TEST DI META' CORSO A.A. 2009-10

es 1 $\quad A = \left\{ a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + 3 \ , \ n \in \mathbb{N}^+ \right\}$

studiare l'insieme A

$b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ successione crescente limitata

$b_1 = (1+1)^1 = 2$

$\lim_{n \to +\infty} b_n = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ (limite notevole)

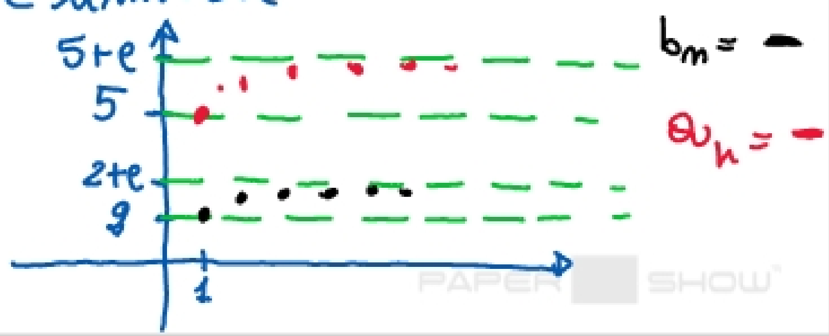
$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + 3$ è la b_n traslata di 3 unità verso l'alto

$\Rightarrow$ monotona crescente limitata

quindi

$\min A = 5$

$\sup A = 5 + e$



es2 $z \in \mathbb{C}$: $\left(|z-3|^2-(5)^2\right)\left(|z|+6\right)=0$

è l'insieme dei punti costituito da:

N.B. il prodotto vale zero se ciascun fattore vale zero:

$(|z|+6)=0$

$|z|=-6$ impossibile

$(|z|\geq 0)$

se $z=x+iy$

$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$

quindi

$\sqrt{x^2+y^2}=-6$ imp.

$\left(|z-3|^2-(5)^2\right)=0$

sostituendo $z=x+iy$

$|x+iy-3|^2-25=0$

$|(x-3)+iy|^2=25$

$(x-3)^2+y^2=25$

rappresenta una circonferenza (confrontato con la formula base)

di centro $(3,0)$

raggio $R=5$

es3 $\lim_{n\to+\infty} \frac{(n!)^{n-1} - ((n-1)!)^n}{[(n-1)!\ (n-3)]^{n-1}} + (-1)^n \frac{\sin\left(\frac{3}{n+1}\right)}{n!} =$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{[(n-1)!]^{n-1}}\left[\frac{(n!)^{n-1}}{[(n-1)!]^{n-1}} - \frac{[(n-1)!]^n}{[(n-1)!]^{n-1}}\right]}{\cancel{[(n-1)!]^{n-1}}(n-3)^{n-1}} + \underbrace{(-1)^n \frac{\overset{[-1,\,1]}{\sin\frac{3}{n+1}}}{n!}}_{\downarrow\, 0} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n)^{n-1}\cancel{[(n-1)!]^{n-1}}}{\cancel{[(n-1)!]^{n-1}}} - \frac{\cancel{[(n-1)!]^{n-1}}\cdot[(n-1)!]}{\cancel{[(n-1)!]^{n-1}}}}{(n-3)^{n-1}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n)^{n-1}\left[1 - \overset{\to 0}{\frac{(n-1)!}{n^{n-1}}}\right]}{(n-3)^{n-1}} =$$

$$\frac{(n-1)!}{n^{n-1}} = \frac{(n-1)!}{n^{n-1}}\cdot\frac{n}{n} = \frac{n!}{n^n} \to 0$$

per confronto asintotico

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n-3}\right)^{n-1} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n-3}{n}\right)^{1-n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(1-\frac{3}{n}\right)^{1-n} = \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\left(1-\frac{3}{n}\right)}_{\downarrow\,1}{}^{1}\cdot\left[\left(1-\frac{3}{n}\right)^{-\frac{n}{3}}\right]^3 = e^3$$

es 4

Sia $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione reale. Quale delle seguenti affermazioni risulta la NEGAZIONE della definizione di

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 3$$

A) $\forall \varepsilon>0 \; \exists n_0 \; \exists n\geq n_0 : |a_n-3| > \varepsilon$

B) $\exists \varepsilon>0 : \forall n_0 \; \exists n\geq n_0 : |a_n-3| > \varepsilon$

C) $\exists \varepsilon>0 , \; \exists n_0 : \; \forall n\geq n_0 \; |a_n-3| > \varepsilon$

D) $\forall \varepsilon>0 \; \exists n_0 : \; \forall n\geq n_0 \; |a_n-3| \geq \varepsilon$

E) $\forall \varepsilon>0 \; \exists n_0 : \; \forall n\geq n_0 \; |a_n| \geq \varepsilon$

F) $\forall \varepsilon>0 \; \exists n_0 : \; \forall n\geq n_0 \; |a_n| \leq \varepsilon$

es 5

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n)^{n/3}}{(2n)!}$$

applicando il criterio del rapporto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{\frac{n+1}{3}}}{(2(n+1)!)} \cdot \frac{(2n)!}{n^{n/3}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{\frac{n}{3}}(n+1)^{\frac{1}{3}}}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{n^{n/3}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{n}{3}} \frac{(n+1)^{1/3}}{(2n+2)(2n+1)} \cdot \frac{\cancel{(2n)!}}{\cancel{(2n)!}} =$$

sviluppato il fattoriale

$$= \lim_{n\to+\infty} \underbrace{\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^{1/3}}_{e^{1/3}} \underbrace{\frac{n^{\frac{1}{3}}\left(1+\underset{\to 0}{\frac{1}{n}}\right)^{1/3}}{n\left(2+\underset{\to 0}{\frac{2}{n}}\right)n\left(2+\underset{\to 0}{\frac{1}{n}}\right)}}_{\to 0} = 0 < 1 \text{ converge}$$

$$\left[n^{1/3} \,/\, n^2\right]$$