Studi di funzione

1) Studiare la funzione definita da

$$f(x) = \sqrt{x+2}\, e^{-(x+2)}\,.$$

Per cominciare, osserviamo che f si ottiene traslando di 2, nella direzione negativa dell'asse x, la funzione

$$g(x) = \sqrt{x}\, e^{-x}$$

cioè abbiamo $f(x) = g(x+2)$. Possiamo pertanto concentrarci sullo studio della funzione g, deducendo da esso il comportamento di f. Abbiamo:

$$\operatorname{dom} g = \{x \in \mathbb{R} :\ x \geq 0\} = [0, +\infty[$$

La funzione non è pari né dispari.
La funzione g è continua nel suo dominio. Calcoliamo il limite di g a $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x} = 0\,,$$

quindi $y = 0$ è un asintoto orizzontale di g, a $+\infty$.
Studiamo ora la derivabilità di g. In conseguenza dei Teoremi sul calcolo delle derivate, g è derivabile in $]0, +\infty[$ e la sua derivata prima è

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-x} - \sqrt{x}e^{-x} = \frac{1-2x}{2\sqrt{x}}\, e^{-x}\,.$$

Per quanto riguarda l'esistenza della derivata prima destra in $x = 0$, abbiamo

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}e^{-x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} = +\infty\,.$$

Dunque $g'_+(0) = +\infty$.
Se ne conclude che g è derivabile in $]0, +\infty[$.
Per quanto riguarda il segno di g', abbiamo:

$$g'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 - 2x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq \frac{1}{2}$$

Quindi abbiamo che g è

1. crescente in $[0, \frac{1}{2}[$

2. decrescente in $]\frac{1}{2}, +\infty[$.

In particolare, in $x = \frac{1}{2}$ g ha un punto di massimo assoluto.
Calcoliamo la derivata seconda di g e studiamone il segno, al fine di determinare gli intervalli di concavità/convessità di g. In $]0, +\infty[$, g' è derivabile e si calcola

$$g''(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{-2\sqrt{x} - (1-2x)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}\, e^{-x} - \frac{1-2x}{\sqrt{x}}\, e^{-x}\right]$$

$$= \frac{1}{2}e^{-x}\left[\frac{-4x - 1 + 2x}{2x^{3/2}} + \frac{2x-1}{\sqrt{x}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}e^{-x}\,\frac{2x(2x-1) - 2x - 1}{2x^{3/2}} = e^{-x}\frac{4x^2 - 4x - 1}{4x^{3/2}}\,.$$

Abbiamo pertanto che

$$g''(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 - 4x - 1 \geq 0$$

Le soluzioni dell'equazione $4x^2 - 4x - 1 = 0$ sono

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2},$$

da cui si deduce

$$4x^2 - 4x - 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq \frac{1-\sqrt{2}}{2} \text{ oppure } x \geq \frac{1+\sqrt{2}}{2}.$$

Se ne deduce che la funzione g è

1. concava in $\left[0, \frac{1+\sqrt{2}}{2}\right[$;

2. convessa in $\left]\frac{1+\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[$.

In $x = \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$, g ha un p.to di flesso (a tangente obliqua).

Tutto quanto ottenuto per g, può essere facilmente traspostato alla f. Ricordiamo che

$$f(x) = g(x+2).$$

Quindi $\operatorname{dom} f = [-2, +\infty[$ e

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} g(x+2) = \lim_{z\to+\infty} g(z) = 0\,.$$

Abbiamo che f derivabile in $]-2, +\infty[$ con

$$f'(x) = g'(x+2) = \frac{1-2(x+2)}{2\sqrt{x+2}}e^{-(x+2)}$$

e $f'_+(-2) = +\infty$. Per la derivata seconda di f si ha:

$$f''(x) = g''(x+2) = \frac{4(x+2)^2 - 4(x+2) - 1}{4(x+2)^{3/2}}e^{-(x+2)}$$
$$= \frac{4x^2 + 12x + 7}{4(x+2)^{3/2}}e^{-(x+2)}$$

Abbiamo che

1. f è crescente in $[-2, -2+\frac{1}{2}[= [-2, -\frac{3}{2}[$
2. f è decrescente in $]-\frac{3}{2}, +\infty[$.

In particolare, f ha un punto di massimo assoluto in $x = -\frac{3}{2}$. Inoltre:

1. f è concava in $\left[-2, -2+\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right[$;

2. f è convessa in $\left]-2+\frac{1+\sqrt{2}}{2}, +\infty\right[$.

In $x = -2 + \dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$, f ha un punto di flesso (a tangente obliqua).

2) Studiare la funzione definita da

$$f(x) = \log(3 - e^x) + e^x\,.$$

Dominio di f ed eventuali simmetrie: Si ha

$$\mathrm{dom}\, f = \{x \in \mathbb{R} :\ 3 - e^x > 0\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} :\ e^x < 3\} =]-\infty, \log(3)[$$

La funzione f non è pari né dispari.

Limiti di f agli estremi del dominio ed eventuali asintoti: Si calcola

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \log(3 - e^x) + e^x = \log(3)$

$\Rightarrow\ y = \log(3)$ asintoto orizzontale sinistro (a $-\infty$)

- $\lim_{x \to \log(3)^-} f(x) = \lim_{x \to \log(3)^-} \log(3 - e^x) + e^x = -\infty$

$\Rightarrow\ x = \log(3)$ asintoto verticale sinistro

Derivabilità di f e intervalli di monotonia: f è derivabile nel suo dominio (cioè $\operatorname{dom} f' = \operatorname{dom} f$) e

$$f'(x) = \frac{-e^x}{3-e^x} + e^x = e^x \left[-\frac{1}{3-e^x} + 1 \right]$$

$$= e^x \, \frac{2-e^x}{3-e^x} \, .$$

Nel dominio di f' si ha:

$$f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2 - e^x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq \log(2) \, ,$$

quindi:

1. f crescente in $]-\infty, \log(2)]$;

2. f decrescente in $[\log(2), \log(3)[$;

3. $x = \log(2)$ punto di massimo assoluto di f.

