ESPONENZIALE

$$a^b = c$$

$a > 0$, $a \neq 1$

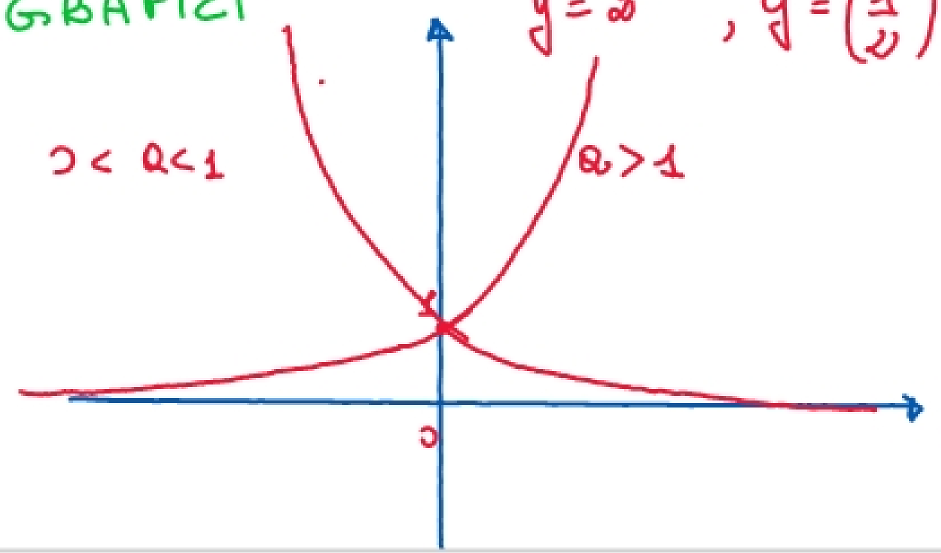
$b \in \mathbb{R}$

$c \in \mathbb{R}^+$

$y = a^x$

GRAFICI

$y = 2^x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



LOGARITMO

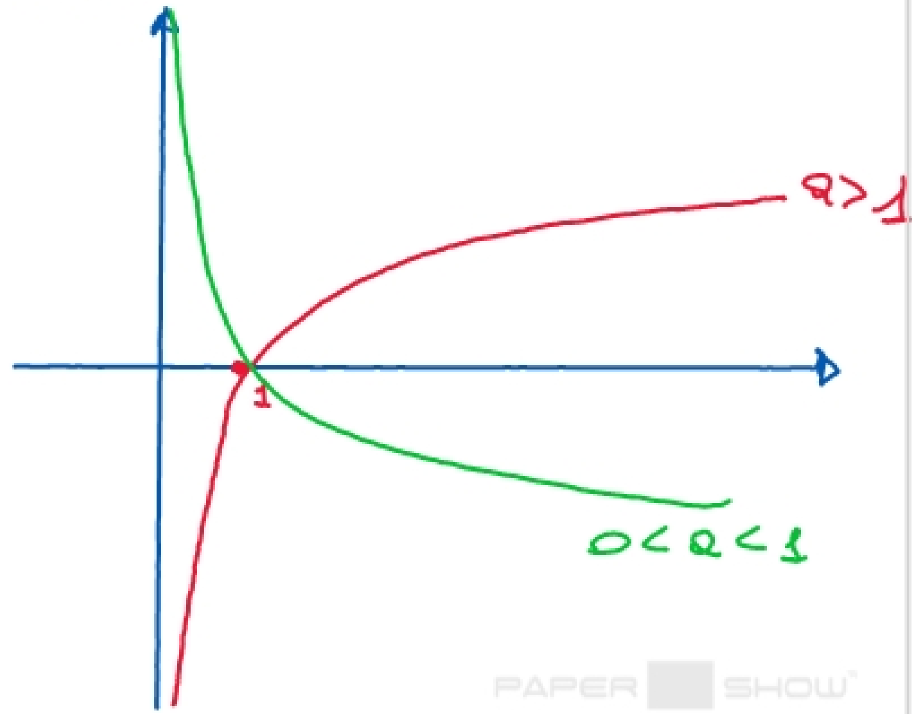
$$b = \log_a c$$

def: "l'esponente da dare alla base per ottenere l'argomento

$\boxed{c \in \mathbb{R}^+}$ argomento > 0

$a > 0$, $a \neq 1$ base

$b \in \mathbb{R}$ valore



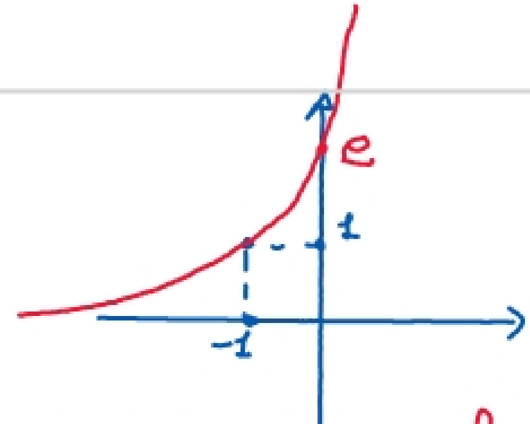
GRAFICI

$y = e^x \longrightarrow y = e^{x+1}$

$y = f(x)$

$y = f(x+1)$

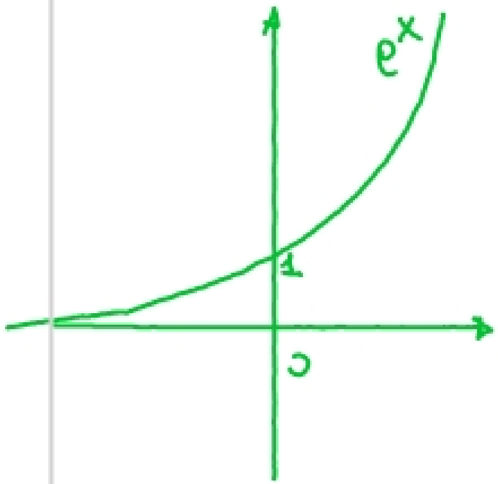
$f(x+h)$



Trasformazione $x \to x+h$

$x+1=0$

