Lezione 22:

Teorema di Rolle

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, continua in $[a,b]$ e derivabile $]a,b[$ t.c. $f(a) = f(b)$

$\Rightarrow$ esiste almeno un punto $\xi \in\,]a,b[$:

$$f'(\xi) = 0 \qquad [m]$$

Teorema di Cauchy

Sia $f, g: [a,b] \to \mathbb{R}$, continue in $[a,b]$ e derivabili $]a,b[$ t.c. $g(a) \neq g(b)$

$\Rightarrow$ esiste $\xi \in\,]a,b[$: Ⓐ $f'(\xi) = g'(\xi) = 0$

Ⓑ $$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Teorema di Lagrange (valor medio)

Se $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ è continua in $[a,b]$ e derivabile in $]a,b[$

$\Rightarrow$ esiste almeno un punto $\xi \in\,]a,b[$:

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad [m_\xi = \underbrace{m_{a,b}}]$$

T.E. 29.06.10

Sia data la funzione $f : [1, e^2] \to \mathbb{R}$ t.c.

$$f(x) = 2 \ln x + 1$$

Allora il valore x dato dal teorema di Lagrange vale:

A $\dfrac{4}{e^2-1}$

B il teorema di Lagrange non è applicabile

C e^{e^2-1}

D $\dfrac{e^2-1}{2}$

$f(x) = 2 \ln x + 1$ dom $x > 0$

$[1, e^2]$ intervallo chiuso contenuto nel dom f

$\Rightarrow$ la f è definita in $[1, e^2]$

$[1, e^2]$ $\Rightarrow$ la f è continua in questo intervallo chiuso e limitato, perché continua nel suo dominio, essendo composizione di funzioni continue.

$f'(x) = \frac{2}{x}$. dom f' $x \neq 0$

In particolare $]0, +\infty[$ è derivabile f

f in particolare è derivabile in $]1, e^2[\subset]0, +\infty[$

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \qquad \xi \in \,]a, b[$$

Sostituendo, si ottiene la seguente equazione

$$\frac{2}{x} = \frac{\overset{f(b)}{(2 \ln e^2 + 1)} - \overset{f(a)}{(2 \cdot \ln 1 + 1)}}{\underset{b - a}{e^2 - 1}}$$

$$\frac{2}{x} = \frac{4 + 1 - 1}{e^2 - 1}$$

$$\frac{2}{x} = \frac{4}{e^2 - 1}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{e^2 - 1}{4} \implies x = \frac{e^2 - 1}{2} \in \,]1, e^2[\, ?$$

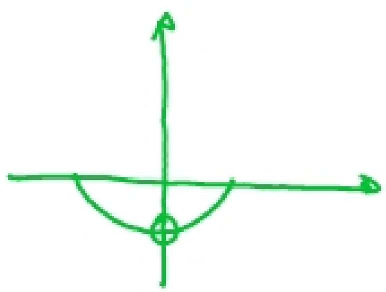
vi appartiene OK

T.E. 6.05-10

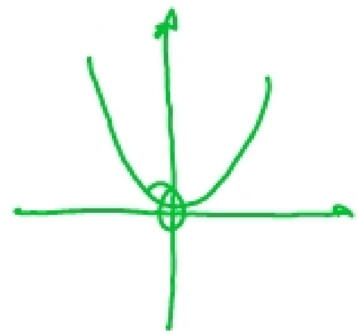
Sia $f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ data da $f(x) = \dfrac{\cos x - \cosh x}{x^2}$.

Il suo grafico approssimativo in un intorno dell'origine è dato da (suggerimento: usare lo sviluppo di Taylor)

