L'INSIEME DEI REALI

1) COEFFICIENTE BINOMIALE

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$ con $0 \leq k \leq n$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$

algebra:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,\underbrace{(n-(n-k))!}_{k!}}$$

$$\binom{n}{k+1} = \frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k}$$

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

$$\binom{n}{1} = n$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

applicazione:

$\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$(2x-3y)^5 =$$

[vedi soluzione pag3]

SVOLGIMENTO

$$\binom{n}{k+1} = \frac{n!}{(k+1)!\,(n-k-1)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

$$k!\cdot(k+1)$$

$$(n-(k+1))! = (n-k)!\,(k+1)$$

Ricordo che:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)\,\cancel{(n-k)!}}{k!\cdot\cancel{(n-k)!}} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$$

(si può usare questa espressione per dimostrare le relazioni)

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = \frac{n\,(n-1)!}{(n-1)!} = n$$

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!\;n!} = 1 = \frac{n!}{n!\,(n-n)!} = \binom{n}{n}$$

$$(2x-3y)^5 =$$

$$= 1\cdot(2x)^5\cdot(-3y)^0 + 5\cdot(2x)^4\cdot(-3y)^1 + 10(2x)^3(-3y)^2 +$$

$$+ 10(2x)^2(-3y)^3 + 5(2x)^1(-3y)^4 + 1\cdot(2x)^0(-3y)^5$$

(N.B. Tralasciare gli ultimi calcoli)

$$(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$$

$$\begin{cases} a = 2x \\ b = -3y \\ n = 5 \end{cases}$$

<u>$n=5$</u>:

$k=0 \quad \binom{5}{0} = 1$

$k=1 \quad \binom{5}{1} = \dfrac{5!}{1!\cdot 4!} = \dfrac{5\cdot\cancel{4!}}{\cancel{4!}} = 5$

$k=2 \quad \binom{5}{2} = \dfrac{5!}{2!\ 3!} = \dfrac{5\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot 2}{\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}} = 10$

$k=3 \quad \binom{5}{3} = \dfrac{5!}{3!\cdot 2!} = \dfrac{5\cdot 4\cdot\cancel{3}\cdot 2}{\cancel{3}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{2}} = 10$

$k=4 \quad \binom{5}{4} = \dfrac{5!}{4!\ 1!} = \dfrac{5\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}}{\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}} = 5$

$k=5 \quad \binom{5}{5} = \dfrac{5!}{5!\cdot 0!} = 1$

TRIANGOLO DI TARTAGLIA

$n=0$						1					
$n=1$					1		1				
$n=2$				1		2		1			
$n=3$			1		3		3		1		
$n=4$		1		4		6		4		1	
$n=5$	1		5		10		10		5		1

coefficienti per lo sviluppo

2) FATTORIALE

$$n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-n+1)$$

$$1! = 1$$

$$0! = 1$$

Calcolare:

$$\frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n\,(n-1)!}{(n-1)!} = n$$

$$\frac{n!}{n} = \frac{n\,(n-1)!}{n} = (n-1)!$$

$[n \in N]$

Calcolare

$$\binom{n-1}{2} < \binom{n+1}{4} \quad ?$$

Trascriverlo nella sua espressione estesa

$$\frac{(n-1)!}{\underbrace{2!\,\cancel{(n-3)!}}_{>0}} \overset{gw}{<} \frac{(n+1)!}{\underbrace{4!\,\cancel{(n-3)!}}_{>0}}$$

$$(n-1)! < \frac{(n+1)!\cdot\cancel{2!}}{4\cdot3\cdot\cancel{2!}}$$

$$(n-\cancel{1})^{1}! < \frac{(n+1)\,n\,\cancel{(n-1)!}}{12}$$

$$n^2+n-12>0$$

$$(n+4)(n-3)>0$$

disep 2° grado $\quad n<-4 \cup \boxed{n>3}$

non acc.

