Lezione 1. di "analisi 1": introduzione

1 disequazioni algebriche

Lezione 2

2. esponenziali e logaritmi: equazioni, disequazioni, grafici

Lezione 3

3. trigonometria, goniometria, equazioni, disequazioni, grafici

Lezione 4

4. operatori iperbolici, formule di trasformazione, funzioni e grafici.

Le disequazioni : risoluzione algebrica e grafica

algebricamente

1° grado

2° grado

prodotto / quoziente

valore assoluto (o modulo)

grado superiore al 2°

irrazionali: indice pari e dispari

$3x > 4 \qquad x > \frac{4}{3}$

$-3x > 4 \qquad x > -\frac{4}{3} \qquad \boxed{x < -\frac{4}{3}}$

[N.B.

se divido per quantità negative, devo sempre cambiare il verso alla disequazione

Promemoria sulle disequazioni

$ax^2+bx+c>0$ $\qquad\qquad$ $ax^2+bx+c<0$

$$ax^2+bx+c=0$$

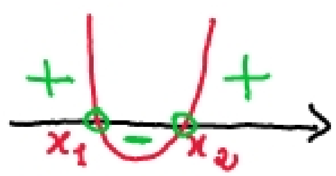
$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

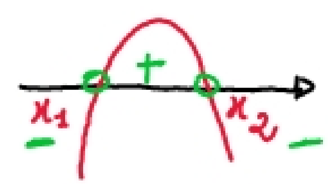
$y=ax^2+bx+c$

$$\Delta=b^2-4ac$$

$\Delta>0$ $\quad x_1, x_2$

$a>0$



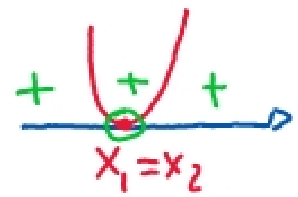


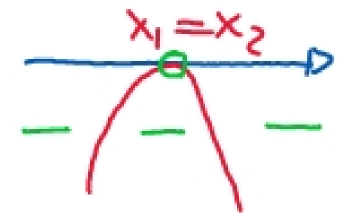
$a<0$

	verso d.	segno a	
$\Delta>0 \Rightarrow x_1, x_2$	$>$	$a>0$	valori esterni
C.E.			$x<x_1 \cup x>x_2$
	$<$	$a<0$	
	$>$	$a<0$	valori interni
D.I.	$<$	$a>0$	$x_1<x<x_2$

$\Delta = 0 \qquad x_1 = x_2$

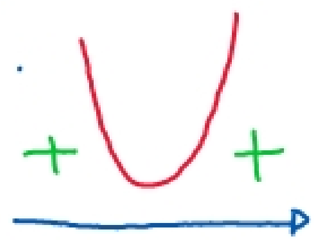
$a > 0$ $\qquad$ $a < 0$

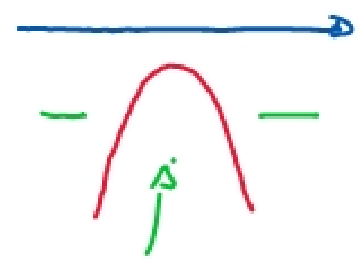




$\Delta < 0 \qquad x_1, x_2 \in \mathbb{C}$

$a > 0$ $\qquad$ $a < 0$





$x^2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$y = \frac{1}{\sqrt{x^2}} \qquad x^2 > 0$

$x^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$x^2 < 0 \quad \nexists x \in \mathbb{R}$

$x^2 \leq 0 \qquad x = 0$

DISEquazione di grado superiore al 2°:

$$x^5 - 4x^4 - x^3 + 16x^2 - 12x < 0$$
$$x(x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12) < 0$$

DIVISIONE CON RUFFINI

$(x-1)(x^3-3x^2-4x+12)$

$$P(x) = x^4 - 4x^3 - x^2 + 16x - 12 \longrightarrow (x+a)(\quad)$$

1° grado 3° grado

T.N = 12 divisori di 12 sono: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$

$$P(1) = 1 - 4 - 1 + 16 - 12 = 0 \qquad x = 1 \longrightarrow$$

	x^4	x^3	x^2	x	x^0 (T.N.)
	1	-4	-1	+16	-12
1		1	-3	-4	+12
	1	-3	-4	+12	0

$$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 =$$
$$= x^2(x-3) - 4(x-3) =$$
$$= (x-3)\cdot(x^2-4) =$$
$$= (x-3)(x-2)(x+2)$$