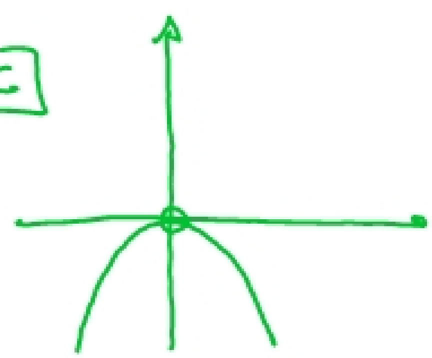
A



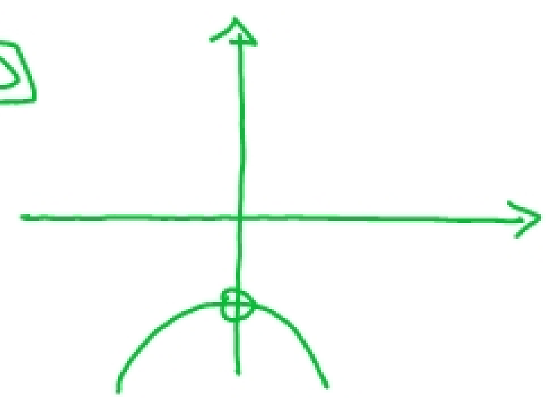
B



C



D



$$f(x) = \frac{\cos x - \cosh x}{x^2}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^7)$$

$$-$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + o(x^7)$$

Sviluppo di Taylor:

$$f(x) = p(x) = \frac{\cancel{1} - \frac{x^2}{2!} + \cancel{\frac{x^4}{4!}} - \frac{x^6}{6!} \cancel{-1} - \frac{x^2}{2!} - \cancel{\frac{x^4}{4!}} - \frac{x^6}{6!} + o(x^7)}{x^2} =$$

$$= \frac{-x^2 - 2\frac{x^6}{6!} + o(x^7)}{x^2} = -1 - \frac{x^4}{360} + o(x^5)$$

polinomio di 4° grado, rivolto verso il basso $\Rightarrow$ Risposta D

$(0, -1)$

T.E. 29-06.09

$$f(x) = \log(3 - e^x) + e^x$$

1) dominio $\quad 3 - e^x > 0 \quad e^x < 3 \quad x < \log 3 \quad]-\infty, \log 3[$

2) $\lim_{x \to -\infty} \left(\left(\log(3 - \underset{\downarrow 0}{e^x}) \right) + \underset{\downarrow 0}{e^x} \right) = \log 3$

$y = \log 3$

ASINTOTO ORIZZONTALE
SINISTRO
(a sinistra)

$\lim_{x \to \log 3^-} \left(\underbrace{\log(3 - e^x)}_{-\infty} + \underset{\downarrow 3}{e^x} \right) = -\infty$

$x = \log 3$

ASINTOTO VERTICALE
SINISTRO

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = \log(3 - \underbrace{e^0}_{1}) + e^0 = (\log 2) + 1 > 0 \quad (A) \end{cases}$$

