* $=$ *numero pti di intersez.* ≥ 1

Esempi

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = x$ è **suriettiva**:

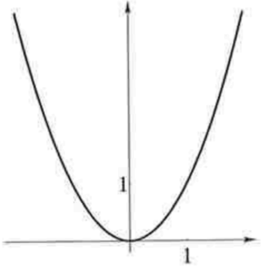


- la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ definita per $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ **non è suriettiva**



Esempi

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = x^2$ non è suriettiva da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, perché



• Iniettività e suriettività sono nozioni indipendenti: per esempio vi sono

funzioni iniettive ma non suriettive	$\rightsquigarrow$	$f(x) = \frac{1}{x}$
funzioni sia iniettive che suriettive	$\rightsquigarrow$	$f(x) = x$
funzioni né iniettive né suriettive	$\rightsquigarrow$	$f(x) = x^2$

Biettività

Una funzione $f : A \to B$ che è

- sia iniettiva,
- sia suriettiva,

si dice biettiva (o biunivoca).

Se $f : A \to B$ è biunivoca, allora $B = im(f)$ essendo f suriettiva.

Invertibilità

Sia $f : A \to \mathrm{im}(f)$=B una funzione iniettiva e suriettiva. Quindi

$$\begin{cases} 1.\ \forall\, y \in \mathrm{im}(f), \quad \exists\, x \in A\,:\, y = f(x), \\ 2.\ \text{l'elemento } x \in A \text{ al punto 1. è unico.} \end{cases}$$

cioè

$$\forall\, y \in \mathrm{im}(f),\ \exists! x \in A\,:\, y = f(x).$$

Questo definisce la funzione da $\mathrm{im}(f)$ in A

ad ogni $y \in \mathrm{im}(f)$ si associa uno e un solo elemento $x \in A$

cioè quell'unico elemento x tale che $f(x) = y$.

Chiamiamo questa funzione la *funzione inversa* di f:

$$f^{-1} : B = \mathrm{im}(f) \to A \text{ che associa}$$

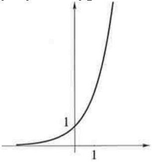
a ogni $y \in B$ l'unico elemento $x \in A$ tale che $y = f(x)$

Esempi

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = 2x + 1$ è invertibile, infatti

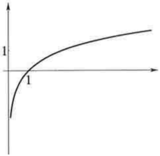
Esempi

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ data da $f(x) = e^x$ è iniettiva, con $\mathrm{im}(f) = \{y \in \mathbb{R} \,:\, y > 0\} = (0, +\infty) = \mathbb{R}^+$.



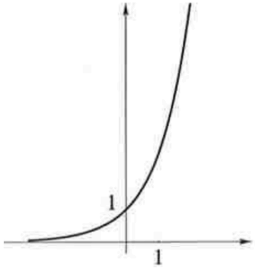
Allora f è invertibile, con $f^{-1} : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ data da

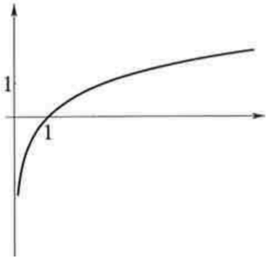
$$f^{-1}(y) = \log y \qquad \forall\, y \in (0, +\infty).$$



Data $f : D_f \to \mathbb{R}$, **invertibile**,

$$\mathrm{graf}(f^{-1}) \text{ è il simmetrico di } \mathrm{graf}(f) \text{ risp. a } y = x$$





Restrizione

Dati $f : A \to B$ ed $E \subseteq A$, si dice <u>restrizione</u> di f ad E

$$f|_E : E \to B \text{ data da } f|_E(x) = f(x) \quad \forall\, x \in E.$$

• **Esempio:** Sia $f : \mathbb{R} \to \{y \in \mathbb{R} :\ y \geq 0\} = [0, +\infty)$ definita da $f(x) = x^2$ non è iniettiva e non è invertibile.
La restrizione $f|_{[0,+\infty)}$ risulta iniettiva, con $\mathrm{im}(f) = [0, +\infty)$.
Allora è invertibile, con inversa

$$(f|_{[0,+\infty)})^{-1}(y) = \sqrt{y} \quad \forall\, y \geq 0$$

Infatti, $y = x^2 \Leftrightarrow |x| = x = \sqrt{y}$.