$x(x-1)(x-2)(x+2)(x-3) < 0$

$]-\infty, -2[\ ,\ ]0, 1[$
$]2, 3[$

FATTORI PER LO STUDIO DEL SEGNO:

E' POSITIVO O NULLO SE

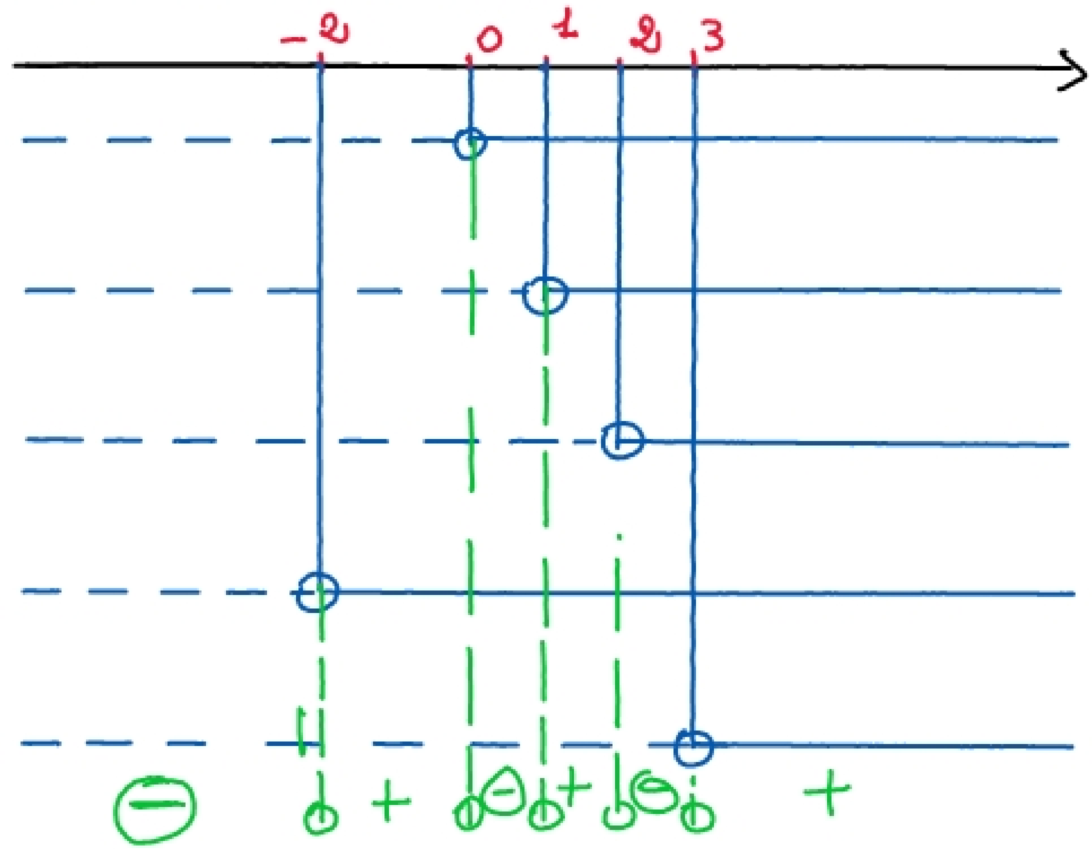
I f. $x \geq 0$

II f. $x - 1 \geq 0$ $x \geq 1$

III f. $x - 2 \geq 0$ $x \geq 2$

IV f. $x + 2 \geq 0$ $x \geq -2$

V f. $x - 3 \geq 0$ $x \geq 3$



N.B. ——— positivo

- - - - negativo

o valore nullo del fattore

× non accettazione, non esistenza per quel valore

DISEQUAZIONE FRAZIONARIA:

$$\frac{x+1}{2x+5} \geq 0$$

1. studio del segno:

N: $x+1 \geq 0$ $\quad x \geq -1$

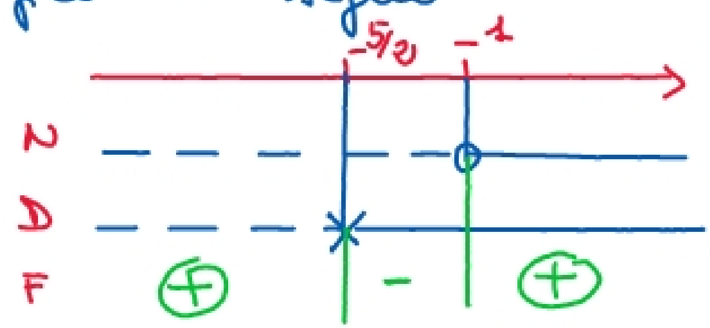
D: $2x+5>0$ $\quad x > -\frac{5}{2}$ $\quad$ [N.B. $D \neq 0$]

soluzione

$\left]-\infty, -\frac{5}{2}\right[$

$\left[-1, +\infty\right[$

2. grafico del segno



prodotto: $(x+1)(2x+5) \geq 0$ $\quad x+1 \geq 0$, $\; 2x+5 \geq 0$ $\quad \left]-\infty, -\frac{5}{2}\right] \cup \left[-1, +\infty\right[$

Trinomio di 2° grado $\quad 2x^2+7x+5 \geq 0$ $\quad$ parabola $\quad x_1 = -\frac{5}{2}$

$\Delta > 0 \quad a > 0 \quad$ CE $\quad x_2 = -1$

$$\frac{x^2\,(x-3)}{(x-1)^2\,(x+2)} \geqslant 0$$

soluzione $]-\infty,-2[$ $[3,+\infty[$

1) studio del segno dei singoli fattori :

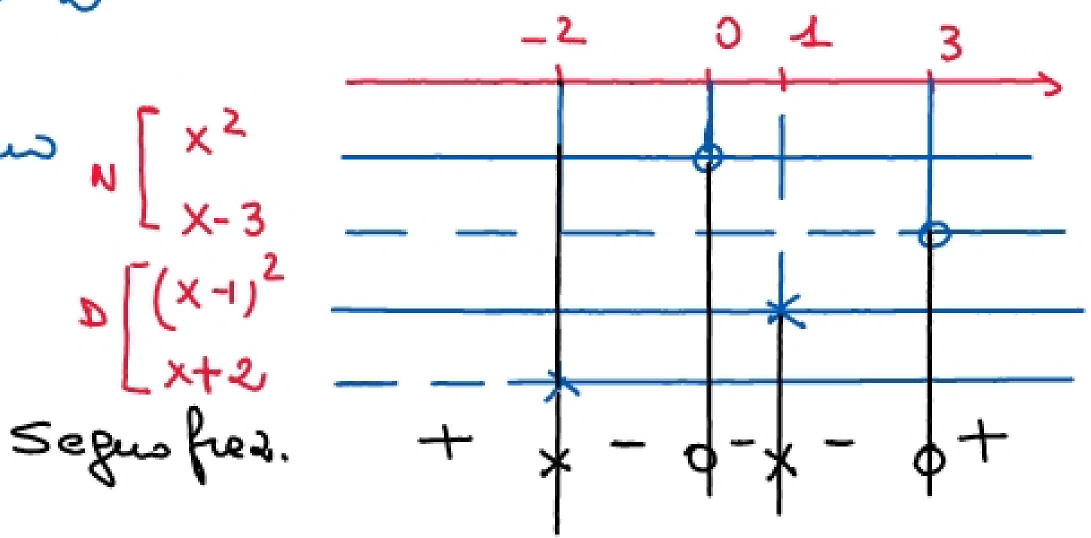
$x^2 \geqslant 0$ $\quad \forall x \in \mathbb{R}$ $\quad (=0$ per $x=0)$

$x-3 \geqslant 0$ $\quad x \geqslant 3$

$(x-1)^2 > 0$ $\quad x \neq 1$ $\quad$ (è un quadrato, quindi sempre positivo, si annulla in $x=1$)