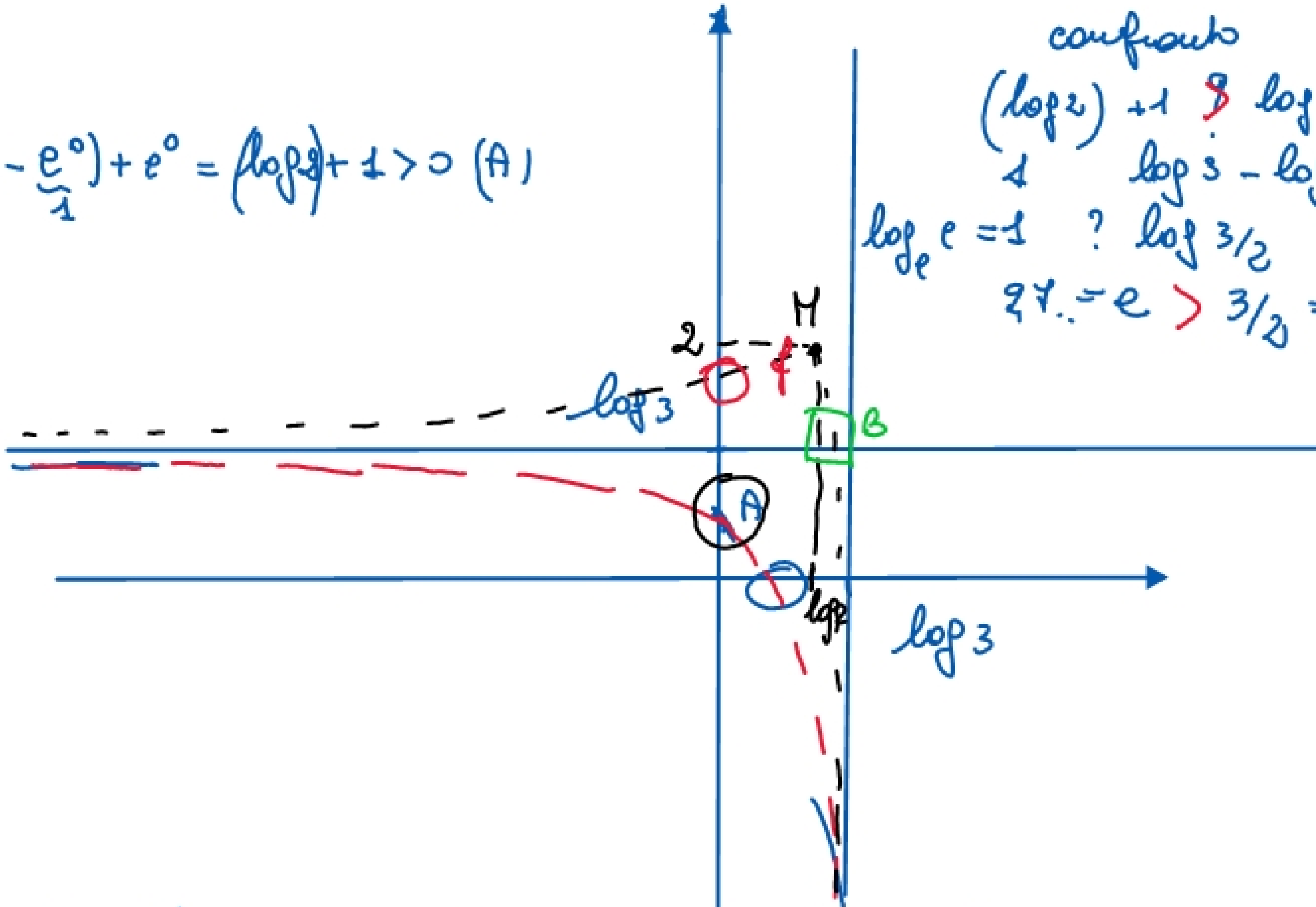
confronto

$(\log 2) + 1 \ ? \ \log 3$

$1 \quad \log 3 - \log 2$

$\log_e e = 1 \ ? \ \log 3/2$

$2{,}7\ldots = e > 3/2 = 1{,}5$



$f(x) \geq 0$

$\log(3 - e^x) \geq -e^x$

