Lezione 14: Serie

Tema d'esame 12.11.04

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n!}$$

1. serie di segno alterno

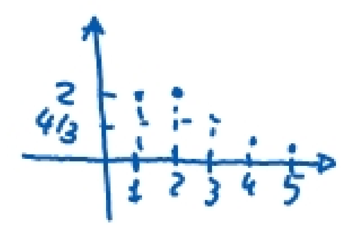
2. $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$ successione a termini positivi

3. $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2^n}{n!} = 0$ $\quad \{a_n\}$ è <u>infinitesima</u>

4. $\{a_n\}$ è decrescente

$$a_1 = 2$$
$$a_2 = \frac{4}{2} = 2$$
$$a_3 = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$a_4 = \frac{16}{24} = \frac{2}{3}$$
$$a_5 = \frac{32}{120} \ll 1$$



$\forall n, m \in \mathbb{N}$, $n \geq m \Rightarrow a_n \leq a_m$ decrescente

Criterio di Leibnitz

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n!}$$

è una serie a segni alterni convergente

(N.B. la serie $n = 2, \dots, +\infty$

$\forall n, m \in \mathbb{N}$ $n > m \Rightarrow a_n < a_m$

(disuguaglianze strette)

teme d'esame del 14.11.05

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\log(7^n+2)}$$

1. serie di segno alterno

2. $a_n = \dfrac{1}{\log(7^n+2)}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\log(7^n+2)} = \frac{1}{\infty} = 0 \quad \{a_n\} \text{ infinitesima}$$

3. decrescenza $\qquad [a_n] \geq [a_{(n+1)}] \leftarrow n < n+1$

$n < n+1$

$7^n < 7^{n+1}$ $\qquad$ base $> 1 \Rightarrow$ si mantiene

$7^n+2 < 7^{n+1}+2$ $\qquad$ è vero

$$\frac{1}{7^n+2} > \frac{1}{7^{n+1}+2}$$

reciproco ⇒ si cambia il verso (quantità positive)

$$\frac{1}{\log(7^n+2)} > \frac{1}{\log(7^{n+1}+2)}$$

applicazione dell'operatore logaritmo (monotonia)

$$a_n > a_{n+1} \qquad \forall n \in N \quad (n \geq 2)$$

$$a_{n+1} = \frac{1}{\log(7^{n+1}+2)} = \frac{1}{\log(7^n \cdot 7 + 2)} < \frac{1}{\log(7^n+2)}$$

coeff. moltiplicazione di 7^n maggiore di 1

$$7^n \cdot 7 + 2 > 7^n + 2$$ vera

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\log(7^n+2)}$$ converge (semplicemente)

CONVERGENZA ASSOLUTA

$\sum_n |a_n|$ valuto la convergenza di questa serie

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{\log(7^n+2)} \right|$$

criterio del rapporto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\overbrace{(-1)^{n+1}}^{\cancel{(-1)^n}\,(-1)^1 \,(-1)}}{\log(7^{n+1}+2)} \cdot \frac{\log(7^n+2)}{\cancel{(-1)^n}} \right| =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\log(7^n+2)}{\log(7^{n+1}+2)} = \quad \text{F.I.}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\log\left[7^n\left(1+\frac{2}{7^n}\right)\right]}{\log\left[7^{n+1}\left(1+\frac{2}{7^{n+1}}\right)\right]} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\log 7^n + \overbrace{\log\left(1+\frac{2}{7^n}\right)}^{0}}{\log 7^{n+1} + \underbrace{\log\left(1+\frac{2}{7^{n+1}}\right)}_{0}}$$

$$\sim \lim_{n\to+\infty} \frac{n\,\cancel{\log 7}}{(n+1)\,\cancel{\log 7}} = 1 \qquad \text{criterio inefficace}$$

Tema d'esame del 26.01.09

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{5^n (n!)^2}$$

1. serie di segno alterno

2. decrescente $\quad a_n = \dfrac{(2n)!}{5^n (n!)^2} = \dfrac{2n(2n-1)\cdots(n+1)\, n!}{5^n \,(n!)\,(n!)}$

il denominatore è sicuramente maggiore del numeratore, quindi a_n è decrescente

polinomio di grado n

3. $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{(2n)!}{5^n (n!)^2} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{2n(2n-1)\cdots(n+1)\,\cancel{n!}}{5^n\,(n!)\,(\cancel{n!})}$

$= 0$

converge assolutamente?