$x+2 \geqslant 0$ $\quad x \geqslant -2$

2) grafico del segno



SISTEMA DI DISEQUAZIONI

$$\begin{cases} x^2 - 6x + 8 < 0 \\ x^2 - 2x > 0 \\ x^2 + 4 > 0 \end{cases}$$

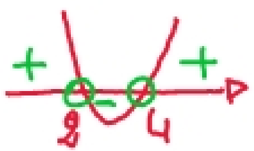
SISTEMA = INSIEME DI CONDIZIONI CHE DEVONO ESSERE VERE CONTEMPORANEAMENTE

1) $x^2 - 6x + 8 < 0$

[TRINOMIO : 2 numeri t.c. $s = -6$, $p = +8$ | $(x-4)(x-2) < 0$

$x_1 = 4$

$x_2 = 2$

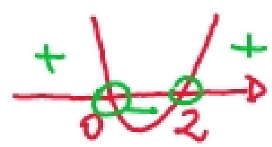


$2 < x < 4$

2) $x^2 - 2x > 0$

$x_1 = 0$

$x_2 = 2$

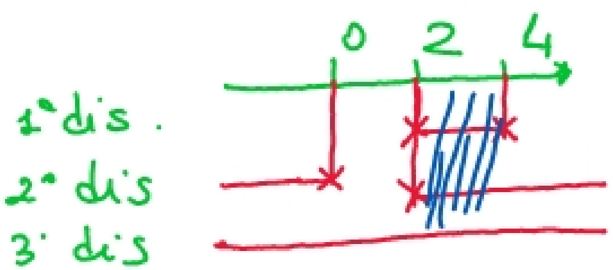


$x < 0 \cup x > 2$

3) $x^2 + 4 > 0$

[SOMMA DI QUANTITA' POSITIVE, O AL PIU' NULLE]

$\forall x \in \mathbb{R}$



INTERVALLO COMUNE

$]2, 4[$

(N.B. dove ci sono le 3 righe)

DISEQUAZIONE CON VALORE ASSOLUTO

N.B.: $|x| = \begin{cases} x & \text{per } x \geq 0 \\ -x & \text{per } x < 0 \end{cases}$

$|x| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

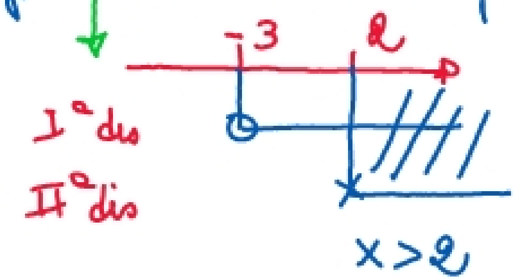
1° grado $\quad |x+3| > 5$

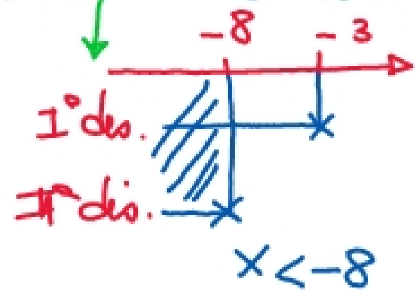
algebricamente:

I° sist. $\begin{cases} x+3 \geq 0 \\ x+3 > 5 \end{cases}$ $\cup$ II° sist. $\begin{cases} x+3 < 0 \\ -(x+3) > 5 \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq -3 \\ x > 2 \end{cases}$ $\qquad$ $\begin{cases} x < -3 \\ x+3 < -5 \iff x < -8 \end{cases}$

grafici dei 2 sistemi per la ricerca delle soluzioni:



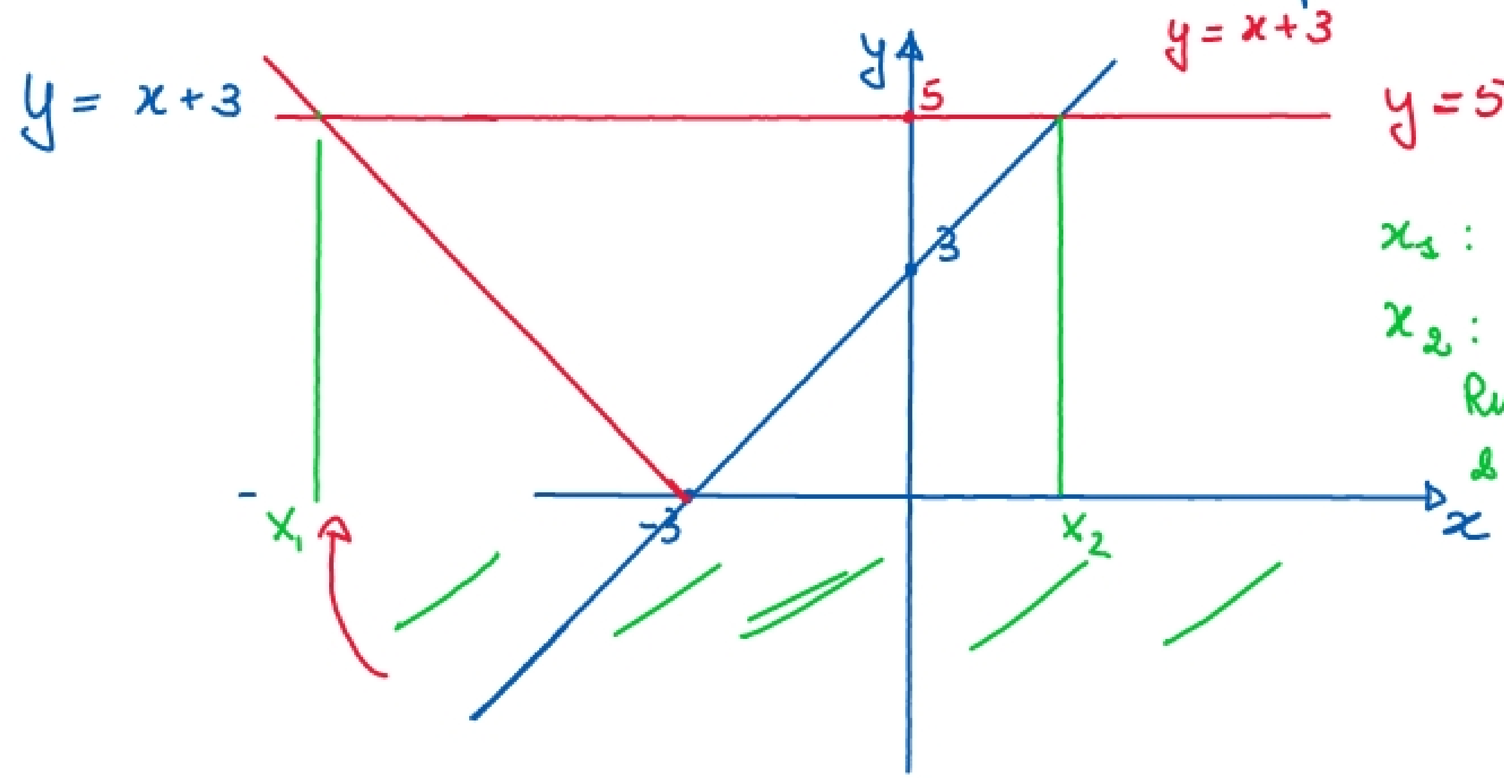


soluzioni della disequazione: $x < -8$, $x > 2$

$]-\infty, -8[\ ,\ ]2, +\infty[$

$|x+3| > 5$

$y = |x+3|$ $y = 5$ sono rette, o porzioni di rette



$x_1: \ -(x+3) = 5$

$x_2: \ x+3 = 5$

Risoluzione di 2 equazioni

N.B. il modulo interviene sul grafico delle rette, ribaltando le stesse dal semipiano negativo al semipiano positivo (simmetria rispetto l'asse delle ascisse)