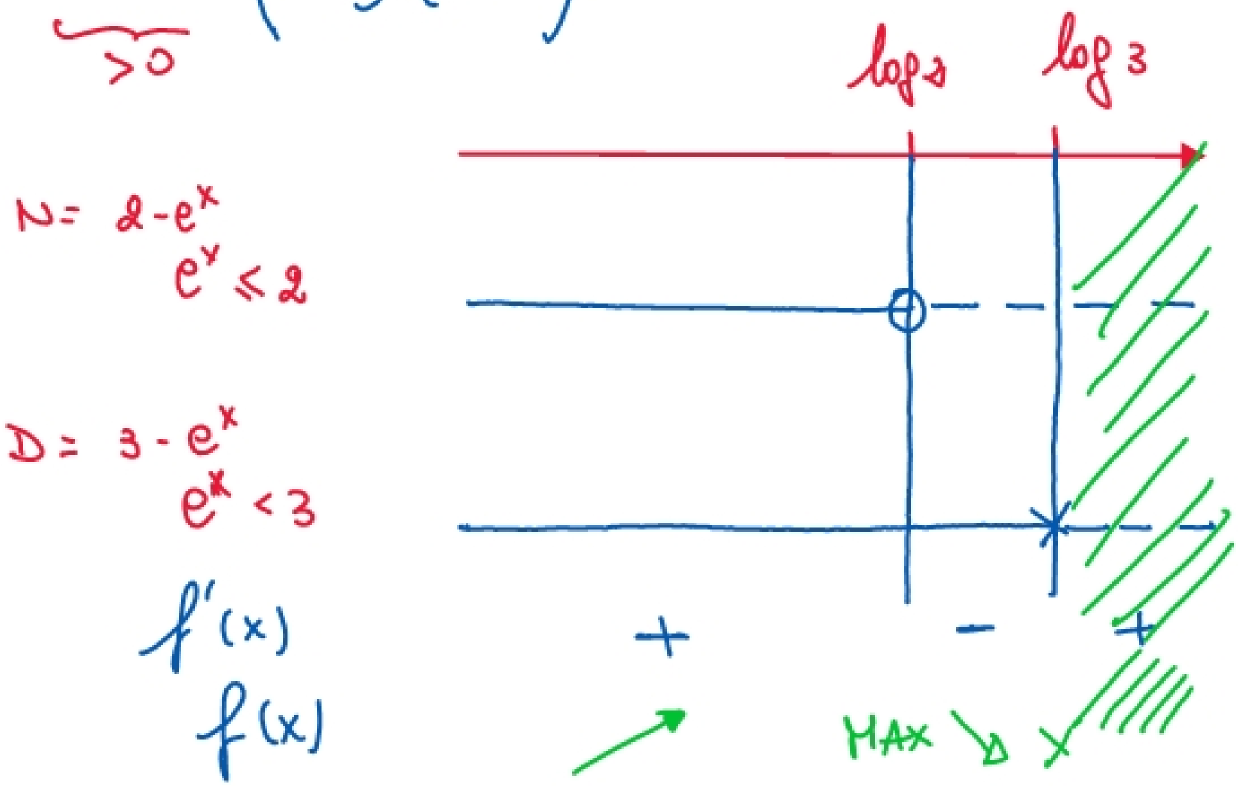
$$B \begin{cases} y = \log 3 \\ \log 3 = \log(3 - e^x) + e^x \\ e^x = \log 3 - \log(3 - e^x) \end{cases}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3-e^x}\cdot(-e^x) + e^x = -\frac{e^x}{3-e^x} + e^x =$$

