MATEMATICA 5 febbraio 2021, 1 appello, a.a. 2020-21

Tempo a disposizione 1 ora

---

1. Data la funzione
$$f(x) = x^2 \log\left(1 + \frac{3}{|x|}\right)$$
dire se essa ammette asintoto obliquo per $x \to +\infty$ ed eventualmente calcolarlo.

---

2. Calcolare la derivata destra in $x = -1$ della funzione
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{e^x+2}, & \text{se } |x| > 1 \\ e^{3x} - 1, & \text{se } |x| \leq 1. \end{cases}$$

---

3. Determinare l'insieme delle primitive della funzione $f(x) = x \arctan x$.

SECONDA PARTE:

4. Scrivere la definizione di funzione continua in un punto e darne un'interpretazione geometrica. Che cosa succede se il punto e' un punto isolato del dominio della funzione? Motivare la risposta.

5. Enunciare e dimostrare il teorema di Rolle e darne un'interpretazione geometrica.

6. Dare la definizione di funzione integrabile secondo Riemann. Esistono funzioni limitate su intervalli chiusi e limitati non integrabili?

Matematica 19 febbraio 2021, 2 appello, a.a. 2020-21

Tempo a disposizione 1 ora

---

1. Data la funzione
$$f(x) = \begin{cases} x^2 \quad se \quad x \in [0,1] \\ -1 + x \quad se \quad x \in [-1,0), \end{cases}$$
dire se la funzione e' continua nel suo dominio. Classificare gli eventuali punti di discontinuita' e determinare $im(f)$ (l'insieme immagine). Tale insieme e' limitato? Motivare la risposta.

---

2. Calcolare la retta tangente al grafico della funzione $f(x) = \frac{xe^x}{x+2}$ nel punto di ascissa $x = 1$.

---

3. Sia y la soluzione del problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' + 3x^2 y = x^2 \\ y(0) = 1. \end{cases}$$
Calcolare
$$\lim_{x \to +\infty} y(x)$$

SECONDA PARTE:

4. Data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, scrivere la definizione di $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ e darne una interpretazione geometrica.

5. Spiegare le relazioni che esistono fra il concetto di continuita' e derivabilita' motivando la risposta (se viene richiamato un risultato teorico dimostrarlo e dove necessario esibire un controesempio).

6. Enunciare e dimostrare il primo teorema fondamentale del calcolo integrale.

MATEMATICA 8 aprile 2021, 3 appello, a.a. 2020-21

Tempo a disposizione 1 ora

---

1. Data la funzione $f(x) = e^{\frac{2x+3}{x^2-4}}$ calcolare il dominio e i limiti agli estremi del dominio.

---

2. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 3\sqrt{x} & \text{se } x \geq 0 \\ 3x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Dire se la funzione è derivabile nel suo dominio e, eventualmente, classificare i punti di non derivabilità?

---

3. Calcolare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = xy \sin x \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

SECONDA PARTE:

4. Dare la definizione di funzione derivabile in un punto e darne un'interpretazione geometrica.
5. Enunciare il teorema di Weierstrass. Che cosa succede se non sono verificate le ipotesi? Fornire degli esempi.
6. Definire la media integrale. Enunciare e dimostrare il teorema della media integrale e darne un'interpretazione geometrica.

MATEMATICA 29 giugno 2021, 4 appello, a.a. 2020-21

Tempo a disposizione 1 ora

---

1. Data la funzione $f(x) = \sqrt{x^2+1} - x + \frac{1}{x^2}$ calcolare il dominio e gli eventali asintoti (orizzontali, verticali, obliqui).

---

2. Data la funzione
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{se } x \geq 0. \end{cases}$$
Dire se la funzione è derivabile nei punti $x = 0$ e $x = 2$ e, se esiste, calcolare la derivata prima in tali punti.

---

3. Calcolare
$$\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{(x^2+1)\arctan x} dx$$

SECONDA PARTE:

4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dare la definizione di $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e darne un'interpretazione geometrica.
5. Enunciare il teorema di Lagrange e darne un'interpretazione geometrica.
6. Sia $f : I \to \mathbb{R}$, con $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo. Dare la definizione di primitiva di una funzione f. Enunciare il primo teorema fondamentale del calcolo integrale.

Tempo a disposizione 1 ora

---

1. Data la funzione
$$f(x) = e^{-x^3+x}$$
stabilire, all'interno del suo dominio, dove risulta monotona decrescente. Calcolare l'equazione della retta tangente al grafico nel punto di ascissa $x = 1$.

---

2. Calcolare il limite
$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{1+\frac{4}{x}} - 1\right)(x+1)^2 \sin\frac{1}{2x}.$$

---

3. Calcolare la soluzione del seguente problema di Cauchy
$$\begin{cases} y' = (1+y^2)\cos x \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

SECONDA PARTE:

4. Dare la definizione di funzione continua in un punto. Enunciare il teorema degli zeri.

5. Dare la definizione di punto di estremo relativo. Dare la definizione di punto stazionario. Un punto di estremo relativo e' sempre stazionario? Motivare la risposta.

6. Enunciare e dimostrare il secondo teorema fondamentale del calcolo integrale. Una funzione derivabile in un intervallo $[a, b]$ (con $a, b \in \mathbb{R}$) e' integrabile secondo Riemann? Motivare la risposta.

MATEMATICA 15 gennaio 2021, prova-intermedia

Tempo a disposizione 1 ora

---

1. Calcolare

$$\lim_{x\to 0^+} 3x^{\frac{\log(1+(1-\cos x))}{\log(1+x)}}$$

---

2. Data la funzione $f(x) = (x-1)^3 - \frac{1}{x}$ con $x \in (0, +\infty)$. Dire se f é monotona crescente o decrescente (strettamente crescente o strettamente decrescente) motivando la risposta.

---

3. Data la funzione $f(x) = \frac{1+2e^x}{e^{2x}-1}$, $x \in [1,2]$, dire se essa é integrabile. In caso affermativo calcolare l'insieme delle primitive.

SECONDA PARTE:

4. Dire se le seguenti affermazioni sono vere o false motivando le risposte.
    1. f continua in un punto $x_0 \in dom f$ se e solo se f é derivabile in x_0;
    2. Sia x_0 un punto di estremo relativo per f, allora x_0 é punto stazionario per f;
    3. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, allora l'insieme $im f$ é limitato.
    4. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata, allora f é integrabile secondo Riemann.
5. Enunciare il teorema degli zeri. La funzione dell'esercizio 2 ($f(x) = (x-1)^3 - \frac{1}{x}$) ristretta all'intervallo $[\frac{1}{2}, 2]$ ha almeno uno zero?
6. Enunciare il teorema che fornisce una condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilita' e darne un'interpretazione geometrica.