2° modo: $|x^2-4| \geq 5x-10$

$y = x^2-4$ parabola

$y = 5x-10$ retta

$(x^2-4) \geq 0$

$x^2-4 = 5x-10$

$x^2-5x+6=0$

$(x-3)(x-2)=0$

$x_1 = 3$

$x_2 = 2$

nel secondo caso

$(x^2-4)<0$

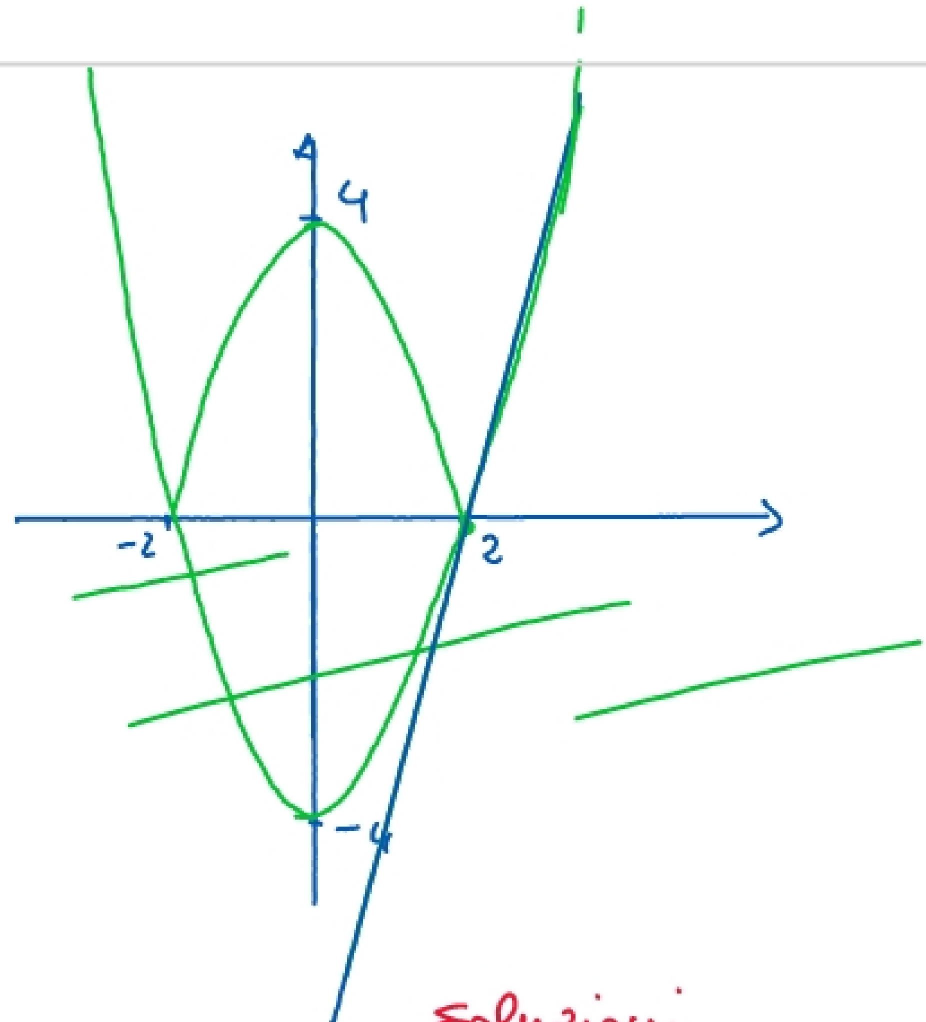
$-(x^2-4) = 5x-10$

$x^2+5x-14=0$

$(x+7)(x-2)=0$

$x_1=-7$

$x_2 = 2$



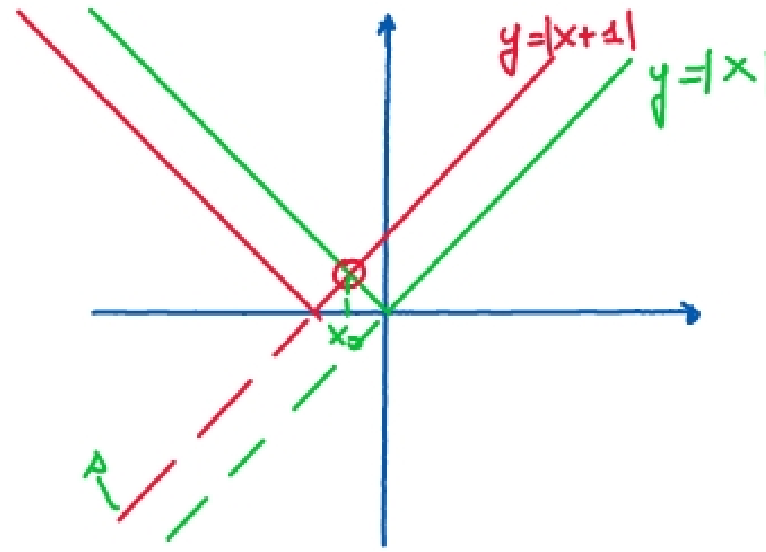
Soluzioni

$x \leq 2 \cup x \geq 3$

2 moduli : $|x| \geq |x+1|$

$y = |x| \to y = x$

$y = |x+1| \to y = x+1$



equazione da risolvere

$-x = x+1$

$x = -\frac{1}{2}$ $\qquad$ $x_0 = -\frac{1}{2}$

soluzione $x < -1/2$

si può risolvere anche elevando al quadrato

$x^2 = x^2 + 1 + 2x$

$2x = -1$

algebricamente si dovrebbero impostare 4 sistemi:

$\begin{cases} x \geq 0 \\ x+1 \geq 0 \\ x \geq x+1 \end{cases}$ $\begin{cases} x \geq 0 \\ x+1 < 0 \\ x \geq -(x+1) \end{cases}$ $\begin{cases} x < 0 \\ x+1 \geq 0 \\ -x \geq x+1 \end{cases}$ $\begin{cases} x < 0 \\ x+1 < 0 \\ -x \geq -(x+1) \end{cases}$

anche riducibili a 3

o studiare prima il segno dei moduli ed in base agli intervalli impostare le disequazioni