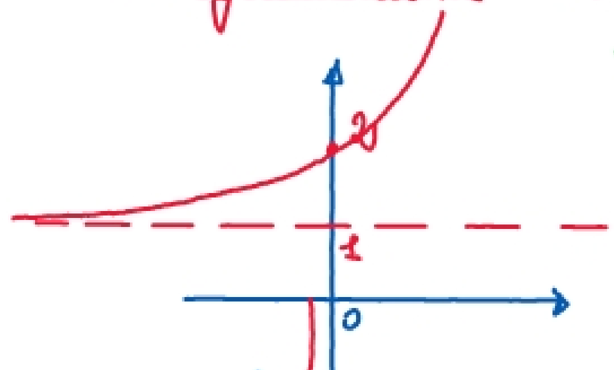
$x=-1$



$y = e^x + 1$

$y = f(x) + 1$

$f(x) + K$



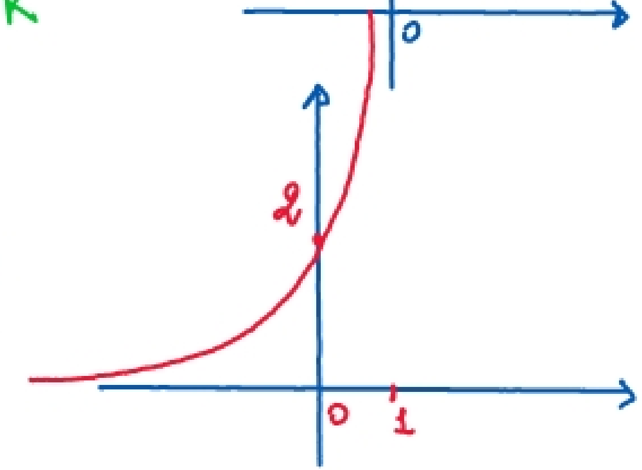
Trasformazione:

$y \to y+1$

$y = 2e^x$

$y = 2f(x)$

$K f(x)$

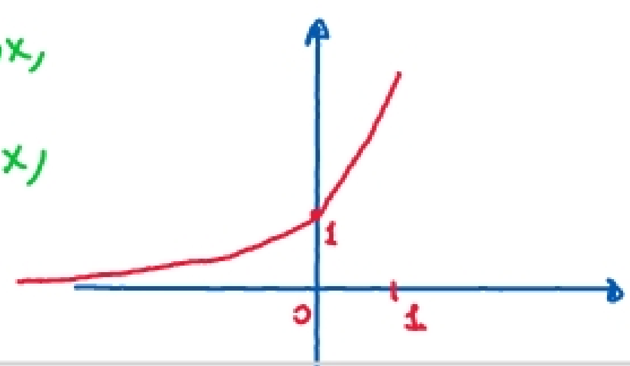


si alza più velocemente

$y = e^{2x}$

$y = f(2x)$

$f(kx)$



si modifica la rapidità di crescita

deduzione del grafico di $y=|e^{x-1}-2|$ da $y=e^x$

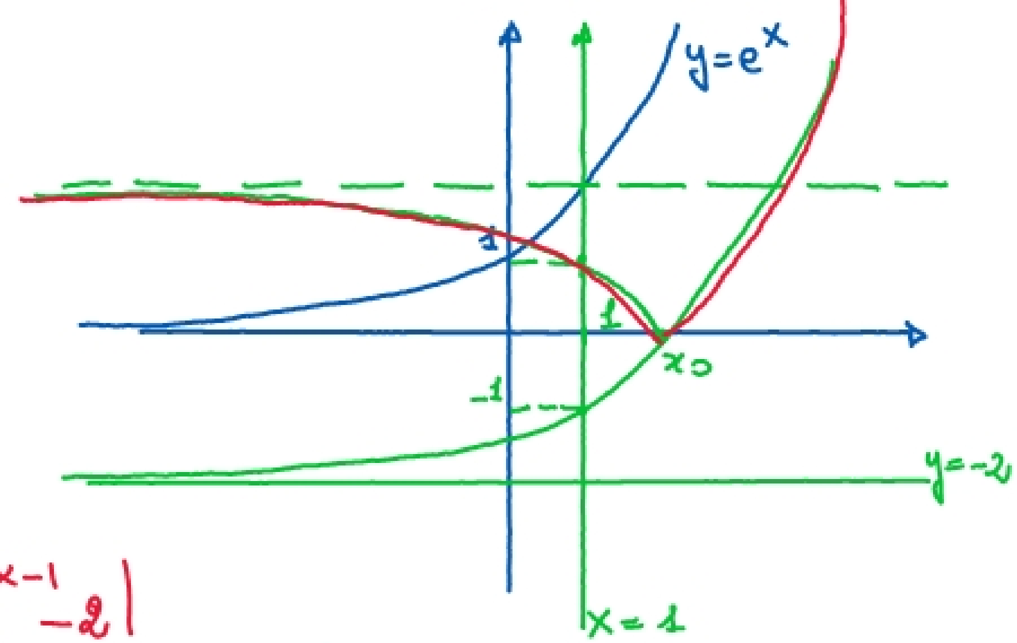
Trasformazioni

$y=e^x \to y=e^{x-1}$ Traslazione dell'asse delle ordinate verso destra di 1 unità (nuova origine in $x=1$)

$y=e^{x-1} \to y=e^{x-1}-2$ Traslazione dell'asse delle ascisse verso il basso di 2 unità (nuova origine in $y=-2$)