$$= e^x\left(1 - \frac{1}{3-e^x}\right) = e^x\left(\frac{3-e^x-1}{3-e^x}\right) =$$

$$= \underbrace{e^x}_{>0}\left(\frac{2-e^x}{3-e^x}\right)$$

N.B.
$\text{dom} f' \supset \text{dom} f$



$$M\begin{cases} x = \log 2 \\ y = \log(3-2)+2 \\ \quad = 2 > \log 3 \end{cases}$$

$$f'(x) = e^x \left(\frac{2-e^x}{3-e^x} \right)$$

$$f''(x) = e^x \left(\frac{2-e^x}{3-e^x} \right) + e^x \, \frac{-e^x(3-e^x) - (-e^x)(2-e^x)}{(3-e^x)^2} =$$

$$= e^x \, \frac{2-e^x}{3-e^x} + e^x \, (-e^x) \, \frac{3-\cancel{e^x}-2+\cancel{e^x}}{(3-e^x)^2} =$$

$$= \frac{e^x}{\underbrace{(3-e^x)^2}_{>0}} \underbrace{\left[(2-e^x)(3-e^x) - e^x \right]}$$

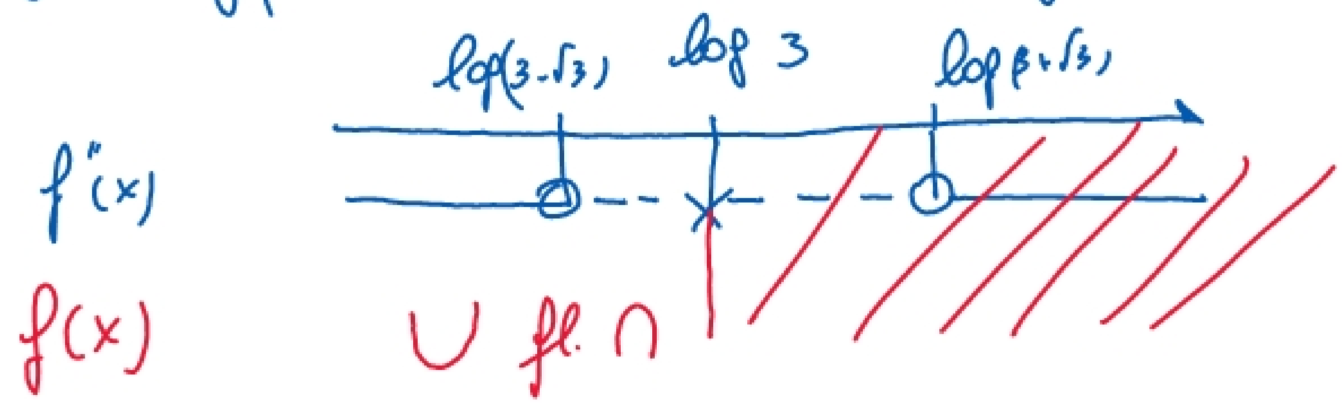
$x \neq \log 3$

$$6 - 3e^x - 2e^x + e^{2x} - e^x = 6 - 6e^x + e^{2x}$$

Studio del segno: $e^{2x} - 6e^x + 6 \geq 0 \qquad e^x_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-6} = 3 \pm \sqrt{3}$

$e^x = 3+\sqrt{3} \quad / \quad e^x = 3-\sqrt{3}$

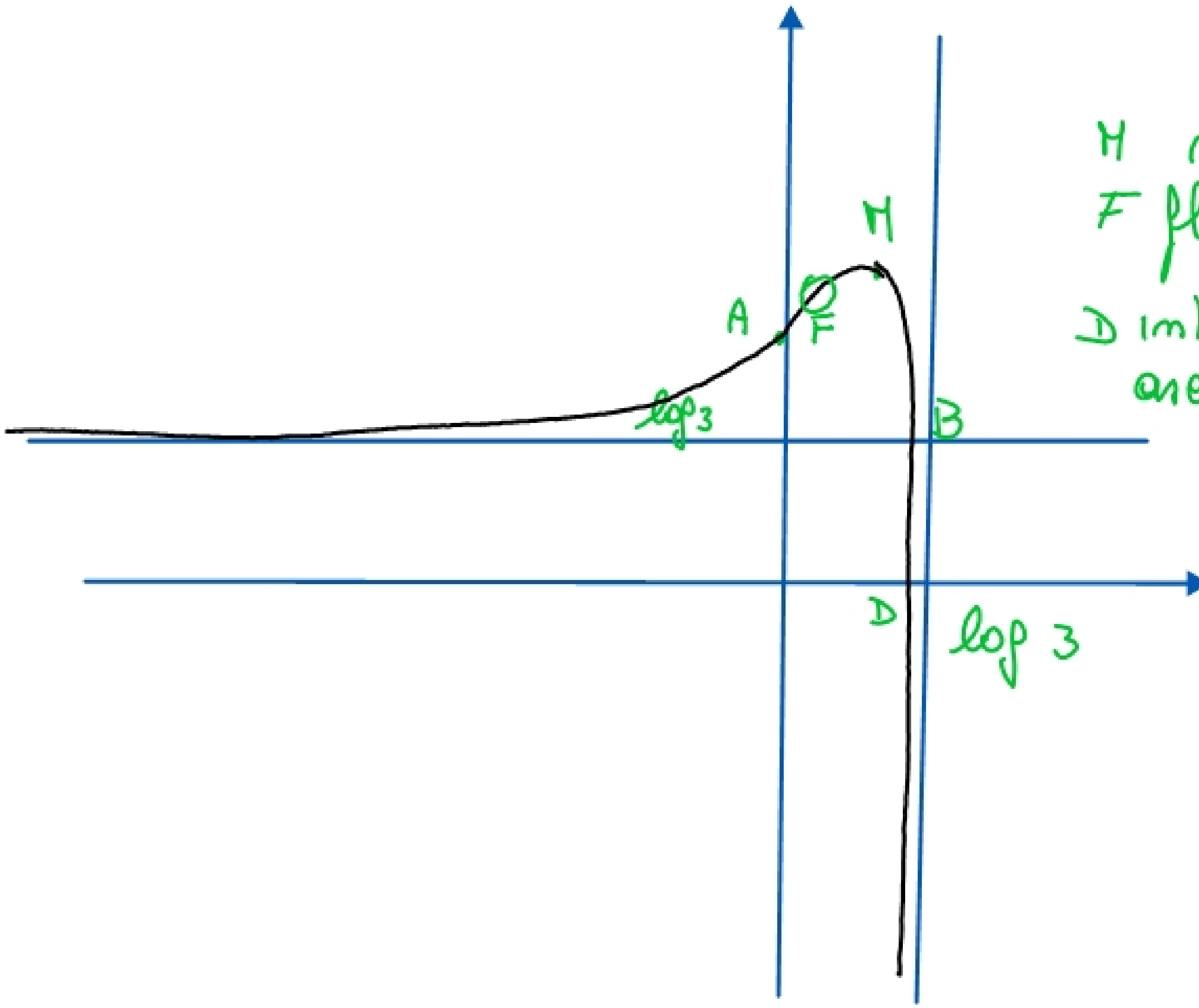
$x_1 = \log(3-\sqrt{3})$ $\qquad$ $x_2 = \log(3+\sqrt{3})$