PREMESSE DI CALCOLO

$$(-1)^n = \begin{cases} +1 & n = 2m \text{, pari} \\ -1 & n = 2m+1 \text{, dispari} \end{cases}$$

$n \in \mathbb{N}$

$m \in \mathbb{N}$

$$\cos n\pi = \begin{cases} 1 & n = 2m \\ -1 & n = 2m+1 \end{cases}$$

(attenzione vale anche per i valori negativi interi)

$$\cos n\frac{\pi}{2} = \begin{cases} \pm 1 & n = 2m \\ 0 & n = 2m+1 \end{cases}$$

Attenzione

$-1 \leq \cos n \leq 1$

$-1 \leq \operatorname{sen} n \leq 1$

$$\operatorname{sen} n\pi = 0 \qquad \forall n$$

$$\operatorname{sen} n\frac{\pi}{2} = \begin{cases} 0 & n = 2m \\ \pm 1 & n = 2m+1 \end{cases}$$

Si consideri il seguente insieme:

$$A = \{ x \in \mathbb{R} : 1 < x < 5 \}$$

analizzare, i suoi punti

$x \in \mathbb{R}$

$x < 1$ punti esterni

$x > 5$ punti esterni

$\sup A = 5$ $\quad 5 \in A$? $\quad 5 \notin A$ $\quad$ 5 punto di frontiera (punto di accumulazione)

$\max A \nexists$ non c'è

$\inf A = 1$ $\quad 1 \notin A$ $\quad$ 1 punto di frontiera

$\min A \nexists$ non esiste

$1 < x < 5$ valori di A e sono punti interni

• Dato l'insieme $A = \left\{ x_n = (-1)^n \cdot 2 + \frac{1}{n} \,,\ n \in \mathbb{N} \right\}$,

determinarne le sue caratteristiche

L'insieme A è così costituito:

$$A = \Big\{ \underbrace{-1}_{n=1},\ \overbrace{2+\tfrac{1}{2}}^{n=2},\ \underbrace{-2+\tfrac{1}{3}}_{n=3},\ \overbrace{2+\tfrac{1}{4}}^{n=4},\ \dots \Big\}$$

infiniti elementi con le seguenti caratteristiche

n pari $\quad 2 < x_n \leq 5/2 \; (= 2{,}5) \qquad (n = 2m)$

n dispari $\quad -2 < x_n < 0 \qquad (n = 2m+1)$

$\Rightarrow$ A è limitato inferiormente e superiormente:

(-2) è di accumulazione per A: $(-2) = \inf A$

(2) è di accumulazione per A

$(5/2)$ è il massimo di A $\qquad (5/2) = \max$ di A

• tutti gli x_n sono isolati

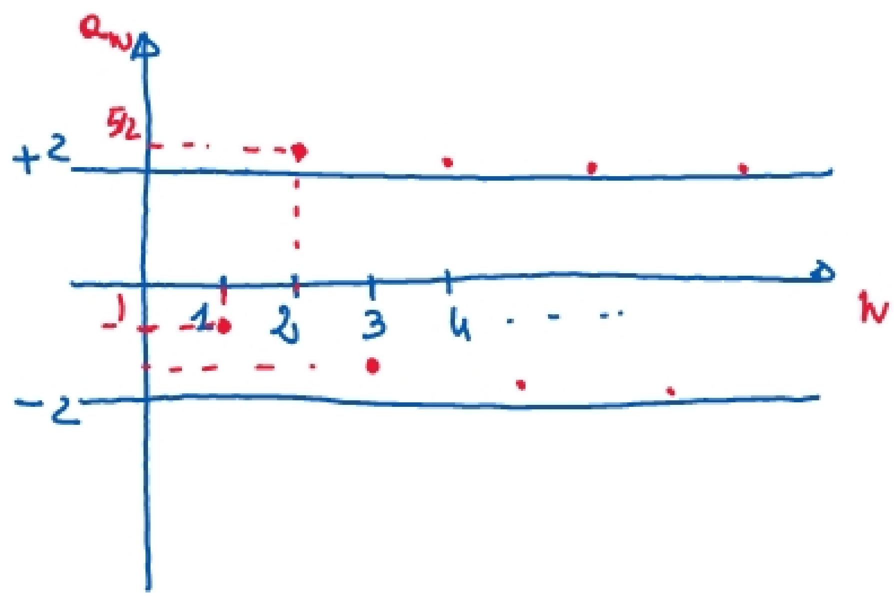
$F(A) = A$ la frontiera di A è l'insieme stesso