DISEQUAZIONE IRRAZIONALE:

① $(x+1) > \sqrt[3]{x^3-(3x^2-5)}$

$(x+1)^3 > x^3-3x^2+5$

$x^3+1+3x^2+3x > x^3-3x^2+5$

$6x^2+3x-4>0$

$x_{1,2} = \frac{-3\pm\sqrt{9+106}}{12} = \frac{-3\pm\sqrt{115}}{12}$

(concordi - esterni)

$x<\frac{-3-\sqrt{115}}{2} \cup x>\frac{-3+\sqrt{115}}{2}$

② $(x+1) > \sqrt[3]{x^3+(3x^2-5)}$

$(x+1)^3 > x^3+3x^2-5$

$x^3+1+3x^2+3x > x^3+3x^2-5$

$3x>-6$

$x>-2$

N.B. non si devono porre le condizioni di esistenza del radicando, poiché è indice dispari

$\sqrt{4-x^2} > x-1$

$$\begin{cases} 4-x^2 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \\ 4-x^2 > (x-1)^2 \end{cases} \quad \text{c.E.} \quad \cup \quad \begin{cases} 4-x^2 \geq 0 & (1) \\ x-1 < 0 & (2) \\ \sqrt{4-x^2} > x-1 \end{cases}$$

vera $\forall x$

graficamente

$y = \sqrt{4-x^2}$ $\quad y \geq 0 \quad y^2 = 4-x^2$

$x^2+y^2 = 4$

cfr. $C(0,0)$

$R = 2$

$[x^2+y^2+ax+by+c=0$

$C\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right) \quad R = \sqrt{\underbrace{\left(-\frac{a}{2}\right)^2+\left(-\frac{b}{2}\right)^2-c}_{>0}}$

$y = x-1$

$]-2, x_0[$

x_0:

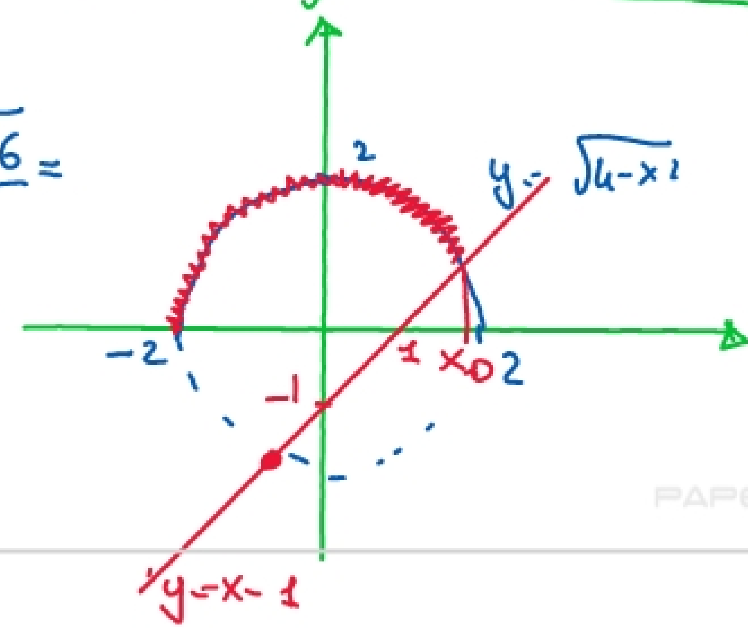
$4-x^2 = (x-1)^2$

$4-x^2 = x^2+1-2x$

$2x^2-2x-3=0$

$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+6}}{2}$

$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+6}}{2} = \begin{cases} \frac{1+\sqrt{7}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{7}}{2} \end{cases}$

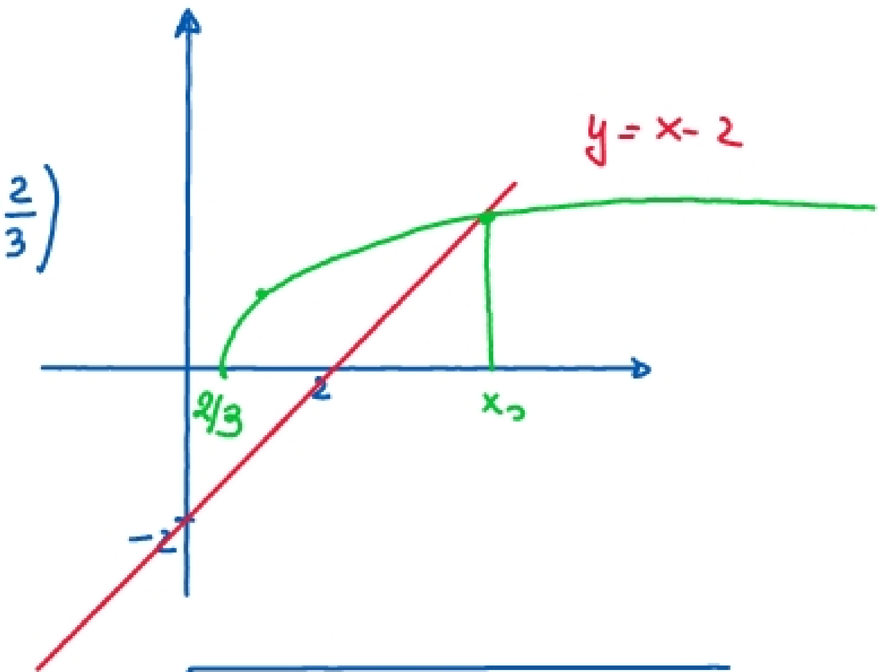


$x_0 = \frac{1+\sqrt{7}}{2}$

$x-2 \leq \sqrt{3x-2}$

$y = \sqrt{3x-2}$ parabola asse orizzontale $\left(x = \frac{y^2}{3} + \frac{2}{3}\right)$

$y = x-2$ retta



$$\sqrt{(3x-2)}^2 = (x-2)^2$$

$$3x-2 = x^2+4-4x$$

$$x^2-7x+6=0$$

$$(x-6)(x-1)=0$$

algebricamente

$$\begin{cases} 3x-2 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \\ (x-2)^2 \leq \left(\sqrt{3x-2}\right)^2 \end{cases}$$

$x=6 \rightarrow y=\sqrt{3\cdot 6-2} = \sqrt{18-2} = \sqrt{16} = 4$ acc.

$x=1 \rightarrow y=-1$ non acc.