$$\begin{cases} x = \log(3-\sqrt{3}) & \text{punto di flesso} \\ y = \log\left(3 - e^{\log(3-\sqrt{3})}\right) + e^{\log(3-\sqrt{3})} = \end{cases}$$

$$= \log\left(3 - (3-\sqrt{3})\right) + 3 - \sqrt{3} =$$

$$= \log(\sqrt{3}) + 3 - \sqrt{3}$$



M massimo

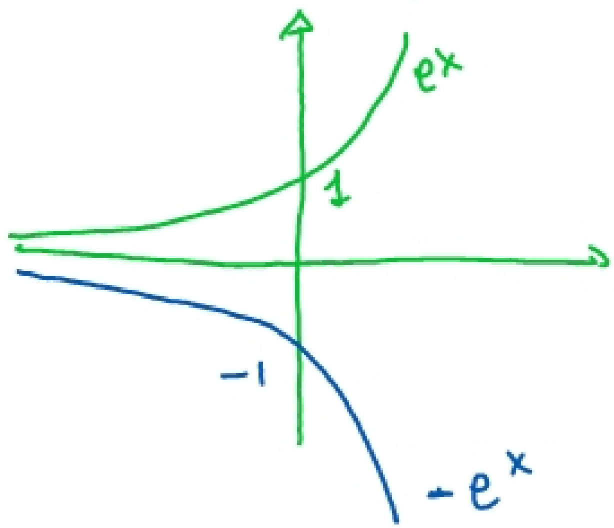
F flesso