Una funzione che non è iniettiva si può rendere iniettiva semplicemente considerandone opportune restrizioni.

Composizione di funzioni

Siano

$$f : A \to B, \quad g : B' \to C,$$
$$\text{con } f(A) \subseteq B'$$

si dice composizione di f e g la funzione

$$g \circ f : A \to C \text{ data da } (g \circ f)(x) = g(f(x)) \; \forall\, x \in A.$$

Esempio

Date

$$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \quad f(x) = |x| \quad \text{per } x \neq 0$$

$$g : (0, +\infty) \to \mathbb{R} \quad g(x) = \log(x) \quad \text{per } x > 0$$

$g \circ f$ è **ben definita**, poiché $\mathrm{im}(f) = (0, +\infty) = \mathrm{dom}(g)$, e

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \log(f(x)) = \log(|x|) \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Proprietà della composizione di funzioni

- **è associativa**

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

- **NON è commutativa**

$$f \circ g \neq g \circ f$$

- inversa della composizione

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

Funzioni inverse e composizione

Sia $f : \mathrm{dom}(f) \to \mathbb{R}$ una funzione <u>iniettiva</u> con

$$\text{funzione inversa } f^{-1} : \mathrm{im}(f) \to \mathbb{R}$$

Valgono le relazioni

$$1.\ \forall\, y \in \mathrm{dom}(f^{-1}) = \mathrm{im}(f) \qquad (f \circ f^{-1})(y) = y\,,$$
$$2.\ \forall\, x \in \mathrm{dom}(f) \qquad (f^{-1} \circ f)(x) = x\,.$$

Esempio: Con $f(x) = e^x$ e $f^{-1}(x) = \ln(x)$ si ha

$$1.\ \ e^{\ln(y)} = y \quad \forall\, y \in (0, +\infty),$$
$$2.\ \ \ln(e^x) = x \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Operazioni su funzioni

Un modo per generare nuove funzioni a partire da alcune date è utilizzare le operazioni introdotte per i numeri reali.

Date $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : A \to \mathbb{R}$,

(a) si dice **funzione somma** di f e g la funzione

$$f + g : A \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) + g(x)$$

(b) si dice **funzione prodotto** di f e g la funzione

$$fg : A \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x)g(x)$$

(c) Supponiamo che $g(x) \neq 0$ per ogni $x \in A$: allora si definisce la **funzione quoziente** di f e g

$$\frac{f}{g} : A \to \mathbb{R}, \qquad\qquad x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)}$$

(e) Supponiamo che $f(x) > 0$ per ogni $x \in A$: la **funzione potenza** di f e g è

$$f^g : A \to \mathbb{R}, \qquad\qquad x \mapsto f(x)^{g(x)}.$$

Funzioni pari, dispari, e periodiche

Definizione

Diciamo che un insieme $D \subseteq \mathbb{R}$ è *simmetrico rispetto all'origine* se gode della seguente proprietà:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \in D \quad \Leftrightarrow \quad -x \in D\,.$$

Ad esempio:

- sono insiemi simmetrici rispetto all'origine tutti gli intervalli della forma $(-M, M)$, con $M > 0$.
- Ma anche l'insieme

  $$I = \{-7\} \cup [-5, -3) \cup \{-2\} \cup \{2\} \cup (3, 5] \cup \{7\}$$

  è simmetrico rispetto all'origine.

Definizione

Sia $f : D_f \to \mathbb{R}$, con $D_f \subseteq \mathbb{R}$ *simmetrico rispetto all'origine*.
Diciamo che

- f è *pari* se
$$f(x) = f(-x) \qquad \forall\, x \in D_f \,;$$
- f è *dispari* se
$$f(x) = -f(-x) \qquad \forall\, x \in D_f \,.$$

Si noti che:

- la definizione di funzione pari/dispari ha significato solo su domini simmetrici rispetto all'origine;
- se $D_f \subseteq \mathbb{R}$ è *simmetrico rispetto all'origine* e $0 \in D_f$, e se $f : D_f \to \mathbb{R}$ è una funzione dispari, necessariamente $f(0) = 0$ (in quanto, per la disparità, si ha $f(0) = -f(-0) = -f(0)$: l'unica possibilità perché valga ciò è che $f(0)$ sia 0.).
- Se una funzione $f : D_f \to \mathbb{R}$ è pari o dispari, allora il suo grafico ha la seguente notevole proprietà:
  - se f è pari, allora $\mathrm{graf}(f)$ è **simmetrico rispetto all'asse** y;
  - se f è dispari, allora $\mathrm{graf}(f)$ è **simmetrico rispetto all'origine degli assi**.

  Quindi, per disegnare il grafico qualitativo di una funzione pari o dispari, è sufficiente conoscerne l'andamento solo per $x \geq 0$: il grafico completo si otterrà facendo l'opportuna simmetria.

Relazione fra parità/disparità e operazioni sulle funzioni

Siano $f, g : D \to \mathbb{R}$ due funzioni, e supponiamo che $D \subseteq \mathbb{R}$ sia simmetrico rispetto all'origine. Allora

- *se f e g sono entrambe pari, anche le funzioni $f + g$, $f \cdot g$, e f/g sono pari.*
- *se f e g sono entrambe dispari, le funzioni $f \cdot g$ e f/g sono pari, mentre la funzione $f + g$ è dispari.*
- *se f è pari e g è dispari, le funzioni $f \cdot g$ e f/g sono dispari.* Non si può concludere nulla sulla funzione somma $f + g$. Ad esempio, la funzione $x \mapsto x^2 + x^3$ non è né pari né dispari.

Funzioni periodiche

Definizione

Sia $T > 0$ e $D \subseteq \mathbb{R}$ un insieme non vuoto con la proprietà che

$$\forall\, x \in D, \qquad x + T \in D\,. \tag{1}$$

Diciamo che una funzione $f : D \to \mathbb{R}$ è *periodica di periodo* T (brevemente, T*-periodica*), se si ha

$$f(x + T) = f(x) \qquad \forall\, x \in D\,. \tag{2}$$

Si noti che se $f : D \to \mathbb{R}$ è una funzione T-periodica, f è anche periodica di periodo kT per ogni $k \in \mathbb{N}$. Il minimo $T' > 0$ per il quale f è periodica di periodo T', se esiste, viene chiamato *periodo minimo*.

Osservazione

Dalla definizione di funzione periodica segue che date due funzioni periodiche f e g di periodi T_1 e T_2 rispettivamente, allora la funzione somma $f+g$ è una funzione periodica di periodo $T := m.c.m.\{T_1, T_2\}$, dove $m.c.m$ indica il minimo comune multiplo fra i due numeri.

Funzioni monotone

Definizione

Una funzione $f : \operatorname{dom} f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice

(i) monotona crescente se

$$\forall\, x, y \in \operatorname{dom} f \quad : \quad x < y \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq f(y);$$

(ii) monotona decrescente se

$$\forall\, x, y \in \operatorname{dom} f \quad : \quad x < y \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq f(y);$$

(ii) strettamente crescente o strettamente decrescente se le disuguaglianze sopra sono strette.

Esempio

Sono funzioni monotone la funzione esponenziale e la funzione logaritmo (per la loro definizione si veda la sezione *Funzioni elementari*). In particolare si ha:

- $f(x) = a^x$ con $a > 1$ è monotona crescente (strettamente);
- $f(x) = a^x$ con $0 < a < 1$ è monotona decrescente (strettamente);
- $f(x) = \log_a(x)$ con $a > 1$ è monotona crescente (strettamente);
- $f(x) = \log_a(x)$ con $0 < a < 1$ è monotona decrescente (strettamente).

Ordinamento delle funzioni reali.

Definizione

Consideriamo due funzioni $f : D_f \to \mathbb{R}$ e $g : D_g \to \mathbb{R}$ con $D_f, D_g \subseteq \mathbb{R}$. Supponiamo che $D := D_f \cap D_g \neq \emptyset$. Diciamo che

- $f \leq g$ se $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in D$;
- $f < g$ se $f(x) < g(x)$ per ogni $x \in D$.