$y=e^{x-1}-2 \to y=|e^{x-1}-2|$

(ribaltamento) simmetria rispetto l'asse delle ascisse



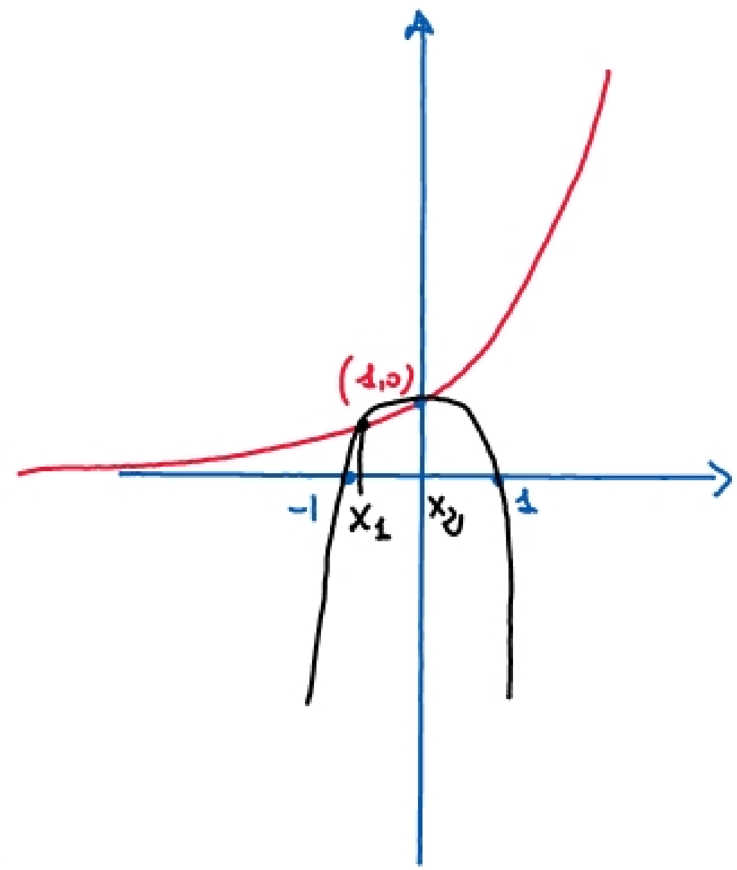
— tratto finale $y=|e^{x-1}-2|$

x_0: $|e^{x-1}-2|=0$ $\quad e^{x-1}=2$ $\quad \log_e e^{x-1}=\log_e 2$

$\log_e e\,(x-1)=\log_e 2 \to x=\frac{\log_e 2+\log_e e}{\log_e e}$

Risolvere graficamente il seguente sistema:

$$\begin{cases} y = 3^x & (1) \\ y = 1 - x^2 & (2) \end{cases}$$



(1) $y = 3^x$ esponenziale con base > 1

$y = 1 - x^2$ parabola

$V\ (0,1)$

intersezione con gli assi

$A\ (1,0)$ $B(-1,0)$

confronti se $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y_e = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \approx 1,7 \\ y_p = 1 - \frac{1}{4} = 3/4 \end{cases}$

$\begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y_e = 3^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sim 0,58 \\ y_p = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0,75 \end{cases}$

soluzioni $x_1 \in [-1,0)$ $x_2 = 0$

PROPRIETA'

DELLE POTENZE / ESPONENZIALI

$y = a^x$ [$a > 0$, $a \neq 1$]

$x = 0 \quad a^0 = 1$

$x = 1 \quad a^1 = a$

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$a^m : a^n = a^{m-n}$

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

$(a^n \cdot b^n) = (a \cdot b)^n$

$(a^n : b^n) = (a : b)^n$

$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$

LOGARITMI

$y = \log_a x$ $\quad x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$

$\log_a 1 = 0$

$\log_a a = 1$

$\log_a x + \log_a y = \log_a x \cdot y$ $\quad x, y \in R_0^+$

$\log_a x - \log_a y = \log_a \frac{x}{y}$

$\log_a x^n = n \log_a x \quad \forall n \in R$

cambiamenti di base:

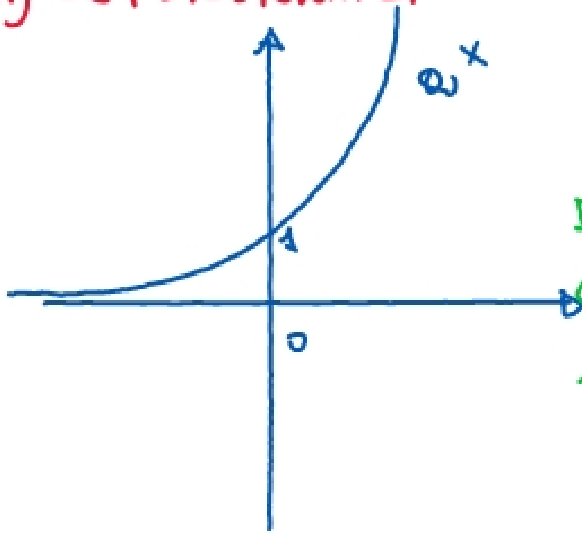
$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$

NOTAZIONI SULLE FUNZIONI:

A) ESPONENZIALI

$\boxed{a>1}$

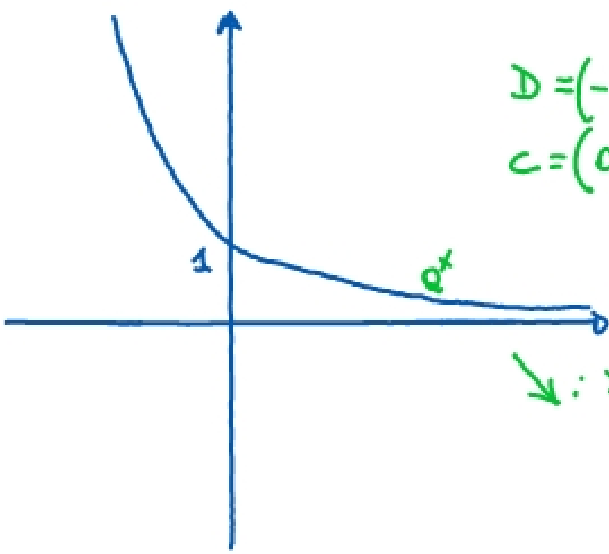


$D=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$

$C=(0,+\infty)=\mathbb{R}_0^+$

$\nearrow: x_1<x_2 \iff a^{x_1}<a^{x_2}$

$\boxed{0<a<1}$

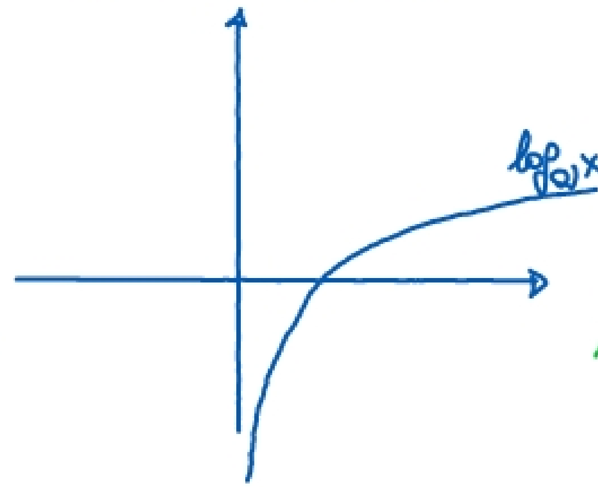


$D=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$

$C=(0,+\infty)\equiv\mathbb{R}_0^+$

$\searrow: x_1<x_2 \iff a^{x_1}>a^{x_2}$

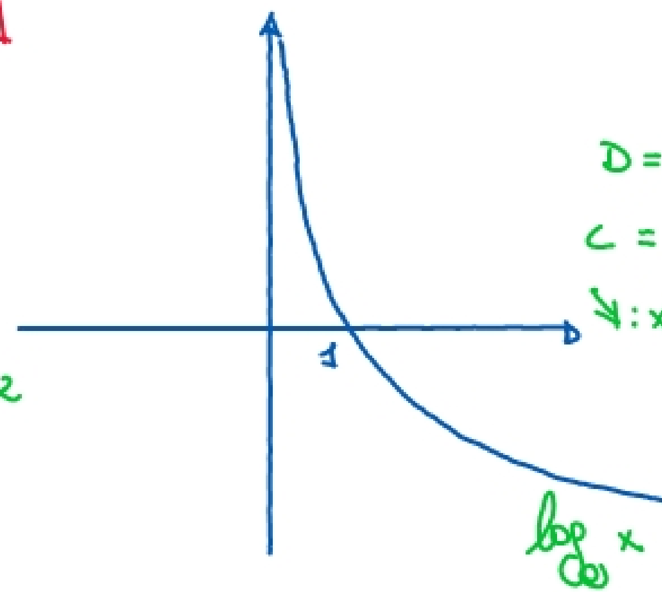
B) LOGARITHMICHE



$D=(0,+\infty)\equiv\mathbb{R}_0^+$

$C=(-\infty,+\infty)\equiv\mathbb{R}$

$\nearrow: x_1<x_2 \iff \log_a x_1<\log_a x_2$



$D=(0,+\infty)\equiv\mathbb{R}_0^+$

$C=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$

$\searrow: x_1<x_2 \iff \log_a x_1>\log_a x_2$

EQUAZIONI ESPONENZIALI

$3^x = 3^2$ $\qquad x = 2$ $\qquad$ uguagliando gli esponenti perché hanno la stessa base

$3^x = -3$ $\qquad$ IMPOSSIBILE

$3^x \neq -3$

$3^x > -3 \quad \forall x \in R$

$3^x < -3 \quad \nexists x \in R$

$$\left(\frac{1}{10}\right)^{4x} = 1000 \cdot 10^{(1-x)}$$

$$10^{-4x} = 10^3 \cdot 10^{1-x}$$

$$10^{-4x} = 10^{3+1-x} \qquad 10^{-4x} = 10^{4-x}$$

$$-4x = 4 - x \qquad x = -\frac{4}{3}$$

$$3^{2-8x} = 9^{3x+1}$$

$$3^{2-8x} = 3^{2(3x+1)} \qquad 2 - 8x = 6x + 2$$

$$14x = 0 \qquad x = 0$$

$$4^x - 2^{2x+1} = 2^{2x-1}$$

$$2^{2x} - 2^{2x} \cdot 2 - 2^{2x} \cdot 2^{-1} = 0$$

$$2^{2x}\left[1 - 2 - \frac{1}{2}\right] = 0 \qquad \text{IMP.}$$

$$4^x - 2^{2x+1} = 2^{2x-1} - 6$$

$$2^{2x}\left(-\frac{3}{2}\right) = -6 \qquad 2^{2x} = \frac{12}{3} = 4 = 2^2 \Rightarrow 2x = 2$$

$$x = 1$$

PROMEMORIA

1) 2 esponenziali con la stessa base sono = se sono = gli esponenti

$$a^m = a^n \iff m = n$$

2) confronto fra 2 esponenziali: (con la stessa base)

$$5^x > 5^{x^2+2} \iff x > x^2+2$$

$$\left(\frac{1}{5}\right)^x > \left(\frac{1}{5}\right)^{x^2+2} \iff x < x^2+2$$

attenzione al valore della base:

se $a>1$ si mantiene il verso alla disequazione

se $0<a<1$ si cambia il verso alla disequazione

$9^x = 6+3^x$: $\quad 3^{2x} - 3^x - 6 = 0$

$3^x = t \qquad t^2 - t - 6 = 0$

$(t-3)(t+2) = 0$

$t = 3 \Rightarrow 3^x = 3 \qquad x = 1$

$t = -2 \Rightarrow 3^x = -2 \qquad$ IMP.

$$\frac{2^{x+2}}{3} = 3^{x+1}$$

$$2^x \cdot 2^2 = 3^{x+1} \cdot 3$$

$$2^x \cdot 4 = 3^x \cdot \underbrace{3 \cdot 3}_{9}$$

$$\frac{2^x}{3^x} = \frac{9}{4} \Rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \Rightarrow x = -2$$

$$\begin{cases} 5^{x+y} = 125 \\ 7^{xy} = 49 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5^{x+y} = 5^3 \\ 7^{xy} = 7^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y = 3 & -s \\ xy = 2 & p \end{cases}$$

Sistema simmetrico:

$t^2 \overset{-s}{-3}t \overset{p}{+2} = 0 \qquad t = 1$

$(t-2)(t-1) = 0 \qquad t = 2$

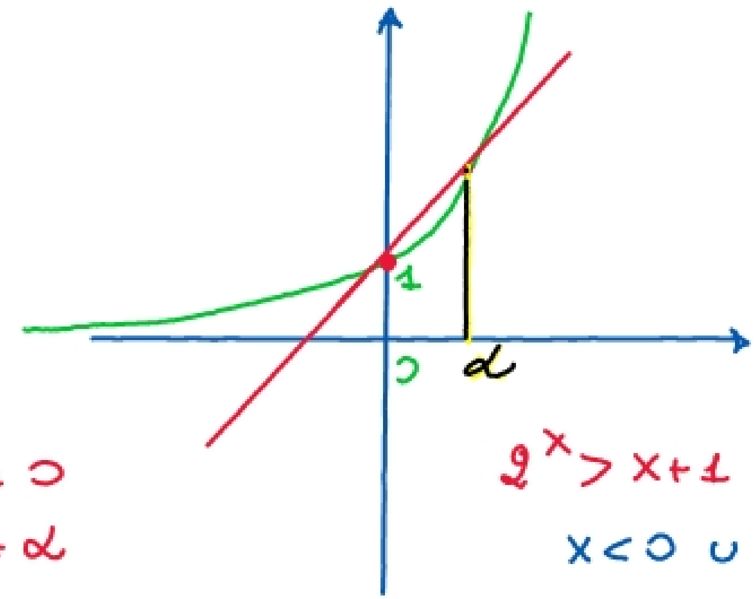
$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$$

RISOLUZIONE GRAFICA

$2^x = x + 1$

$y = 2^x$

$y = x + 1$



$x = 0$

$x = \alpha$

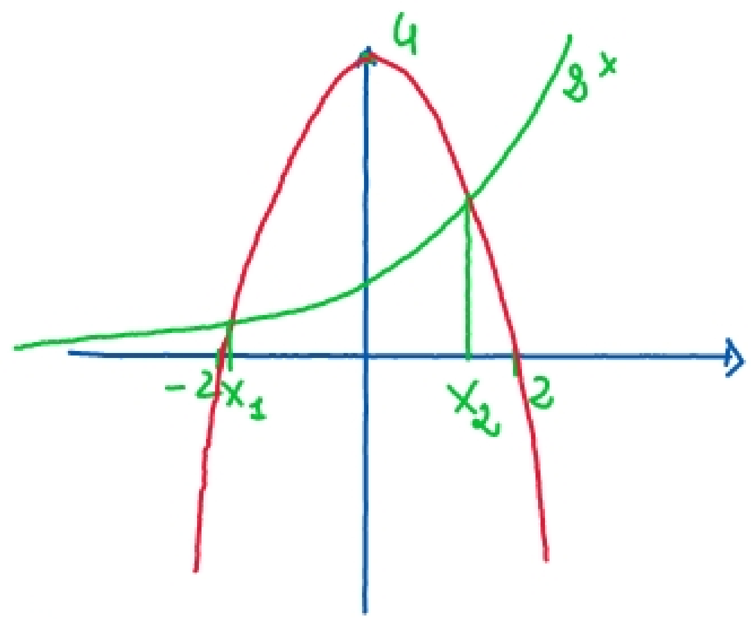
$2^x > x + 1$

$x < 0 \cup x > \alpha$

$x^2 + 2^x = 4$ $\qquad -x^2 + 4 = 2^x$

$y = 2^x$

$y = -x^2 + 4$



$x = x_1 \quad \& \quad x = x_2$

DISEQUAZIONI ESPONENZIALI

$5^x < 25$ $\quad$ $5^x < 5^2$ $\quad$ $x < 2$ $\quad$ N.B. base maggiore di 1

$\frac{1}{3^x} \geq 3$ $\quad$ $\left(\frac{1}{3}\right)^x \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$ $\quad$ $x \leq -1$ $\quad$ N.B. base $\in \left]0, 1\right[$

$4^x > 0$ $\quad$ $\forall x \in \mathbb{R}$

$4^x \leq 0$ $\quad$ $\nexists x \in \mathbb{R}$

$2^x \leq \frac{3^{x+3}}{8}$

$$2^x \cdot 2^3 \leq 3^{x+3}$$

$$2^{x+3} \leq 3^{x+3}$$

$$\frac{2^{x+3}}{3^{x+3}} \leq 1 \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^{x+3} \leq 1 = \left(\frac{2}{3}\right)^0$$

$$\Downarrow$$

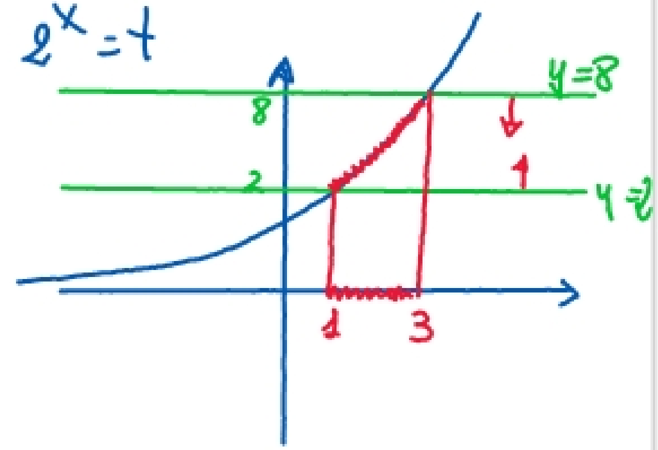
$$x+3 \geq 0 \qquad x \geq -3$$

N.B.: base $\in \left]0, 1\right[$

$4^x - 10\cdot 2^x + 16 < 0$

$2^{2x} - 10\cdot 2^x + 16 < 0$

$2^x = t$



$t^2 - 10t + 16 < 0$

$(t-8)(t-2) < 0$

$t_1 = 8$

$t_2 = 2$

$\Rightarrow \quad 2 < t < 8$

$\Downarrow$

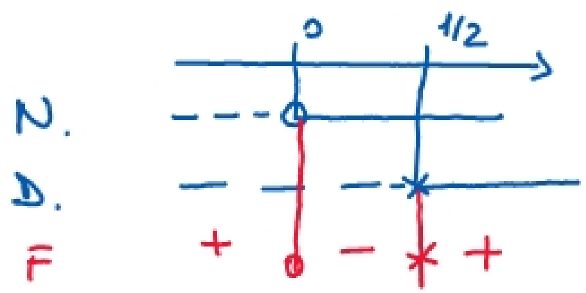
$2^1 = 2 < 2^x < 8 = 2^3$

$1 < x < 3$

$$\frac{2^x - 1}{9^x - 3} \le 0$$

N: $2^x - 1 \ge 0 \qquad 2^x \ge 1 = 2^0 \Rightarrow x \ge 0$

D: $9^x - 3 > 0 \qquad 3^{2x} > 3 = 3^1 \Rightarrow 2x > 1 \qquad x > \frac{1}{2}$