D intersezione asse ascisse

$$f(x) = \log(3 - e^x) + e^x$$

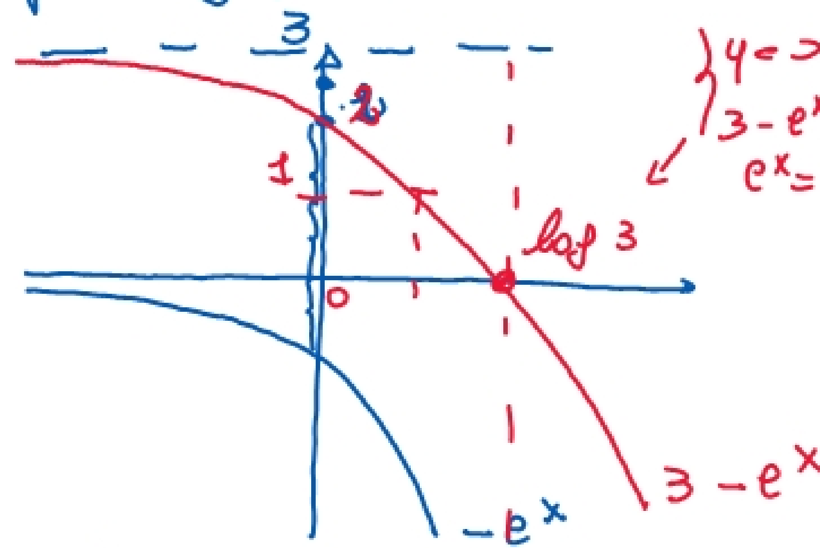
Studio del segno

$$\log(3 - e^x) \geq -e^x$$



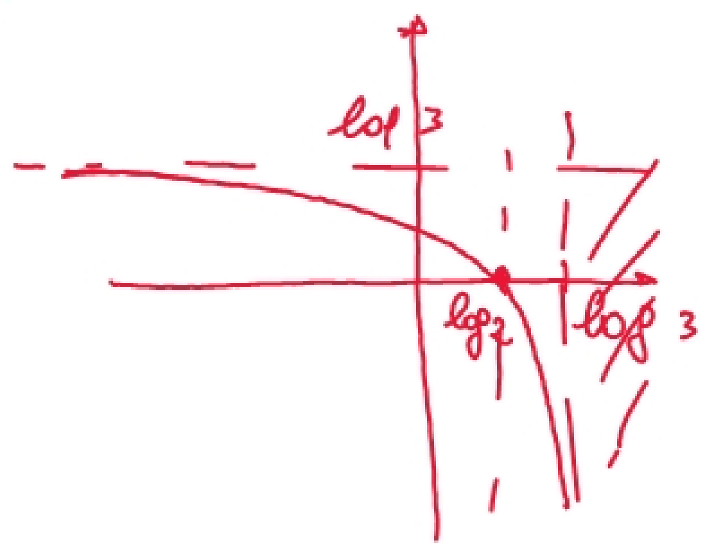
$$y = -e^x$$

$$y = \log(3 - e^x)$$



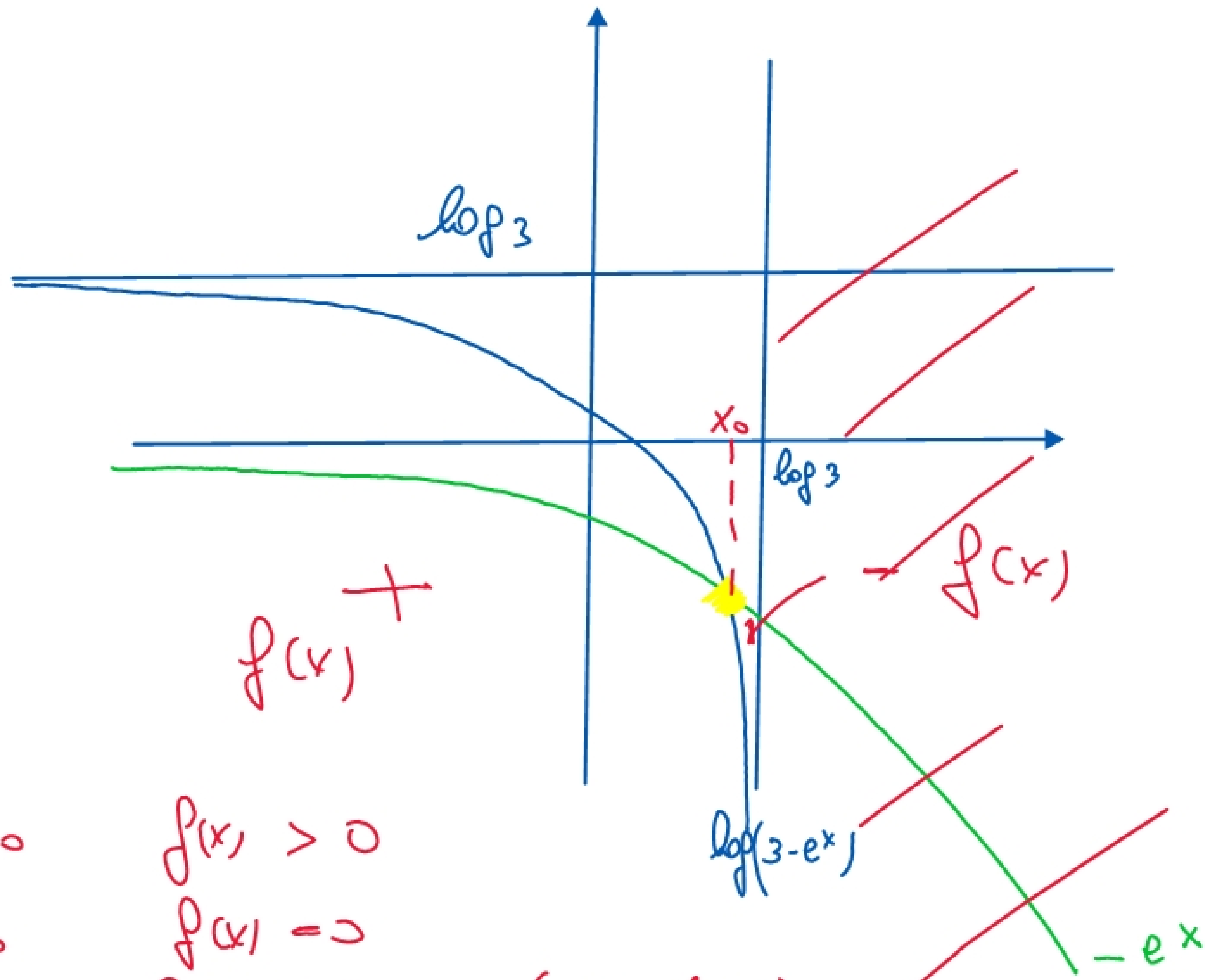
$$\begin{cases} y = 0 \\ 3 - e^x = 0 \end{cases}$$