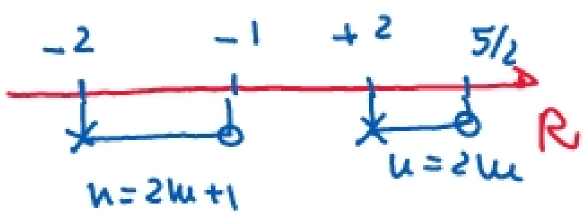
Gli elementi dell'insieme possono venir scritti:

$a_n = b_n + c_n$

$c_n = \frac{1}{n}$ $\qquad 0 < c_n \leq 1 \quad (n=1)$

$$b_n = (-1)^n \cdot 2 = \begin{cases} a_{2m} = 2 & n = 2m \quad (\text{pari}) \\ a_{2m+1} = -2 & n = 2m+1 \quad (\text{dispari}) \end{cases}$$





Data l'insieme $A = \left\{ \frac{2n+3}{5n} ,\ n \in \mathbb{N} ,\ n \geq 1 \right\}$

Trovare inf A, sup A. (usare la definizione)

Termine generale: $\frac{2n+3}{5n} = \frac{2n}{5n} + \frac{3}{5n} = \frac{2}{5} + \frac{3}{5n}$

$n=1$ $\quad a_1 = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1$ $\quad$ sup, maggiorante $\Rightarrow 1 = \max A$

$n>1$ $\quad b_n = \frac{3}{5n} \rightsquigarrow 0$ per $n \nearrow$

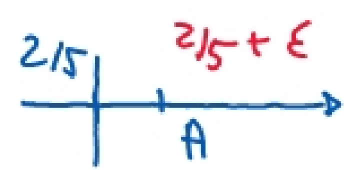
[all'aumentare di n b_n tende a zero]

$\Rightarrow \quad a_n > \frac{2}{5} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\left(\frac{2}{5}\right)$ è un minorante $\Rightarrow \inf A = \frac{2}{5}$

definizione di "inf":

$$\left[\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, a \in A : a < \frac{2}{5} + \varepsilon \right]$$



$a = a_n = \frac{2}{5} + \frac{3}{5n}$

disuguaglianza: $\cancel{\frac{2}{5}} + \frac{3}{5n} < \cancel{\frac{2}{5}} + \varepsilon$ da definizione

$\frac{3}{5n} < \varepsilon$ confrontando i reciproci $\frac{5}{3}n > \frac{1}{\varepsilon}$

$n > \frac{3}{5\varepsilon}$

verificato che al variare di ε esiste un valore

n naturale che individua un valore termine di a,

a_n che soddisfa la definizione.

3) STUDIO DELL' INSIEME: dato un insieme stabilire le caratteristiche

es 1 $A = \left\{ x_n = \frac{2n+1}{n} \,,\, n \in \mathbb{N} \right\}$ stabilire se è limitato o non limitato

$(n \neq 0)$ $\quad x_1 = 3 \quad (n=1)$

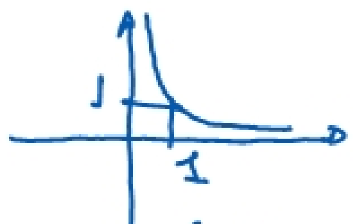
$x_2 = 5/2$

$x_3 = 7/3$

$\Rightarrow A = \left\{ 3, 5/2, 7/3, \ldots\ldots, 2 + \frac{1}{n} \right\}$

$x_n = \frac{2n+1}{n} = \frac{2n}{n} + \frac{1}{n} = 2 + \frac{1}{n}$

($y = \frac{1}{x}$ $\quad x > 0$



decrescente)

$\Rightarrow$ MAX $A = 3$ (l'insieme è superiormente limitato, ammette massimo)

$\Rightarrow$ la quantità $\left(\frac{1}{n}\right)$ diminuisce al crescere di n, è infinitesima ma non si annulla mai. $\Rightarrow \inf A = 2$

def: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_n \in A : 2 < x_n < 2 + \varepsilon$;

$2 < 2 + \frac{1}{n} < 2 + \varepsilon \qquad \bar{n} > \frac{1}{\varepsilon}$

es 2 $A = \left\{ \sqrt{n+49} - \sqrt{n} \ , n \in \mathbb{N} \right\}$ (Tema d'esame del 7/09/2005)

Termini dell'insieme:

$a_0 = \sqrt{49} = 7 = 49 \cdot \frac{1}{\sqrt{49}}$

$a_1 = \sqrt{50} - 1 = \frac{49}{\sqrt{50}+1}$ (N.B. confrontare i valori)

$a_2 = \sqrt{51} - \sqrt{2}$

$a_3 = \sqrt{52} - \sqrt{3}$

$\vdots$

$a_n = \left(\sqrt{n+49} - \sqrt{n}\right) \cdot \frac{\sqrt{n+49}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+49}+\sqrt{n}} =$

$= \frac{n+49-n}{\sqrt{n+49}+\sqrt{n}} =$

$= \frac{49}{\sqrt{n+49}+\sqrt{n}}$

1) $a_n = \sqrt{n+49} - \sqrt{n} = \frac{49}{\sqrt{n+49}+\sqrt{n}}$

denominatore cresce, a_n è decrescente

2) $a_0 > a_1 > a_2 > \dots > a_n \underline{> 0}$

max $A = 7$ (sup A)

min A $\nexists$

inf $A = 0$

(N.B. 0 pt. di accumulazione per l'insieme A)

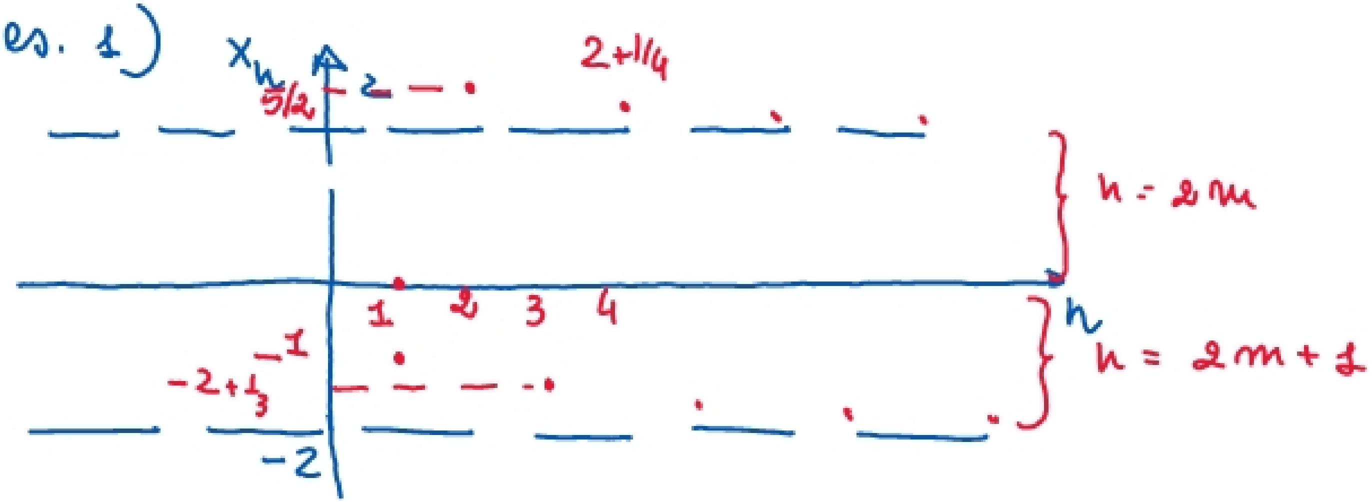
es 3. $A = \left\{ x_n = (-1)^n 2 + \frac{1}{n} , \ n \in \mathbb{N} \right\}$

alternanza di valori (positivi e negativi)

n pari $n = 2m$ n dispari $n = 2m+1$

$x_{2m} = 2 + \frac{1}{2n}$ $x_{2m+1} = -2 + \frac{1}{2m+1}$

(N.B. vedi es. 1)