Intervallo di soluzione

$x \in [0, \frac{1}{2}[$

EQUAZIONI ESPONENZIALI
RISOLVIBILI CON I LOGARITMI

N.B. gli esponenziali sono quantità positive

$$3^{x-1} = 7^{1+x}$$

$$\log(3^{x-1}) = \log(7^{1+x})$$

$$(x-1)\log 3 = (1+x)\log 7$$

$$x(\log 3 - \log 7) = \log 7 + \log 3$$

$$x = \frac{\log 7 + \log 3}{\log 3 - \log 7} = \frac{\log 21}{\underbrace{\log \frac{3}{7}}_{<0}}$$

< 0

$$2^{x+3} = 64\cdot 3^{x-3}$$

$$\log 2^{x+3} = \log(64\cdot 3^{x-3})$$

$$(x+3)\log 2 = \log 64 + (x-3)\log 3$$

$$x(\log 2 - \log 3) = \underbrace{\log \underset{2^6}{64}}_{6\log 2} - 3\log 3 - 3\log 2$$

$$x = \frac{3\log 2 - 3\log 3}{\log 2 - \log 3} = \frac{3\log 2/3}{\log 2/3} = 3$$

$$2^x = 3$$

$$\log 2^x = \log 3 \quad \ldots\ldots$$

definizione : $x = \log_2 3$

PRO MEMORIA

1) due logaritmi con la stessa base sono uguali se sono uguali gli argomenti

2) confrontando fra loro due logaritmi con la stessa base:

$$\log_5 x > \log_5 (x^2+4) \iff \text{C.E.} \begin{cases} x>0 \\ x^2+4>0 \end{cases} \text{ e } x > x^2+4$$

$$\log_{\frac{1}{5}} x > \log_{\frac{1}{5}} (x^2+4) \iff \text{C.E.} \begin{cases} x>0 \\ x^2+4>0 \end{cases} \text{ e } x < x^2+4$$

attenzione al valore della base:

se $a>1$ si mantiene il verso della disequazione

se $0<a<1$ si cambia il verso della disequazione

DISEQUAZIONI ESPONENZIALI
RISOLVIBILI CON I LOG.

$5^x < 20$

$$\log_5 5^x < \log_5 20$$

$$x \cdot \underbrace{\log_5 5}_{1} < \log_5 20$$

$$x < \log_5 20 = 1 + \log_5 4$$

$2^x < 4 \cdot 3^x$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x < 4$$

$$\log \left(\frac{2}{3}\right)^x < \log 4$$

$$x \log(2/3) < \log 4$$

$$x > \frac{\log 4}{\log 2/3} = \frac{\log 4}{\log 2 - \log 3}$$

Attenzione

$0 < 2/3 < 1$

$\Downarrow$

$\log \frac{2}{3} < 0$

$$\log(x+8) = 2\log 3 - \log x$$

$$\begin{cases} x+8>0 \\ x>0 \\ \log(x+8)+\log x = \log 3^2 \end{cases}$$ cond. di esistenza

$$\begin{cases} x>0 \\ \log[x(x+8)] = \log 9 \end{cases} \Rightarrow \quad x^2+8x-9=0$$

$x_1=-9$ n. acc.

$x_2=1$ acc.

$$\log_3(2x+4)=2$$

$$\log_3(2x+4) = 2\cdot\log_3 3$$

$$\log_3(2x+4) = \log_3 3^2$$

$$\begin{cases} 2x+4>0 \\ 2x+4=9 \end{cases} \qquad \begin{cases} x>-2 \\ x=\frac{5}{2} \end{cases}$$ acc.

DISEQUAZIONI LOGARITMICHE

$\log_2 (x-1) < 1$

$$\log_2 (x-1) < \log_2 2$$

$$\begin{cases} x-1 > 0 \\ x-1 < 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 1 \\ x < 3 \end{cases} \Rightarrow 1 < x < 3$$

N.B. si mantiene il verso confrontando gli argomenti, perché la base è maggiore di 1

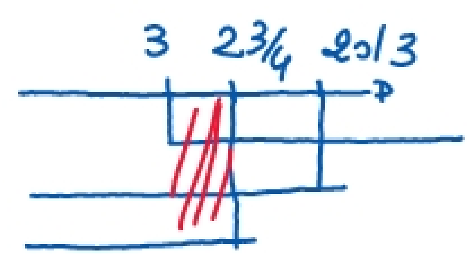
$\log_2 x > 3$

$$\log_2 x > 3 \cdot \log_2 2$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x > 2^3 \end{cases} \Rightarrow x > 8$$

$\log_{1/2} (x-3) > \log_{1/2} (20-3x)$ $\Rightarrow \left]3, 23/4\right[$

$$\begin{cases} x-3 > 0 \\ 20-3x > 0 \\ x-3 < 20-3x \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 3 \\ x < 20/3 \\ x < \frac{23}{4} \end{cases}$$