Derivata seconda di f e intervalli di concavità/convessità:

f' è derivabile nel suo dominio e

$$f''(x) = e^x \frac{2-e^x}{3-e^x} + e^x \frac{-e^x(3-e^x)-(2-e^x)(-e^x)}{(3-e^x)^2}$$

$$= e^x \left[\frac{2-e^x}{3-e^x} - \frac{e^x}{(3-e^x)^2}\right] = e^x \, \frac{(2-e^x)(3-e^x)-e^x}{(3-e^x)^2}$$

$$= e^x \, \frac{e^{2x}-6e^x+6}{(3-e^x)^2} \, .$$

Allora

$$f''(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x}-6e^x+6 \geq 0 \, .$$

Ponendo $t = e^x$ si ha

$$e^{2x}-6e^x+6 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; t^2-6t+6 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow\; t \leq 3-\sqrt{3} \text{ oppure } t \geq 3+\sqrt{3}$$

da cui

$$e^{2x}-6e^x+6 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x \leq \log(3-\sqrt{3}) \text{ opp. } x \geq \log(3+\sqrt{3})$$

Quindi abbiamo

a. f convessa in $]-\infty, \log(3-\sqrt{3})]$;

b. f concava in $[\log(3-\sqrt{3}), \log(3)[$;

c. $x = \log(3-\sqrt{3})$ p.to di flesso di f, a tangente obliqua.

3) Studiare la funzione definita da

$$f(x) = \arctan\left(\frac{e^x + 5}{e^x - 1}\right).$$

Dominio di f ed eventuali simmetrie: Si ha

$$\operatorname{dom} f = \{x \in \mathbb{R}:\ e^x - 1 \neq 0\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R}:\ x \neq 0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[\,.$$

La funzione f non è pari né dispari.

Limiti di f agli estremi del dominio ed eventuali asintoti: Si calcola

- $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \arctan\left(\frac{e^x + 5}{e^x - 1}\right) = -\arctan(5)$$

  $\Rightarrow\ y = -\arctan(5)$ asintoto orizzontale sinistro

- $$\lim_{x\to0^\pm} f(x) = \lim_{x\to0^\pm} \arctan\left(\frac{e^x + 5}{e^x - 1}\right) = \pm\frac{\pi}{2}$$

- $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \arctan\left(\frac{e^x+5}{e^x-1}\right) = \frac{\pi}{4}$$

  $\Rightarrow \ y = \dfrac{\pi}{4}$ asintoto orizzontale destro

Derivabilità di f e intervalli di monotonia: f è derivabile nel suo dominio ($\operatorname{dom} f' = \operatorname{dom} f$) e si calcola

$$f'(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{e^x+5}{e^x-1}\right)^2} \frac{e^x(e^x-1)-(e^x+5)e^x}{(e^x-1)^2}$$

$$= -\frac{6e^x}{(e^x-1)^2+(e^x+5)^2}\,.$$

Quindi si ha:

$f'(x) < 0 \quad \Rightarrow f$ strett. decrescente nel suo dominio .

Derivata seconda di f e intervalli di concavità/convessità:

f' è derivabile nel suo dominio e si calcola:

$$f''(x) =$$

$$-6e^x \frac{\left[(e^x-1)^2+(e^x+5)^2\right] - 2\left[(e^x-1)e^x+(e^x+5)e^x\right]}{\left[(e^x-1)^2+(e^x+5)^2\right]^2}$$

$$= 12\, e^x \, \frac{e^{2x}-13}{[(e^x-1)^2+(e^x+5)^2]^2} \,.$$

Allora

$$f''(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad e^{2x} - 13 \geq 0\,.$$

Ponendo $t = e^x$ si ha

$$e^{2x} - 13 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; t^2 - 13 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow\; t \leq -\sqrt{13} \text{ oppure } t \geq \sqrt{13}$$

da cui

$$e^{2x} - 13 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; e^x \leq -\sqrt{13} \text{ oppure } e^x \geq \sqrt{13}$$

$$\Leftrightarrow\; x \geq \log(\sqrt{13})$$

Quindi abbiamo

a. f concava in $]-\infty, 0[\cup]0, \log(\sqrt{13})]$;

b. f convessa in $[\log(\sqrt{13}), +\infty[$;

c. $x = \log(\sqrt{13})$ p.to di flesso di f, a tangente obliqua.

4) Studiare la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} -x - \frac{\pi}{2} - 2 \quad \text{se}\, x < -2 \qquad (1) \\ \\ \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) \quad \text{se} \ -2 \le x \le 2 \qquad (2) \\ \\ -x \quad \text{se } x > 2 \qquad (3) \end{cases}$$

Osservazione: Se la funzione è assegnata a tratti, ciascuna espressione analitica che la funzione può assumere va considerata limitatamente all'intervallo su cui essa è assegnata come valore della funzione.

Dominio di f ed eventuali simmetrie: verifichiamo se ciascuna delle tre espressioni analitiche che f può assumere è ben definita sull'intervallo corrispondente.
Le espressioni (1) e (3) sono evidentemente ben definite su tutto $\mathbb{R}$.
Per quanto riguarda la (2), si ha che $\arcsin\left(\frac{x}{2}\right)$ è ben definito quando l'argomento della funzione $\arcsin$, cioè $\frac{x}{2}$, è compreso tra -1 e $+1$, ovvero quando $x \in [-2, 2]$.

Quest'ultimo è esattamente l'intervallo reale sul quale (3) è assegnata come espressione di f.
Se ne conclude che

$$\operatorname{dom} f = \mathbb{R} \, .$$

La funzione f non è pari né dispari.