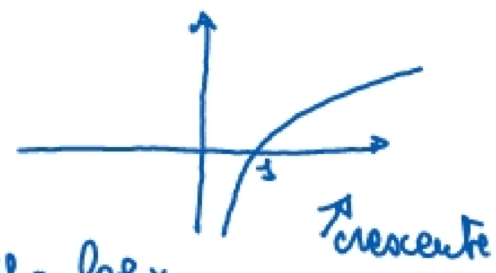
A limitato

max A = 5/2

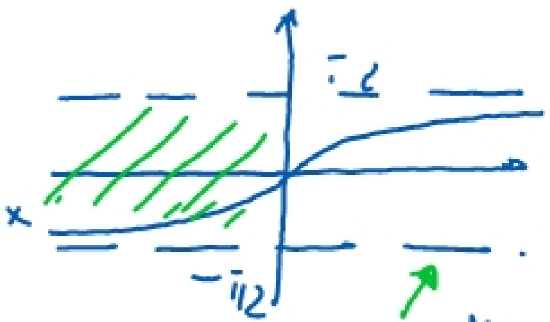
inf A = -2

es 4 : $A = \left\{ 13 \operatorname{arctg}\left[\log\left(\frac{6n+1}{n^2}\right)\right],\ n \in \mathbb{Z}^+ \right\}$ (Tema d'esame 05/07/07)

Richiami grafici



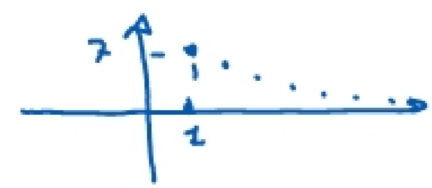
$y = \log x$



$y = \operatorname{arctg} x$

l'espressione: $b_n = \frac{6n+1}{n^2} = \frac{6}{n} + \frac{1}{n^2}$ è limitata, a valori positivi e decrescente

$n = 1 \quad b_1 = 7 \quad \max(b_n) = 7$



per confronto:

$$0 < b_n \le 7$$

$$\log 0 < \log b_n \le \log 7 \quad \text{applico l'operatore log}$$

$$-\infty < \log b_n \le \log 7 \quad \text{applico l'operatore arctg}$$

$$\operatorname{arctg}(-\infty) < \operatorname{arctg} \log b_n \le \operatorname{arctg} \log 7$$

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} \log b_n \le \operatorname{arctg} \log 7 \quad \text{moltiplico (13,}$$

$$-\frac{13}{2}\pi < 13 \operatorname{arctg} \log b_n \le 13 \operatorname{arctg} \log 7$$

$\inf A = -\frac{13}{2}\pi$ (no min A) $\max A = \sup A = 13 \operatorname{arctg} \log 7$

es 5 : $A = \{ x_n = \log_4 \left(1 + \frac{1}{n}\right), n \in \mathbb{N} \}$

indicazione, insieme per elencazione: $A = \{ \log_4 2, \log_4 \frac{3}{2}, \log_4 \frac{4}{3}, \dots \}$

l'argomento del logaritmo è decrescente, quindi diminuisce anche il valore del logaritmo stesso.

$b_n = 1 + \frac{1}{n}$ a valori positivi, maggiori di 1

$1 < b_n \leq 2$ $\quad (1 + 1 = 2 \quad n = 1)$

$$\log_4 1 < \log_4 b_n \leq \log_4 2$$

$$\downarrow$$

$$0 < \log_4 b_n \leq \log_4 2$$

$\sup A = \max A = \log_4 2$ $\qquad \inf A = 0$

(N.B. $\log_4 2 = \log_4 4^{\frac{1}{2}} = (\log_4 4) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$)

$4 = 2^2 \qquad 4^{\frac{1}{2}} = (2^2)^{\frac{1}{2}} = 2$

es6 $A = \{ x_n = \text{sen}(\pi n),\ n \in \mathbb{N}_0 \}$

$b_n = \text{sen}(\pi n)$ $n \in \mathbb{N}_0$

$n=0$ $b_0 = \text{sen}\, 0\pi = 0$
$n=1$ $b_1 = \text{sen}\, \pi = 0$
$n=2$ $b_2 = \text{sen}\, 2\pi = 0$
ripete

($n\pi$ rappresenta i multipli di π, in positivo, per cui la funzione, anzi l'espressione $\text{sen}\, n\pi$ è identicamente nulla)

L'insieme A è costituito da un unico elemento, lo zero:

$A = \{ 0 \}$

è un insieme chiuso, 0 è anche punto di accumulazione per l'insieme

$\max A = \sup A = \min A = \inf A = 0$

PAPER SHOW

es 7 $A = \{ x_n = \operatorname{sen}(n \frac{\pi}{2}) ,\ n \in \mathbb{N}_0 \}$

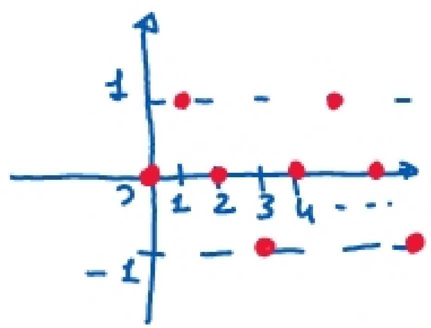
$x_n = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \cdot n$ $n = 0$ $x_0 = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} \cdot 0) = 0$

$n = 1$ $x_1 = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} \cdot 1) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$

$x_2 = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} \cdot 2) = \operatorname{sen} \pi = 0$

$x_3 = \operatorname{sen}(\frac{\pi}{2} \cdot 3) = \operatorname{sen}(\frac{3}{2}\pi) = -1$

si ripete ciclicamente con questi 3 valori



$\inf A = \min A = -1$

$\max A = \sup A = 1$

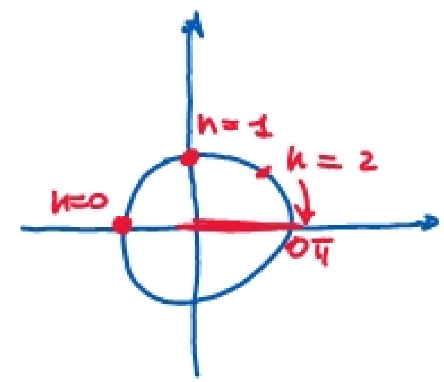
(N.B. $A = \{-1, 0, 1\}$ si riduce a soli 3 valori es8. $A = \left\{ x_n = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2^n} , \ n \in \mathbb{N}_0 \right\}$

$x_n = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2^n}$

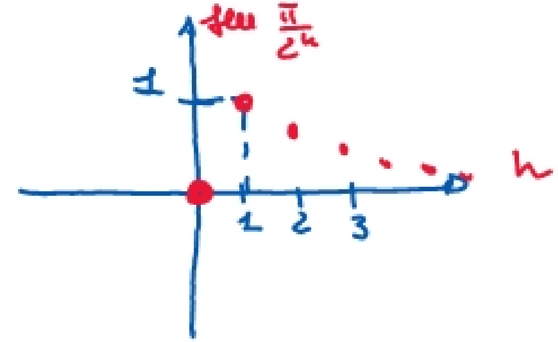
$n=0 \qquad x_0 = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = \operatorname{sen} \pi = 0$

$n=1 \qquad x_1 = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2^1}\right) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = 1$

$n=2 \qquad x_2 = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2^2}\right) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$



il denominatore dell'argomento è 2^n, che cresce in ragione delle potenze di 2, l'angolo π viene frazionato in ragione delle potenze di 2, si avvicina quindi al valore dell'angolo zero ($\operatorname{sen} 0\pi = 0$)



$\min A = \inf A = 0$

$\max A = 1$

(N.B. Tutti i punti sono di frontiera, A è chiuso) es 9 : $A = \left\{ x_n = \left\{ \log\left(1 + e^{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}\right) \right\}^7 ; \ n \in \mathbb{N} \right\}$ (T.E. 10-03-07)

si consideri l'espressione $b_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n} = \dfrac{(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \dfrac{\cancel{n}+2-\cancel{n}}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$

quindi $b_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n} = \dfrac{2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$ è a valori positivi; diminuisce all'aumentare di n, poiché aumenta il denominatore.

$n=0 \quad b_0 = \sqrt{n+2} - \sqrt{n} = \sqrt{2}$

$n=1 \quad b_1 = \dfrac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} > 0$

$0 < b_n \leq \sqrt{2}$ applico l'operatore (e)

$e^0 < e^{b_n} \leq e^{\sqrt{2}}$ aggiungo (1)

$1+1 < 1+e^{b_n} \leq 1+e^{\sqrt{2}}$ applico l'operatore $(\log)$

$\log(2) < \log(1+e^{b_n}) \leq \log(1+e^{\sqrt{2}})$ applico la potenza (7)

$\log^7(2) < \left[\log\left(1+e^{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}\right)\right]^7 \leq \log^7(1+e^{\sqrt{2}})$

$\inf A = \log^7(2)$ $\quad \sup A = \max A = \log^7(1+e^{\sqrt{2}})$