$$e^x = 3$$



$$3 - e^x = 1$$

$$e^x = 2$$



$x < x_0$ $\quad f(x) > 0$

$x = x_0$ $\quad f(x) = 0$

$x > x_0$ $\quad f(x) < 0$ $\quad (x < \log 3)$

Serie e Taylor

- $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(e^{\frac{1}{n^2}} - 1\right)$ converge?

$$\lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{n^2}}-1}{\frac{1}{n^2}} = 1 \qquad \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

$$a_n = e^{\frac{1}{n^2}} - 1$$

$$b_n = \frac{1}{n^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

(comportamento analogo, asintotico tra le 2)

(sono confrontabili)

(una si comporta come l'altra per $n \to +\infty$)

$$\Rightarrow \sum a_n = \sum \left(e^{\frac{1}{n^2}}-1\right) \sim \sum b_n = \sum \frac{1}{n^2}$$

$(n \to +\infty)$

$\sum \frac{1}{n^2}$ serie armonica generalizzata con $\alpha > 1$ $\Rightarrow$ convergente

$\Rightarrow$ $\sum b_n$ è conv. $\Rightarrow$ $\sum a_n$ è convergente (perché stesso comportamento)

Recuperiamo la serie di Taylor

$x \to 0$: $e^x \simeq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ $\quad x \to 0^+$

$$1 + x + o(x)$$

$n \to \infty$: $a_n = e^{\frac{1}{n^2}} - 1 = 1 + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) - 1 \simeq \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$

$x = \frac{1}{n^2} \xrightarrow{n \to \infty} 0$

successione che genera la serie di confronto

• Sia $\alpha \in \mathbb{R}$, studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e - \left(\frac{1}{n}+1\right)^n}{n^{\alpha+1} \, (\log n)^2}$$

•• $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{n}+1\right)^n = e$ $\qquad c_n = \left(\frac{1}{n}+1\right)^n$ T.P. $\nearrow$

Num. $\left[e - \underbrace{\left(\frac{1}{n}+1\right)^n}_{< e}\right] > 0$ T.P.

Den $n^{\alpha+1} \cdot (\log n)^2 > 0$

$\Rightarrow \quad a_n = \dfrac{e - \left(\frac{1}{n}+1\right)^n}{n^{\alpha+1} \, (\log n)^2} > 0$ suc. T.P.

$$a_n \sim \frac{e}{2n} \cdot \frac{1}{n^{\alpha+1}(\log n)^2} \sim \underbrace{\frac{1}{n^{\alpha+2}(\log n)^2}}_{\text{converge}}$$

$$\alpha + 2 \geq 1 \implies \alpha \geq -1$$

(serie di base per il confronto)

$$b_n = e - \left(\frac{1}{n}+1\right)^n \sim \frac{e}{2n}$$

$$b_n = e - \left(\frac{1}{n}+1\right)^n = e - e^{\log\left(\frac{1}{n}+1\right)^n} = e - e^{\underbrace{n \cdot \log\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{(*)}}$$

$$(*) \quad n \cdot \log\left(1+\frac{1}{n}\right) =$$

$$\log_{x \to 0}(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \cdots$$

$$n \cdot \log_{n \to \infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = n \cdot \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \cdots\right) \simeq 1 - \frac{1}{2n} \cdots$$

$$e - \left(\frac{1}{n}+1\right)^n = e - e^{n \log\left(1+\frac{1}{n}\right)} \sim e - e^{1-\frac{1}{2n}} =$$

$$= e\left(1 - e^{-\frac{1}{2n}}\right) \sim e\left(\cancel{1} - \cancel{1} + \frac{1}{2n}\right) \sim$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} \cdots$$

$$\simeq \frac{e}{2n}$$