Limiti di f agli estremi del dominio ed eventuali asintoti:
I limiti da calcolare sono a $\pm\infty$. Troviamo

- $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} -x - \frac{\pi}{2} - 2 = +\infty \, .$$

Vediamo se f ammette un asintoto obliquo sinistro. A questo scopo, calcoliamo:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x - \frac{\pi}{2} - 2}{x} = -1$$

e

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) + x = -\frac{\pi}{2} - 2 \, .$$

Abbiamo allora che la retta $y = -x - \frac{\pi}{2} - 2$ è asintoto obliquo sinistro per f.

Analogamente, si trova che

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} -x = -\infty\,.$

e $y=-x$ è asintoto obliquo destro per f.

Quando, come nel caso in esame, la funzione è assegnata a tratti, è anche utile trovare gli eventuali punti di discontinuità, determinandone la tipologia. All'interno degli intervalli su cui f assume espressioni distinte, f è continua (in quanto le espressioni (1), (2), (3) definiscono funzioni continue sugli intervalli corrispondenti). Occorre verificare direttamente la continuità nei punti ± 2 (p.ti di accumulazione di $\operatorname{dom} f$).

Si calcola:

$$\lim_{x\to-2^-} f(x) = \lim_{x\to-2^-} -x-\tfrac{\pi}{2}-2 = -\tfrac{\pi}{2} = f(-2)$$
$$\lim_{x\to-2^+} f(x) = \lim_{x\to-2^-} \arcsin\left(\tfrac{x}{2}\right) = -\tfrac{\pi}{2} = f(-2)$$

Quindi f è continua in $x=-2$.

Si calcola anche:

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \arcsin\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\pi}{2} = f(2)$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} -x = -2$$

da cui segue che 2 è p.to di discontinuità a salto di f.

<u>Derivabilità di f e intervalli di monotonia:</u> Usando i teoremi sul calcolo delle derivate, si trova che f è derivabile in $]-\infty,-2[$, $]-2,2[$, $]2,+\infty[$, con

$$f'(x) = \begin{cases} -1 & \text{se}\, x < -2 \text{ opp. } x > 2 \\ \\ \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} & \text{se } -2 < x < 2\,. \end{cases}$$

f non è derivabile in 2, perchè è discontinua.
Per verificare la derivabilità in -2, calcoliamo

$$\lim_{x\to -2^-} f'(x) = -1 \text{ e } \lim_{x\to -2^+} f'(x) = \lim_{x\to -2^+} \frac{1}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} = +\infty$$

da cui discende che -2 è un p.to angoloso di f.

Per quanto riguarda la monotonia di f, dal calcolo di f' segue subito che:

1. f è descrescente in $]-\infty,-2[$ e in $]2,+\infty[$;

2. f è crescente in $]-2,2[$;

3. $x=-2$: p.to di min. rel. (non ass., perchè f non inf. limitata)

4. $x=2$: p.to di max. rel. (non ass., perchè f non sup. limitata)

<u>Derivata seconda di f e intervalli di concavità/convessità:</u> si calcola:

$$f''(x)=\begin{cases} 0\,, & \text{se } x<-2 \text{ opp. } x>2 \\ \frac{1}{8}\,x\,\left(1-\frac{x^2}{4}\right)^{-\frac{3}{2}} & \text{se } -2<x<2\,. \end{cases}$$

Se ne deduce facilmente che

$$f''(x) \begin{cases} \leq 0 \;\; \Rightarrow \;\; f \text{ concava in }]-2,0]\,, \\ > 0 \;\; \Rightarrow \;\; f \text{ convessa in }]0,2[\,. \end{cases}$$

In particolare, f ha in 0 un p.to di flesso a tangente obliqua.
In $]-\infty,-2[$ e $]2,+\infty[$ (dove $f''(x) = 0$), f è banalmente sia concava che convessa.

Studi di funzione

5) Studiare la funzione definita da

$$f(x) = \arcsin\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{1}{3}\sqrt{2x+1}\,.$$

Dominio di f ed eventuali simmetrie: Il dominio di f è definito dall'insieme degli $x \in \mathbb{R}$ che verificano le condizioni:

$$(1):\ \frac{x}{x+1} \geq -1\,, \qquad (2):\ \frac{x}{x+1} \leq 1\,,$$

$$(3):\ x+1 \neq 0\,,$$

$$(4):\ 2x+1 \geq 0\,.$$

Risolviamo la disequazione (1)

$$(1) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{x+1} + 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x+1}{x+1} \geq 0\,.$$

Poiché deve valere (4), le soluzioni della disequazione (1) che interessano sono soltanto gli $x \in \mathbb{R}$ tali che

$$x + 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x > -1\,.$$

Per quanto riguarda la (2), si ha:

$$(2) \;\Leftrightarrow\; \frac{x}{x+1} - 1 \leq 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{-1}{x+1} \leq 0 \;\Leftrightarrow\; x > -1\,.$$

Si trova, infine, che:

$$(3) \;\Leftrightarrow\; x \neq -1 \qquad \text{e} \qquad (4) \;\Leftrightarrow\; x \geq -\frac{1}{2}\,.$$

Dai conti precedenti si conclude pertanto che il dominio è costituito da

$$\operatorname{dom} f := \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[\,.$$

La funzione f non è pari né dispari, ed è continua nel suo dominio.

Limiti di f agli estremi del dominio ed eventuali asintoti:
Nel proprio dominio, la funzione f è continua. L'unico limite da calcolare è quello a $+\infty$. Si trova:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \arcsin\left(\frac{x}{x+1}\right) - \frac{1}{3}\sqrt{2x+1} = -\infty\,.$$

Verifichiamo l'eventuale presenza di asintoto obliquo a $+\infty$, calcolando il $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Si trova:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\arcsin\left(\frac{x}{x+1}\right)}{x} - \frac{1}{3}\frac{\sqrt{2x+1}}{x} = 0\,.$$

Questo indica che la funzione non ammette asintoto obliquo a $+\infty$.

