EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL 2° ORDINE E SUPERIORI

OMOGENEE

T.E

$$\begin{cases} y''' - 3y'' + 3y' - y = 0 \\ y(0) = 5 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = 0 \end{cases}$$

calcolare il valore di $y(1) = ?$

1 - equazione caratteristica

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = 0 \qquad (\lambda - 1)^3 = 0$$

$\lambda = 1$ molteplicità 3

$$\Rightarrow y = \underset{(x^0)}{c_1 e^x} + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x$$

soluzione generale

2) $y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x$

pb. di Ca? c_1, c_2, c_3 3 parametri

$\Downarrow$

3 condizioni $\begin{cases} y(0) = 5 \\ y'(0) = 0 \\ y''(0) = 0 \end{cases}$

CONDIZIONI

$y(0)=5$

$y = c_1 e^x + c_2 x e^x + c_3 x^2 e^x$

$e^0 = 1$

$x=0$, $y=5$ $\Rightarrow$ $5 = c_1 + c_2 \cdot 0 + c_3 \cdot 0$

$y'(0)=0$

$y' = c_1 e^x + c_2 (e^x + x e^x) + c_3 (2x e^x + x^2 e^x)$

$x=0$, $y'=0$ $\Rightarrow$ $0 = c_1 + c_2 (1 + 0) + c_3 (0 + 0)$ $e^0 = 1$

$0 = c_1 + c_2$

$y''(0)=0$

$y'' = c_1 e^x + c_2 (e^x + e^x + x e^x) + c_3 (2e^x + 2x e^x + 2x e^x + x^2 e^x)$

$x=0$, $y''=0$ $\Rightarrow$ $0 = c_1 + c_2 (1 + 1) + c_3 (2 + 0 + 0 + 0)$

SISTEMA PER LA RICERCA DEI VALORI DEI PARAMETRI

$$\begin{cases} c_1 = 5 \\ c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 + 2c_2 + 2c_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 5 \\ c_2 = -c_1 = -5 \\ c_3 = \dfrac{-c_1 - 2c_2}{2} = \dfrac{-5+10}{2} = 5/2 \end{cases}$$

SOLUZIONE PARTICOLARE

$$\tilde{y}(x) = 5e^x - 5xe^x + \frac{5}{2}x^2e^x$$

IL VALORE $\tilde{y}(1) = ?$

$$\tilde{y}(1) = \cancel{5e} - \cancel{5}e + \frac{5}{2}e = \frac{5}{2}e$$

$$e^1 = e$$

T. E.

$$\begin{cases} y''' - 7y' + 6y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -3 \\ y''(0) = 9 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^{3x} y(x) = ?$$

1) equazione caratteristica

$$\lambda^3 - 7\lambda + 6 = 0$$

$$\underbrace{\lambda^3 - \lambda} - 6\underbrace{\lambda + 6} = 0$$

$$\lambda(\lambda^2 - 1) - 6(\lambda - 1) = 0$$

$$\lambda(\underline{\lambda - 1})(\lambda + 1) - 6(\underline{\lambda - 1}) = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda - 6) = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda + 3)(\lambda - 2) = 0$$

soluzioni 3, con molt. 1:

$\lambda_1 = -3$

$\lambda_2 = 1$

$\lambda_3 = 2$

soluzione generale $y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{2x} + c_3 e^{x}$

2) Ricerca della soluzione particolare:

$y(0) = 1$ $\qquad$ $1 = c_1 + c_2 + c_3$

$y'(0) = -3$ $\qquad$ $y' = -3c_1 e^{-3x} + 2c_2 e^{2x} + c_3 e^{x}$

$e^0 = 1$

$-3 = -3c_1 + 2c_2 + c_3$

$y''(0) = 9$ $\qquad$ $y'' = +9c_1 e^{-3x} + 4c_2 e^{2x} + c_3 e^{x}$

$9 = 9c_1 + 4c_2 + c_3$

$\Rightarrow$ sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 1 \\ -3c_1 + 2c_2 + c_3 = -3 \\ 9c_1 + 4c_2 + c_3 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \end{cases}$$

sol. $\tilde{y}(x) = e^{-3x}$

$\Downarrow$

$\lim_{x \to +\infty} e^{3x} \cdot e^{-3x} = 1$

SOLUZIONE CON CRAMER (3x3)