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{(2(n+1))!}{5^{n+1}((n+1)!)^2}\cdot\frac{(n!)^2\cdot 5^n}{(2n)!} =$$

(è a termini positivi $\Rightarrow$ non scrivo il $|\,|$)

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{(2n+2)!}{\cancel{5^n}\cdot 5\,((n+1)\cdot n!)^2}\cdot\frac{(n!)^2\cdot\cancel{5^n}}{(2n)!} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{\overbrace{(2n+2)}^{2n(1+\frac{1}{2n})}\cdot\overbrace{(2n+1)}^{2n(1+\frac{1}{2n})}\cdot\cancel{(2n)!}}{5\cdot\underbrace{(n+1)^2}_{n^2(1+\frac{1}{n})^2}\cdot\cancel{(n!)^2}}\cdot\frac{\cancel{(n!)^2}}{\cancel{(2n)!}} = \frac{4}{5} < 1$$

CONVERGENZA

per il criterio di Leibniz converge MA ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE

• Stabilire il carattere della serie:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\overset{[-1,1]}{\sin(n^5)} - \overset{>1}{\sqrt{n}}}{\underbrace{\sqrt{n+\log n}}_{>0} \cdot \underbrace{\log(n^4+n!)}_{>0}} \qquad (n>0)$$

numeratore è negativo

$\Longrightarrow \quad a_n < 0 \quad \forall n \geq 1$

denominatore è positivo

Si consideri la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-a_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$

$$b_n = \frac{\sqrt{n} - \sin(n^5)}{\sqrt{n+\log n} \cdot \log(n^4+n!)}$$

$$\sqrt{n+\log n} = \sqrt{n}\sqrt{1+\underbrace{\frac{\log n}{n}}_{\to 0}} \sim \sqrt{n}$$

comportamento asintotico analogo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n+\log n}}{\sqrt{n}} = 1$$

$$\log(n^n+n!) = \log\Big(n^n\big(1+\underbrace{\frac{n!}{n^n}}_{\to 0}\big)\Big) = \log n^n + \underbrace{\log\left(1+\frac{n!}{n^n}\right)}_{\to 0}.$$

$$\sim n\log n$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(n^n+n!)}{n\log n} = 1$$

$$\sqrt{n} - \sin(n^5) = \sqrt{n}\left(1-\frac{\sin n^5}{\sqrt{n}}\right) \sim \sqrt{n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}-\sin(n^5)}{\sqrt{n}} = 1$$

$$b_n = \frac{\sqrt{n} - \sin(n^5)}{\sqrt{n+\log n}\cdot \log(n^4+n!)} \simeq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}\; n\log n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{\sqrt{n}}}{\cancel{\sqrt{n}}\; n \log n} = 0 \qquad \text{C.N.}$$

la $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\log n}$ è una serie divergente positivamente

$$\Rightarrow +\sum b_n \sim \sum \frac{1}{n\log n} \Rightarrow \text{diverge positivamente}$$

$$-\sum b_n = \sum a_n \qquad \text{diverge negativamente}$$

• Calcolare la somma delle seguenti serie:

$$1)\quad \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{(\log 10)^n}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z$$

$$z \in \mathbb{C}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n (-1) \frac{(\log 10)^n}{n!} = \qquad (*)\ \big((-1)(\log 10)\big)^n$$

$$= -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\log 10)^n}{n!} = -e^{-\log 10} = -e^{\log 10^{-1}} = -\frac{1}{10}$$

$$z = -\log 10$$

2) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^3-1}{n!} = \sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{n^2}{n!}-\frac{1}{n!}\right) =$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n^2}{n!} - \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n!} = \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{n\cdot \cancel{n}}{\cancel{n}\cdot(n-1)!} - \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n!} =$$

posto:

$n-1 = k$

$n = k+1$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k+1}{k!} - \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n!} =$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{k}{k!}+\frac{1}{k!}\right) - \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n!} =$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cancel{k}}{\cancel{k}\,(k-1)!}$$

pongo

$k-1 = n$

$k = n+1$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!} + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!} - \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n!}} = \underline{e+1}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!} + 1 + \cancel{\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n!}} - \cancel{\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n!}}$$

CONSIDERAZIONI CONCLUSIVE $\longrightarrow$ SERIE

1) CONVERGENZA ASSOLUTA

$\sum a_n$ è A.C. se converge $\sum |a_n|$

2) TEOR. $\sum a_n$

conv. ass. $\rightarrow$ convergenza

$\cancel{\Leftarrow}$

NO:

es: $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n} = \log 2$ // $\sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{1}{n} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$

conv. semplice — non converge (serie armonica)

- convergente

- assolutamente convergente

- semplicemente convergente : sono serie non assolutamente convergenti, ma solo convergenti.