Derivabilità di f e intervalli di monotonia: Studiamo ora la derivabilità di f. In conseguenza dei teoremi generali sul calcolo delle derivate, f è certamente derivabile in tutti i punti $x \in \operatorname{dom} f$ per cui

$$-1 < \frac{x}{x+1} < 1 \quad \text{e} \quad 2x+1 > 0\,,$$

ovvero i punti dell'intervallo $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$. In questi punti si calcola (usando le note formule di derivazione):

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{x+1}\right)^2}} \cdot \frac{x+1-x}{(x+1)^2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2\sqrt{2x+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{2x+1}{(x+1)^2}}} \cdot \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{3\sqrt{2x+1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2x+1}(x+1)} - \frac{1}{3\sqrt{2x+1}}$$

$$= \frac{2-x}{3\sqrt{2x+1}(x+1)}\,.$$

Studiamo il segno della derivata prima di f nell'intervallo $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$. Poichè per $x > -\frac{1}{2}$ si ha $\sqrt{2x+1}(x+1) > 0$, risulta che

$$f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2-x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq 2\,.$$

Se ne deduce che

1. f è monotona crescente in $\left]-\frac{1}{2}, 2\right[$

2. f è monotona decrescente in $]2, +\infty[$.

In particolare, in f ha un punto di massimo (assoluto) in $x = 2$.

Per quanto riguarda l'esistenza della derivata prima (destra) in $x = -\frac{1}{2}$, poiché f è continua in $x = -\frac{1}{2}$, calcoliamo il limite destro di f' in $x = -\frac{1}{2}$. Si trova che:

$$\lim_{x \to -\frac{1}{2}^+} f'(x) = \lim_{x \to -\frac{1}{2}^+} \frac{2-x}{3\sqrt{2x+1}(x+1)} = +\infty\,.$$

Questo significa che il grafico della funzione f arriva nel punto $(-\frac{1}{2}, f(-\frac{1}{2}))$ con retta tangente verticale (cioè la retta $x = -\frac{1}{2}$).

<u>Derivata seconda di f e concavità/convessità:</u> Senza bisogno di calcolare esplicitamente la derivata seconda

di f, si evidenzia l'esistenza di un punto di flesso (a tangente obliqua) a destra del punto di massimo $x = 2$. Questo è deducibile dal fatto che $x = 2$ è un punto di massimo relativo (assoluto) per f, con $f'(2) = 0$ (cioè la retta tangente al grafico della funzione nel punto $(2, f(2))$ è orizzontale), f decresce in $[2, +\infty[$ e

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2 - x}{3\sqrt{2x + 1}(x + 1)} = 0$$

(ovvero la retta tangente al grafico della funzione nel generico punto $(x, f(x))$ tende a diventare parallela all'asse delle ascisse, al crescere di x. Questo indica cha la funzione, concava in un intorno di $x = 2$, deve necessariamente diventare convessa per x sufficientemente grande; perció nell'intervallo $]2, +\infty[$ deve esistere un punto di flesso per f. La retta tangente al punto di flesso dovrà essere obliqua, in quanto $x = 2$ è il solo punto stazionario di f.

6) Studiare la funzione definita da

$$f(x) = \left(2 - \frac{\pi}{2} \frac{1}{\arctan x}\right)^2 + 1\,.$$

<u>Dominio di f ed eventuali simmetrie</u>: Si trova subito che

$$\operatorname{dom} f = \{x \in \mathbb{R} :\ x \neq 0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[\,.$$

La funzione f non è pari né dispari.

<u>Limiti di f agli estremi del dominio ed eventuali asintoti</u>: Si calcola

- $$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(2 - \frac{\pi}{2} \frac{1}{\arctan x}\right)^2 + 1 = 10$$

  $\Rightarrow\ y = 10$ asintoto orizzontale sinistro (a $-\infty$)

- $$\lim_{x \to 0^{\pm}} f(x) = \lim_{x \to 0^{\pm}} \left(2 - \frac{\pi}{2} \frac{1}{\arctan x}\right)^2 + 1 = +\infty$$

$$\Rightarrow \ x = 0 \text{ asintoto verticale}$$

- $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(2 - \frac{\pi}{2}\frac{1}{\arctan x}\right)^2 + 1 = 2$$

$$\Rightarrow \ y = 2 \text{ asintoto orizzontale destro}$$

<u>Derivabilità di f e intervalli di monotonia:</u> f è derivabile nel suo dominio (cioè $\operatorname{dom} f' = \operatorname{dom} f$) e

$$f'(x) = 2\left(2 - \frac{\pi}{2}\frac{1}{\arctan x}\right)\left(-\frac{\pi}{2}\right)\frac{-1}{(\arctan x)^2}\cdot\frac{1}{1+x^2}$$

$$= \left(2 - \frac{\pi}{2}\frac{1}{\arctan x}\right)\frac{\pi}{(\arctan x)^2(1+x^2)}.$$

Nel dominio di f' si ha:

$$f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2-\frac{\pi}{2}\frac{1}{\arctan x} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\arctan x} \leq \frac{4}{\pi}.$$

Si trova allora che

$$f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \arctan x > 0 \\ \arctan x \geq \frac{\pi}{4} \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} \arctan x < 0 \\ \arctan x \leq \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

Quindi

$$f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < 0 \text{ oppure } x \geq 1\,.$$

quindi:

1. f crescente in $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$;
2. f decrescente in $]0, 1[$;
3. $x = 1$ punto di minimo relativo di f ($x = 1$ è punto di minimo <u>assoluto</u>, dato che $f(1) = 1 = \min f$).