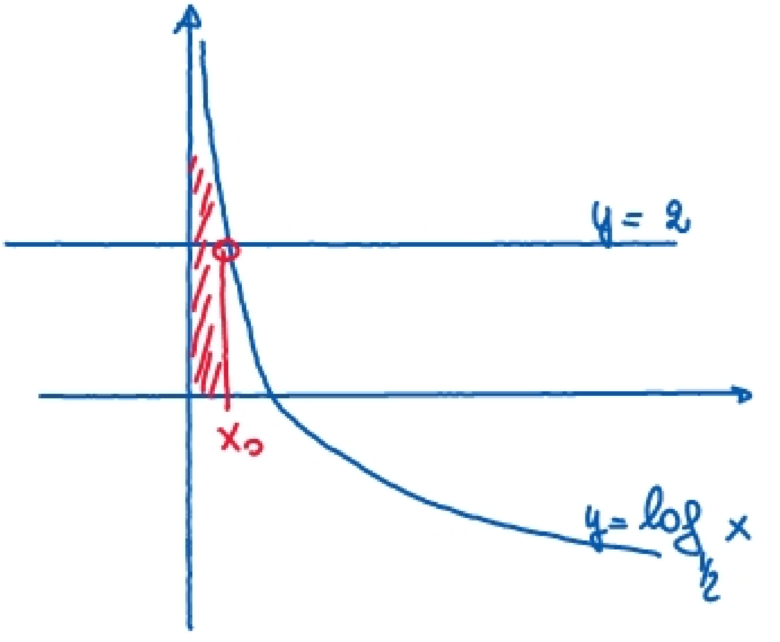


$\log_{1/2} x \geq 2$

risoluzione grafica

$y = \log_{1/2} x$

$y = 2$



calcolo algebrico del punto di intersezione

$\log_{1/2} x = 2 \qquad x = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \qquad x_0 = \frac{1}{4}$

soluzione $\quad 0 < x < \frac{1}{4}$

Risolvere il seguente sistema:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 3^{x+y} = 81 \end{cases}$$

si trasforma in un sistema lineare:

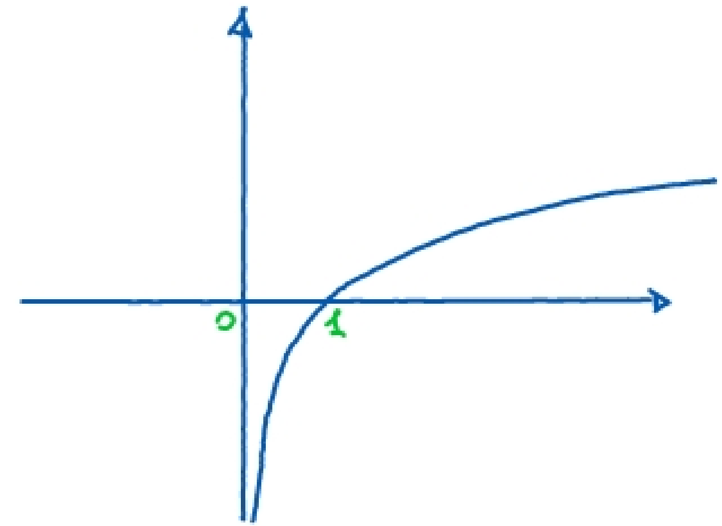
$$\begin{cases} x - y = 2 \\ 3^{x+y} = 3^4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

con il metodo di riduzione

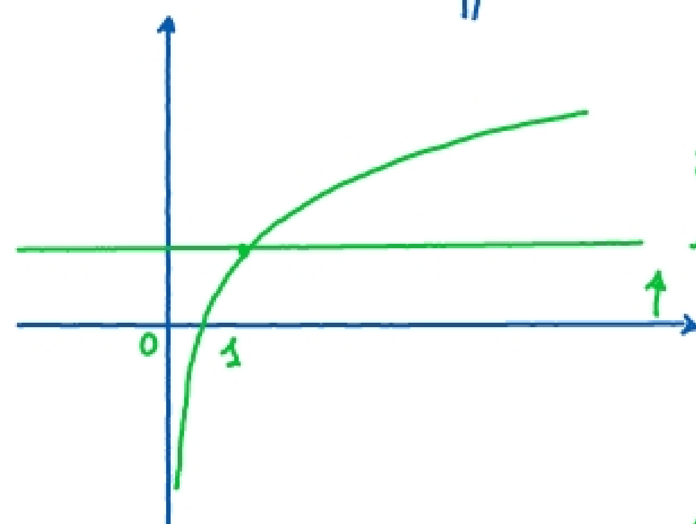
$$\begin{array}{l} 1^a + 2^a \\ 1^a - 2^a \end{array} \begin{cases} 2x = 6 \\ -2y = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases}$$