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = 1 & \text{eq } 1 \\ -3c_1 + 2c_2 + c_3 = -3 & \text{eq } 2 \\ 9c_1 + 4c_2 + c_3 = 9 & \text{eq } 3 \end{cases}$$

$\uparrow c_1 \quad \uparrow c_2 \quad \uparrow c_3 \quad$ T.N.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & c_3 \end{array} \\ \Delta = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & -3 & 2 \\ 9 & 4 & 1 & 9 & 4 \end{array}\right| \end{array} = (2+9-12) - (18+4-3) = -1 + 21 = -22$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} TN & c_2 & c_3 \end{array} \\ \Delta_{c_1} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & -3 & 2 \\ 9 & 4 & 1 & 9 & 4 \end{array}\right| \end{array} = -22$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & TN & c_3 \end{array} \\ \Delta_{c_2} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -3 & 1 & -3 & -3 \\ 9 & 9 & 1 & 9 & 9 \end{array}\right| \end{array} = (-3+9-27) - (-27+9-3) = 0$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} c_1 & c_2 & TN \end{array} \\ \Delta_{c_3} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & 2 & -3 & -3 & 2 \\ 9 & 4 & 9 & 9 & 4 \end{array}\right| \end{array} = (18-27-12) - (18-12-27) = 0$$

$$c_1 = \frac{\Delta c_1}{\Delta} = \frac{-22}{-22} = 1$$

$$c_2 = \frac{\Delta c_2}{\Delta} = \frac{0}{-22} = 0$$

$$c_3 = \frac{\Delta c_3}{\Delta} = \frac{0}{-22} = 0$$

NON OMOGENEE

T.E. $\begin{cases} y'' + 2y' + 2y = 1 \\ y(0) = -\frac{1}{2} \\ y'(0) = 1 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} \tilde{y}(x) = ?$

[1 = polinomio di grado zero]

1) equazione caratteristica

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1-2} = -1 \pm \sqrt{-1} = -1 \pm i$$

$\lambda_1 = -1 - i \qquad \lambda_2 = -1 + i$ SOL. COMPLESSE CONIUGATE CON MOLTEPLICITA' 1

scrittura della soluzione generale per la "parte omogenea"

$$h(x) = c_1 e^{-x} \cos x + c_2 e^{-x} \operatorname{sen} x$$

2) integrale particolare

$$w(x) = ax^2 + bx + c$$

$$w'(x) = 2ax + b$$

$$w''(x) = 2a$$

2 = ordine eq. differenziale

0 = grado del polinomio $(b(x))$

$2+0 = 2$ grado, in generale, del polinomio dell'integrale particolare

sostituisco nell'eq. differenziale

$$\overbrace{2a}^{w''} + 2\overbrace{(2ax+b)}^{w'} + 2\overbrace{(ax^2+bx+c)}^{w} = 1$$

$$2a + \underline{4ax} + 2b + 2ax^2 + \underline{2bx} + 2c = 1$$

$$2ax^2 + x(4a+2b) + (2a+2b+2c) = 1$$

(identità polinomiale)

$$\begin{cases} 2a = 0 \\ 4a + 2b = 0 \\ 2a + 2b + 2c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 1/2 \end{cases} \Rightarrow w(x) = \frac{1}{2}$$

(grado zero)

3) Soluzione generale

$$y(x) = h(x) + \tilde{y}(x) = c_1 e^{-x}\cos x + c_2 e^{-x}\operatorname{sen} x + \frac{1}{2}$$

integrale particolare

come omogenea

4) Ricerca di $\tilde{y}(x)$:

$y(0) = -1/2$ $\qquad -\frac{1}{2} = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 + 1/2$ $\qquad e^0 = 1$

$\cos 0 = 1$

$\operatorname{sen} 0 = 0$

$y'(0) = 1$ $\qquad y' = -c_1 e^{-x}\cos x + c_1 e^{-x}\cdot(-\operatorname{sen} x) +$