<u>Derivata seconda di f e concavità/convessità</u>: Senza bisogno di calcolare esplicitamente la derivata seconda di f, si osserva che la funzione deve ammettere un punto di flesso a destra di $x = 1$, in quanto $x = 1$ è punto di minimo relativo per f, con $f'(1) = 0$, la funzione è crescente in $[1, +\infty[$ e ha un asintoto orizzontale a $+\infty$. Questo indica cha la funzione, convessa in un intorno di $x = 1$, deve necessariamente diventare concava per x sufficientemente grande; perció nell'intervallo $]1, +\infty[$ deve esistere un punto di flesso per

f. La retta tangente al punto di flesso dovrà essere obliqua, in quanto $x = 1$ è il solo punto stazionario di f.

7) Studiare la funzione definita da

$$f(x) = \frac{|x^3 - 1|}{x^2}\,.$$

Dominio di f ed eventuali simmetrie: Si trova subito che

$$\mathrm{dom}\, f = \mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[\,.$$

La funzione f non è pari né dispari.

Dalla definizione di modulo, si ha che per $x \in \mathrm{dom}\, f$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - x^3}{x^2}\,, & \text{se } x < 1\,, \\[2ex] \dfrac{x^3 - 1}{x^2}\,, & \text{se } x \geq 1\,. \end{cases}$$

La funzione f è continua nel suo dominio.

Limiti di f agli estremi del dominio ed eventuali asintoti:
Si calcola

- $$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-x^3}{x^2} = +\infty$$

- $$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{|x^3-1|}{x^2} = +\infty$$

  $\Rightarrow$ $x = 0$ asintoto verticale

- $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-1}{x^2} = +\infty\,.$$

Verifichiamo l'eventuale presenza di asintoto obliquo a $+\infty$, calcolando il $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. Si trova:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{|x^3-1|}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-1}{x^3} = 1\,.$$

Quindi, calcoliamo

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \tfrac{|x^3-1|}{x^2} - x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \tfrac{x^3-1}{x^2} - x = \lim_{x\to+\infty} \tfrac{x^3-1-x^3}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \tfrac{-1}{x^2} = 0\,.$$

I limiti precedenti indicano che la retta $y = x$ è asintoto obliquo a $+\infty$ per f.

Analogamente, si trova che

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{|x^3-1|}{x^3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1-x^3}{x^3} = -1\,.$$

e $\lim_{x\to-\infty} f(x) + x = 0$, da cui risulta che la retta $y = -x$ è asintoto obliquo a $-\infty$ per f.

Derivabilità di f e intervalli di monotonia: dai teoremi generali sul calcolo delle derivate, risulta che f è certamente derivabile in ogni punto $x \in \operatorname{dom} f$ per cui $x \neq 1$ e, usando le note formule di derivazione, si calcola:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-3x^2 \cdot x^2 - (1-x^3)\cdot 2x}{x^4} = -1 - \dfrac{2}{x^3}\,, & \text{se } x < 1\,, \\[2ex] \dfrac{3x^2 \cdot x^2 - (x^3-1)\cdot 2x}{x^4} = 1 + \dfrac{2}{x^3}\,, & \text{se } x > 1\,. \end{cases}$$

Derivabilità di f in $x = 1$:
Poichè la funzione f è continua in $\operatorname{dom} f$ e derivabile in $\operatorname{dom} f \setminus \{1\}$, possiamo controllare la derivabilità di f in $x = 1$ calcolando il $\lim_{x \to 1} f'(x)$. Si trova:

$$\lim_{x \to 1^-} f'(x) = \lim_{x \to 1^-} -1 - \frac{2}{x^3} = -3\,,$$

$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = \lim_{x \to 1^+} 1 + \frac{2}{x^3} = 3\,,$$

da cui si deduce che $x = 1$ è un punto angoloso per f (con $f'_-(1) = -3$ e $f'_+(1) = 3$).
Per quanto riguarda il segno della derivata prima di f, si trova allora che:

- Per $x > 1$: $f'(x) = 1 + \dfrac{2}{x^3} > 0$

- Per $x < 1$:

$$f'(x) \geq 0 \;\Leftrightarrow\; -1 - \frac{2}{x^3} \geq 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{2 + x^3}{x^3} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow\; -\sqrt[3]{2} \leq x < 0$$

Quindi

$$f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\sqrt[3]{2} \leq x < 0 \text{ oppure } x > 1\,.$$

quindi:

1. f crescente in $]-\sqrt[3]{2}, 0[\cup]1, +\infty[$;

2. f decrescente in $]-\infty, -\sqrt[3]{2}[\cup]0, 1[$;

3. $x = -\sqrt[3]{2}$ è un punto di minimo relativo per f;

3. $x = 1$ punto di minimo relativo per f ($x = 1$ è anche punto di minimo assoluto, dato che $f(1) = 0 = \min f$).

<u>Derivata seconda di f e concavità/convessità:</u> per $x \in \operatorname{dom} f \setminus \{1\}$ si calcola direttamente

$$f''(x) = \begin{cases} 2 \cdot \dfrac{1}{x^6} \cdot 3x^2 = \dfrac{6}{x^4}\,, & \text{se } x < 1 \\[2ex] -2 \cdot \dfrac{1}{x^6} \cdot 3x^2 = -\dfrac{6}{x^4}\,, & \text{se } x > 1\,. \end{cases}$$

Lo studio del segno di f'' è evidente e, da questo, si ricava che

1. f è convessa in $]-\infty, 0[\cup]0, 1[$,

2. f è concava in $]1, +\infty[$.

8) Studiare la funzione definita da

$$f(x) = \frac{x+2}{|\log(x+2)|}\,.$$

Osserviamo anzitutto che f si ottiene traslando di 2, nella direzione negativa dell'asse x, la funzione

$$g(x) = \frac{x}{|\log x|}$$

cioè abbiamo $f(x) = g(x+2)$. Possiamo pertanto concentrarci sullo studio della funzione g, deducendo da esso il comportamento di f. Abbiamo:

$$\operatorname{dom} g = \{x \in \mathbb{R} : \; x > 0 \text{ e } \log x \neq 0\} =]0,1[\cup]1,+\infty[\,.$$

La funzione non è pari né dispari.
La funzione g è continua nel suo dominio.