GRAFICI DEDUCIBILI DAI FONDAMENTALI MEDIANTE TRASFORMAZIONE

$y = \log x$

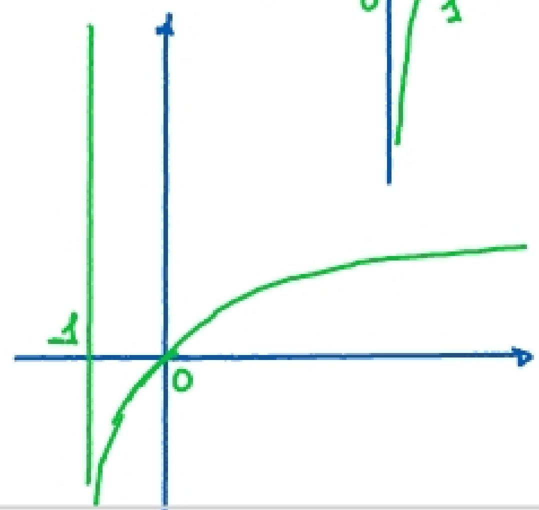


$y = \log x + 1$



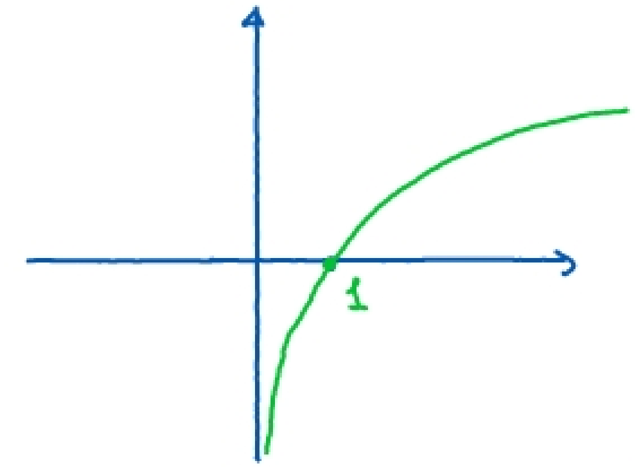
spostata verso l'alto di 1 unità

$y = \log(x+1)$



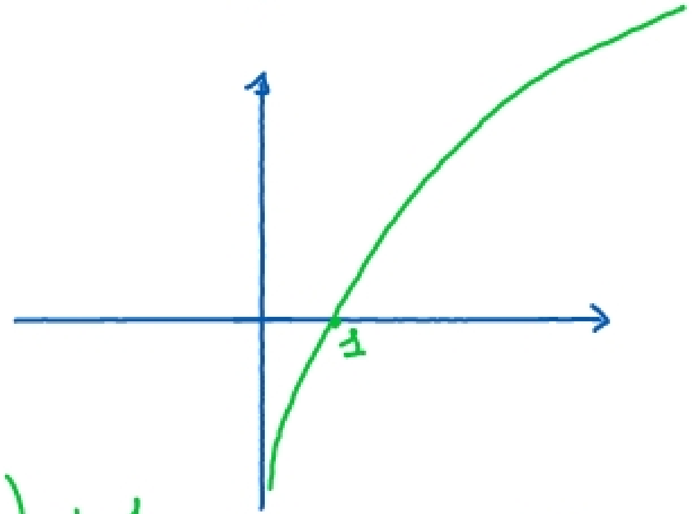
spostata verso sinistra di 1 unità

$y = \log(2x)$



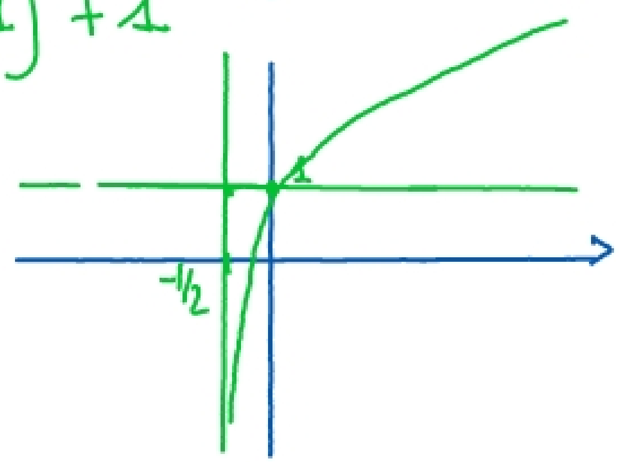
si modifica la crescita, modificando l'argomento

$y = 2 \log x$



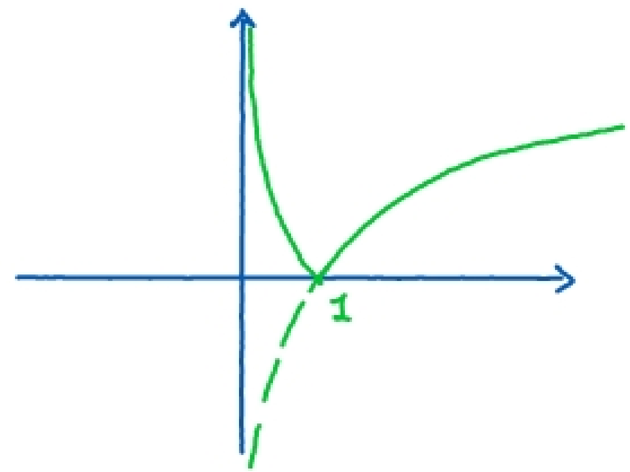
si modifica la rapidità di crescita, modificando il valore del log.

$y = 2 \log(2x+1) + 1$



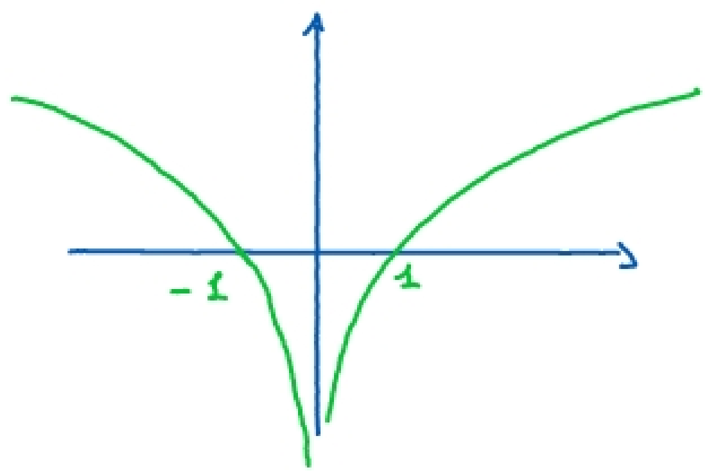
si sposta l'origine del suo sistema in $\left(-\frac{1}{2}, 1\right)$, amplificato di 2

$y = |\log x|$



simmetrizzazione rispetto l'asse delle ascisse delle parti negative.

$y = \log|x|$



simmetrizzazione rispetto l'asse delle ordinate.

RIASSUMENDO

$y = f(x)$

	TRASFORMATA
$y = f(x) + K$	✓ Traslazione della funzione di K valori in ordinate, verso l'alto o verso il basso
$y = f(x + h)$	✓ traslazione della funzione di h valori, verso destra o sinistra
$y = f(hx)$	✓ modificazione del valore in ascisse di h valori (modifica eventuale del periodo)
$y = K \cdot f(x)$	✓ modificazione del valore di ordinate di K valori (dilatazione o contrazione)
$y = f(\lvert x \rvert)$	✓ simmetria della curva rispetto l'asse delle ascisse delle parti positive
$y = \lvert f(x) \rvert$	✓ simmetria della curva rispetto l'asse delle ordinate delle parti positive