$+ c_2 e^{-x}(-1)\operatorname{sen} x + c_2 e^{-x}\cos x$

$1 = -c_1 + c_2$

$$\begin{cases} c_1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \\ c_2 - c_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -1 \\ c_2 = 1 + c_1 = 0 \end{cases}$$

$$\tilde{y}(x) = e^{-x}\cos x + \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \tilde{y}(x) = \lim_{x\to+\infty}\Big(\underbrace{e^{-x}}_{\downarrow\, 0}\underbrace{\cos x}_{\downarrow\, [-1,1]} + \frac{1}{2}\Big) = 1/2$$

N.B: Teo dei Carabinieri

$$-1 \le \cos x \le 1$$

$$-e^{-x} \le e^{-x}\cos x \le e^{-x}$$

$$\underbrace{-\underbrace{e^{-x}}_{\downarrow\, 0}+\frac{1}{2}}_{1/2} \le e^{-x}\cos x + \frac{1}{2} \le \underbrace{\underbrace{e^{-x}}_{\downarrow\, 0} + \frac{1}{2}}_{1/2}$$

P.C. $\begin{cases} y''' - y' = 2e^{2x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2/3 \\ y''(0) = 4/3 \end{cases}$

$$\lim_{x \to -\infty} \tilde{y}(x) = ?$$

1) eq. caratteristica

$$\lambda^3 - \lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda^2 - 1) = 0$$

$$\lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0$$

$\lambda_1 = 0$

$\lambda_2 = 1$ molt. 1, sol. reali

$\lambda_3 = -1$

$$h(x) = c_1 e^{0x} + c_2 e^{x} + c_3 e^{-x} = c_1 + c_2 e^{x} + c_3 e^{-x}$$

$\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = 1 \qquad \lambda_3 = -1$

2. integrale particolare :

$$w(x) = A \cdot e^{2x}$$

$$w'(x) = 2A\, e^{2x}$$

$$w''(x) = 4A\, e^{2x}$$

$$w'''(x) = 8A\, e^{2x}$$

$$b(x) = 2\, e^{2x} = \underbrace{P(x)}_{\text{polinomiale di grado 0}} \cdot \underbrace{e^{\alpha x}}_{\text{l'esponenziale}}$$

ove $\alpha = 2$ non è soluzione per λ

sostituendo

$$8A\, \cancel{e^{2x}} - 2A\, \cancel{e^{2x}} = 2\, \cancel{e^{2x}} \Rightarrow 6A = 2 \Rightarrow A = 1/3$$

3. soluzione generale

$$y(x) = h(x) + w(x) = \underbrace{c_1 + c_2 e^{x} + c_3 e^{-x}}_{h(x)} + \underbrace{\tfrac{1}{3} e^{2x}}_{w(x)}$$

4) $y(x) = c_1 + c_2 e^{x} + c_3 e^{-x} + \frac{1}{3} e^{2x}$

$y'(x) = c_2 e^{x} + (-c_3 e^{-x}) + \frac{2}{3} e^{2x}$

$y''(x) = c_2 e^{x} + c_3 e^{-x} + \frac{4}{3} e^{2x}$

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 2/3 \\ y''(0) = 4/3 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 + \frac{1}{3} = 0 \\ c_2 - c_3 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \\ c_2 + c_3 + \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \end{cases}$$

$e^{0} = 1$
$e^{-0} = 1$
$e^{2 \cdot 0} = 1$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + c_3 = -\frac{1}{3} \\ c_2 - c_3 = 0 \\ c_2 + c_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -\frac{1}{3} \\ c_2 = 0 \\ c_3 = 0 \end{cases}$$

Soluzione particolare

$\tilde{y}(x) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} e^{2x} \Rightarrow \lim_{x \to -\infty} \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \underbrace{e^{2x}}_{0} \right) = -\frac{1}{3}$

T.E. $\begin{cases} y'' - 4y' + 3y = 7e^{x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = -7/2 \end{cases}$ $\qquad y(1) = ?$

1. eq. caratteristica

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$$
$$(\lambda - 3)(\lambda - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 3 \end{matrix}$$

sol. reali con molt. 1

$$\Rightarrow h(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{x}$$

2. integrale particolare

$$w(x) = \underbrace{Q(x)}_{\text{grado } 0} \cdot x^{h} \cdot e^{\alpha x}$$

h = molteplicità di α nell'eq. caratt.

$$b(x) = \underbrace{7}_{\text{polinomio di grado 0}} \underbrace{e^{x}}_{e^{\alpha x}}$$

$\alpha = 1$ sol. dell'eq. caratt.