Dalla definizione di modulo, si ha che:

$$g(x) = \begin{cases} -\dfrac{x}{\log x}\,, & \text{se } 0 < x < 1\,, \\ \\ \dfrac{x}{\log x}\,, & \text{se } x > 1\,. \end{cases}$$

<u>Limiti di g agli estremi del domino</u>:

$$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{|\log x|} = 0\,.$$

$$\lim_{x\to 1} g(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x}{|\log x|} = +\infty$$

$$\Rightarrow \;\; x = 1 \;\text{ asintoto verticale}\,.$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{|\log x|} = +\infty\,.$$

Verifichiamo l'eventuale presenza di asintoto obliquo a $+\infty$ per g, calcolando il $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{g(x)}{x}$. Si trova:

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{|\log x|} = 0\,.$$

Questo indica che la funzione non ammette asintoto obliquo a $+\infty$.
Studiamo ora la derivabilità di g. In conseguenza dei teoremi sul calcolo delle derivate, g è derivabile nel suo dominio e la sua derivata prima è

$$g'(x) = \begin{cases} -\dfrac{\log x - x \cdot \frac{1}{x}}{\log^2 x} = -\dfrac{\log x - 1}{\log^2 x}\,, & \text{se } 0 < x < 1\,, \\[2ex] \dfrac{\log x - 1}{\log^2 x}\,, & \text{se } x > 1\,. \end{cases}$$

Per quanto riguarda il segno di g', abbiamo:

Per $0 < x < 1$

$$g'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{\log x - 1}{\log^2 x} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \log x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \quad x \leq e\,.$$

Per $x > 1$:

$$g'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\log x - 1}{\log^2 x} \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq e\,.$$

Quindi abbiamo che g è

1. crescente in $]0,1[\cup]e,+\infty[$

2. decrescente in $]1,e[$.

In particolare, in $x = e$ g ha un punto di minimo relativo (non assoluto, perchè $g(e) = e$ e $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$).

Calcoliamo la <u>derivata seconda</u> di g e studiamone il segno, al fine di determinare gli intervalli di concavità/convessità di g. In $]0,+\infty[$, g' è derivabile. Per $0 < x < 1$ si calcola:

$$g''(x) = -\frac{\frac{1}{x}\cdot\log^2 x - (\log x - 1)\cdot 2\log x\cdot\frac{1}{x}}{\log^4 x} = -\frac{2-\log x}{x\log^3 x}\,.$$

Procedendo analogamente nel caso $x > 1$, in definitiva si trova:

$$g''(x) = \begin{cases} -\dfrac{2-\log x}{x\log^3 x}\,, & 0 < x < 1 \\ \\ \dfrac{2-\log x}{x\log^3 x}\,, & x > 1\,. \end{cases}$$

Per quanto riguarda il segno di g'', si trova:

Per $0 < x < 1$:

$$g''(x) \geq 0 \iff -\frac{2-\log x}{x\log^3 x} \geq 0 \iff \frac{2-\log x}{x\log^3 x} \leq 0$$

$$\iff 2 - \log x \geq 0 \iff x \leq e^2\,.$$

Per $x > 1$:

$$g''(x) \geq 0 \iff \frac{2-\log x}{x\log^3 x} \geq 0 \iff 2 - \log x \geq 0$$

$$\iff x \leq e^2\,.$$

Se ne deduce che

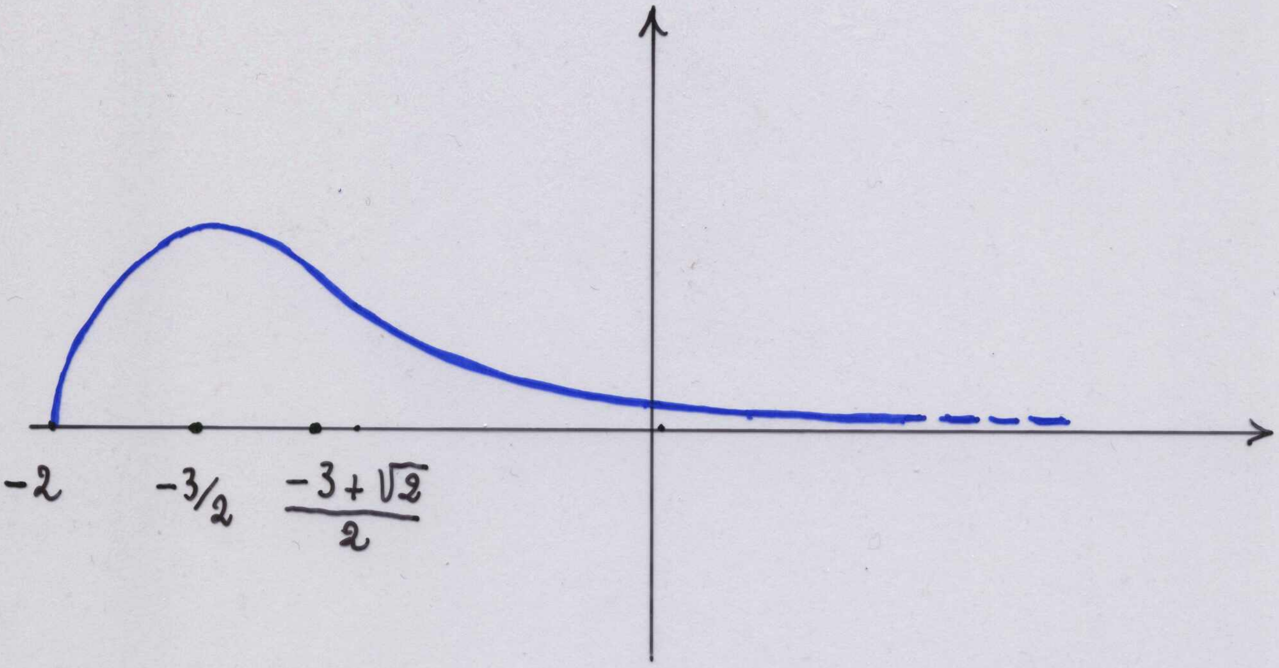
1. g è convessa in $]0,1[\cup]1,e^2[$;

2. concava in $]e^2,+\infty[$.

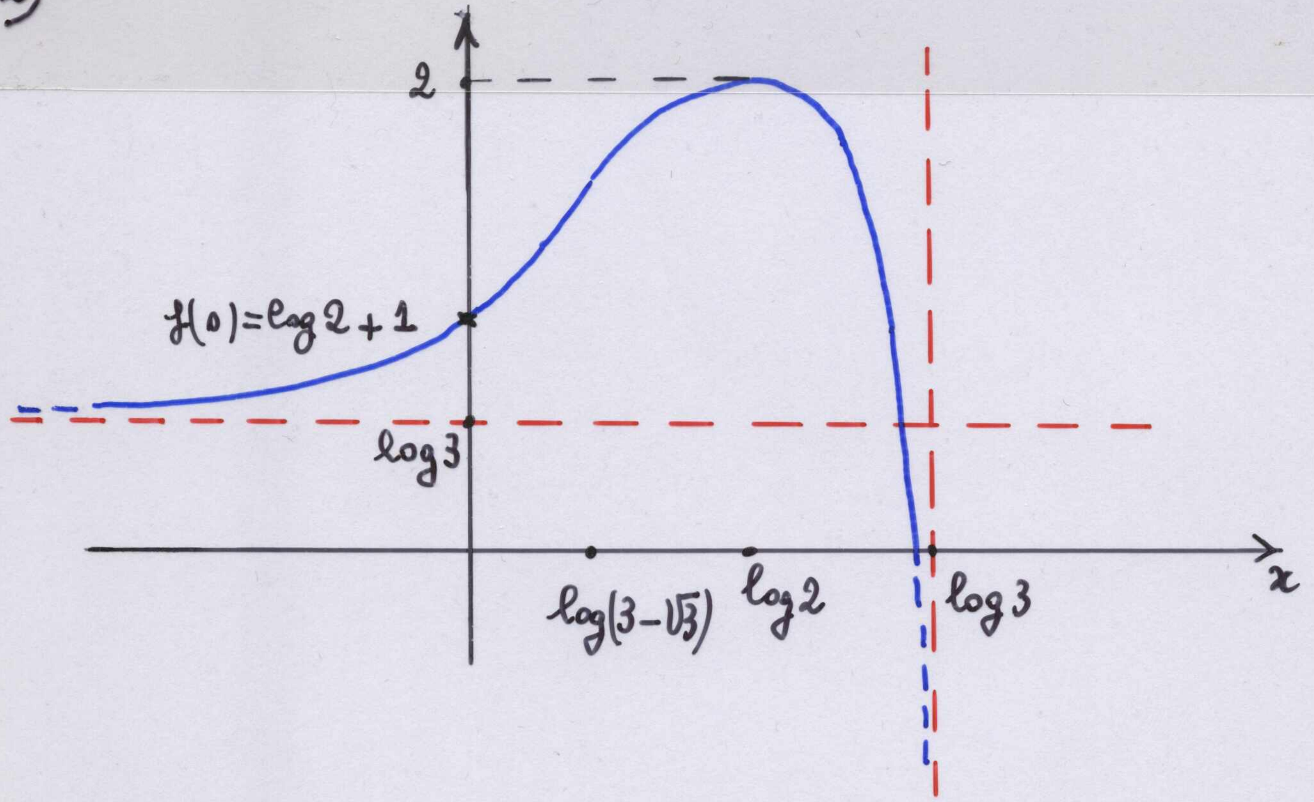
In $x=e^2$, g ha un p.to di flesso (a tangente obliqua).

Poichè $f(x)=g(x+2)$, il grafico di f si può ottenere traslando di 2 il grafico di g nella direzione negativa dell'asse delle ascisse.