$h = 1$

$$w(x) = B\,x\,e^x$$

$$w'(x) = B\,e^x + Bx\,e^x$$

$$w''(x) = B\,e^x + B\,e^x + Bx\,e^x = 2B\,e^x + Bx\,e^x$$

Sostituendo

$$\overbrace{2Be^x + Bxe^x}^{y''} - 4\left(\overbrace{Be^x + Bxe^x}^{y'}\right) + 3\,\overbrace{Bxe^x}^{y} = 7e^x$$

$$2Be^x + \cancel{Bxe^x} - 4Be^x - \cancel{4Bxe^x} + \cancel{3Bxe^x} = 7e^x$$

$$-2B\,\cancel{e^x} = 7\,\cancel{e^x} \qquad B = -7/2$$

$$w(x) = -7/2\,x\,e^x$$

Soluzione generale: $y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^x - \frac{7}{2} x e^x$

$$y(x) = c_1 e^{3x} + c_2 e^{x} - \frac{7}{2} x e^{x}$$

sol. pb. Ca:

$$y(0) = 0 \qquad \begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ 3c_1 + c_2 \cancel{-7/2} = \cancel{-7/2} \end{cases} \qquad \begin{array}{l} e^{3\cdot 0} = 1 \\ e^{0} = 1 \end{array}$$

$$y'(0) = -7/2$$

$$\hookrightarrow y' = 3c_1 e^{3x} + c_2 e^{x} - \frac{7}{2}\left(e^{x} + x e^{x}\right)$$

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0 \\ 3c_1 + c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2c_1 = 0 \\ c_2 = -c_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases}$$

soluzione particolare $\tilde{y}(x) = -7/2\, x e^{x}$

$$\Rightarrow \tilde{y}(1) = -7/2\, e \qquad (x=1)$$

T. E.

$$\begin{cases} y''' + y'' = 4 \operatorname{sen} x \\ y(0) = 2 \\ y'(0) = 1 \\ y''(0) = -2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\tilde{y}(x)}{x} = ?$$

1. eq. caratteristica

$$\lambda^3 + \lambda^2 = 0$$

$$\lambda^2 (\lambda + 1) = 0$$

$\lambda_1 = 0$ reale con molt. 2

$\lambda_2 = -1$ reale con molt. 1

$$h(x) = \underbrace{c_1 e^{0x} + c_2 x e^{0x}}_{\lambda_1 = 0} + \underbrace{c_3 e^{-x}}_{\lambda_2 = -1} =$$

$$= c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x}$$

2) integrale particolare

$$w(x) = A\cos x + B\,\text{sen}\,x \qquad b(x) = \underbrace{4}_{\text{pol. grado 0}}\ \underbrace{\text{sen}\,x}_{\text{Trigonometrica}}$$

$$w'(x) = -A\,\text{sen}\,x + B\cos x$$

$$w''(x) = -A\cos x - B\,\text{sen}\,x$$

$$w'''(x) = A\,\text{sen}\,x - B\cos x$$

sostituendo:

$$\overbrace{A\,\text{sen}\,x - B\cos x}^{y'''} + \overbrace{(-A\cos x - B\,\text{sen}\,x)}^{y''} = 4\,\text{sen}\,x$$

$$\text{sen}\,x\,(A-B) + \cos x\,(-A-B) = 4\,\text{sen}\,x$$

$$\begin{cases} A - B = 4 \\ -A - B = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A - B = 4 \\ A + B = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2A = 4 \\ B = -A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = -2 \end{cases}$$

$$w(x) = 2\cos x - 2\,\text{sen}\,x$$

·sol. generale $\quad y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} + 2\cos x - 2\,\mathrm{sen}\,x$

$y(0) = 2 \quad \to \quad c_1 + c_3 + 2 = 2$

$y'(0) = 1 \quad\quad y' = c_2 - c_3 e^{-x} - 2\,\mathrm{sen}\,x - 2\cos x$

$x = 0$
$e^{-0} = 0$
$\cos 0 = 1$
$\mathrm{sen}\,0 = 0$

$1 = c_2 - c_3 - 2$

$$\begin{cases} c_1 + c_3 = 0 \\ c_2 - c_3 = 3 \\ c_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_1 = -c_3 = 0 \\ c_2 = 3 + c_3 = 3 \\ c_3 = 0 \end{cases}$$

$y''(0) = -2 \quad\quad y'' = +c_3 e^{-x} - 2\cos x + 2\,\mathrm{sen}\,x$

$-2 = c_3 - 2$

sol. part. $\tilde{y}(x) = 3x + 2\cos x - 2\,\mathrm{sen}\,x \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3\cancel{x}^{\,3} + \overset{\to 0}{2\cos x} - \overset{\to 0}{2\,\mathrm{sen}\,x}}{\cancel{x}}\right) = 3$

RICERCA DELL'INTEGRALE PARTICOLARE : $w(x)$

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = b(x)$$

1) se $b(x)$ è un polinomio a coefficienti e termine noto reali

allora $w(x) = K_0 x^{\alpha} + K_1 x^{\alpha-1} + \dots + K_{\alpha-1} x + K_{\alpha}$

con $\alpha = n + m - s$ con n = ordine dell'equazione
m = grado di $b(x)$
s = massimo indice dei coefficienti $a_1, \dots a_n$ non nulle

2) se $b(x) = p \operatorname{sen} kx$, $b(x) = q \cos kx$; $b(x) = p \operatorname{sen} kx + q \cos kx$

allora se ki non è radice dell'equazione caratteristica:

$$w(x) = A \operatorname{sen} kx + B \cos kx$$

allora se ki è radice di molteplicità r dell'eq. caratteristica:

$$w(x) = x^r (A \operatorname{sen} kx + B \cos kx)$$

3 - Se $\quad b(x) = p\, e^{\alpha x} \operatorname{sen} kx$, $b(x) = q\, e^{\alpha x} \cos kx$, $b(x) = e^{\alpha x}(p \operatorname{sen} kx + q \cos kx)$

allora se $(\alpha + ki)$ non è radice dell' equazione caratteristica

$$\| \quad w(x) = e^{\alpha x} \left(A \operatorname{sen} kx + B \cos kx \right)$$

allora se $(\alpha + ki)$ è radice dell' equazione caratteristica, con molteplicità r:

$$\| \quad w(x) = x^r e^{\alpha x} \left(A \operatorname{sen} kx + B \cos kx \right)$$

4 - Se $\quad b(x) = (b_0 x^s + b_1 x^{s-1} + \dots + b_{s-1} x + b_s)\, e^{\alpha x}$ $\quad (s \text{ intero} \geq 0)$

allora se α non è radice dell' equazione caratteristica:

$$\| \quad w(x) = e^{\alpha x} \left(k_0 s^s + k_1 x^{s-1} + \dots + k_{s-1} x + k_s \right)$$

allora se α è radice r-pla dell' equazione caratteristica:

$$\| \quad w(x) = x^r e^{\alpha x} \left(k_0 x^s + k_1 x^{s-1} + \dots + k_{s-1} x + k_s \right)$$

5 - Se: $b(x) = P(x)\, e^{\alpha x} \operatorname{sen} kx$

$b(x) = P(x)\, e^{\alpha x} \cos kx$

$b(x) = P(x)\, e^{\alpha x} (\operatorname{sen} kx + \cos kx)$

($P(x)$ polinomio di grado m)

allora se $(\alpha + ki)$ non sia radice dell'equazione caratteristica

$$\| \; w(x) = e^{\alpha x} \left[P_1(x) \operatorname{sen} kx + P_2(x) \cos kx \right]$$

con $P_1(x)$ e $P_2(x)$ polinomi di grado $\leq m$, da determinarsi

allora se $(\alpha + ki)$ è radice di molteplicità r, dell'eq. caratteristica

$$\| \; w(x) = x^r e^{\alpha x} \left[P_1(x) \operatorname{sen} kx + P_2(x) \cos kx \right]$$

con $P_1(x)$ e $P_2(x)$ polinomi come sopra