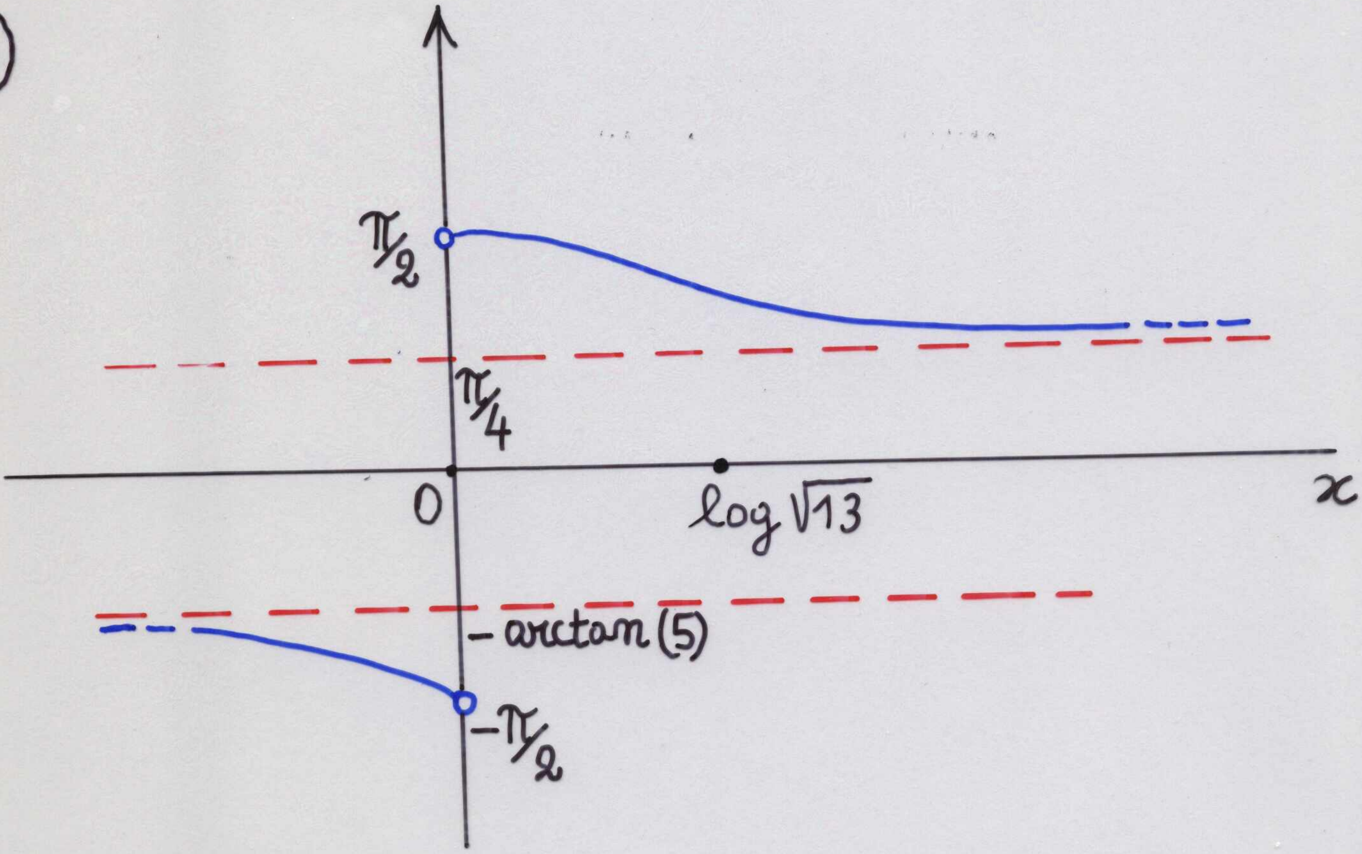
1)



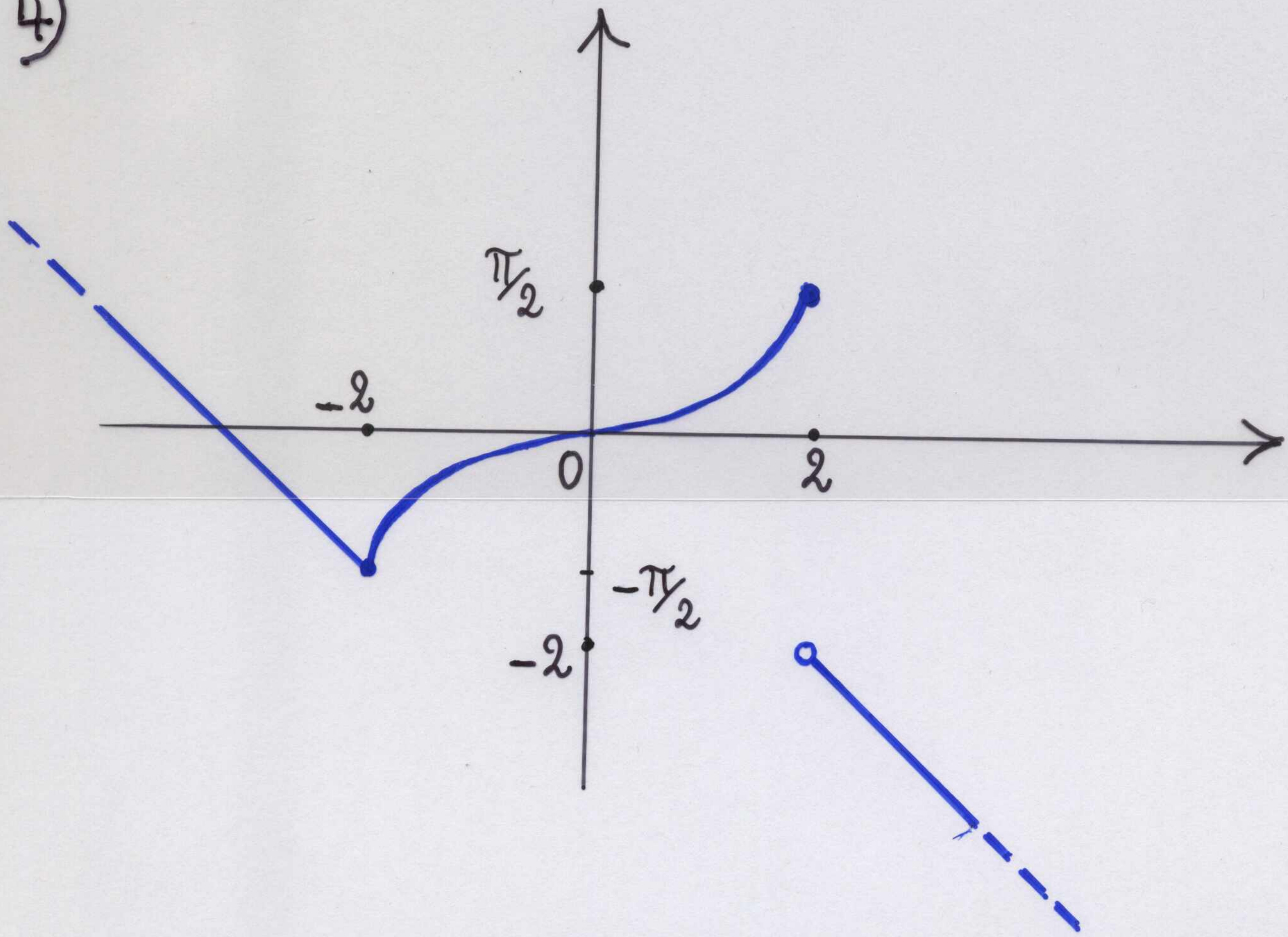
2)



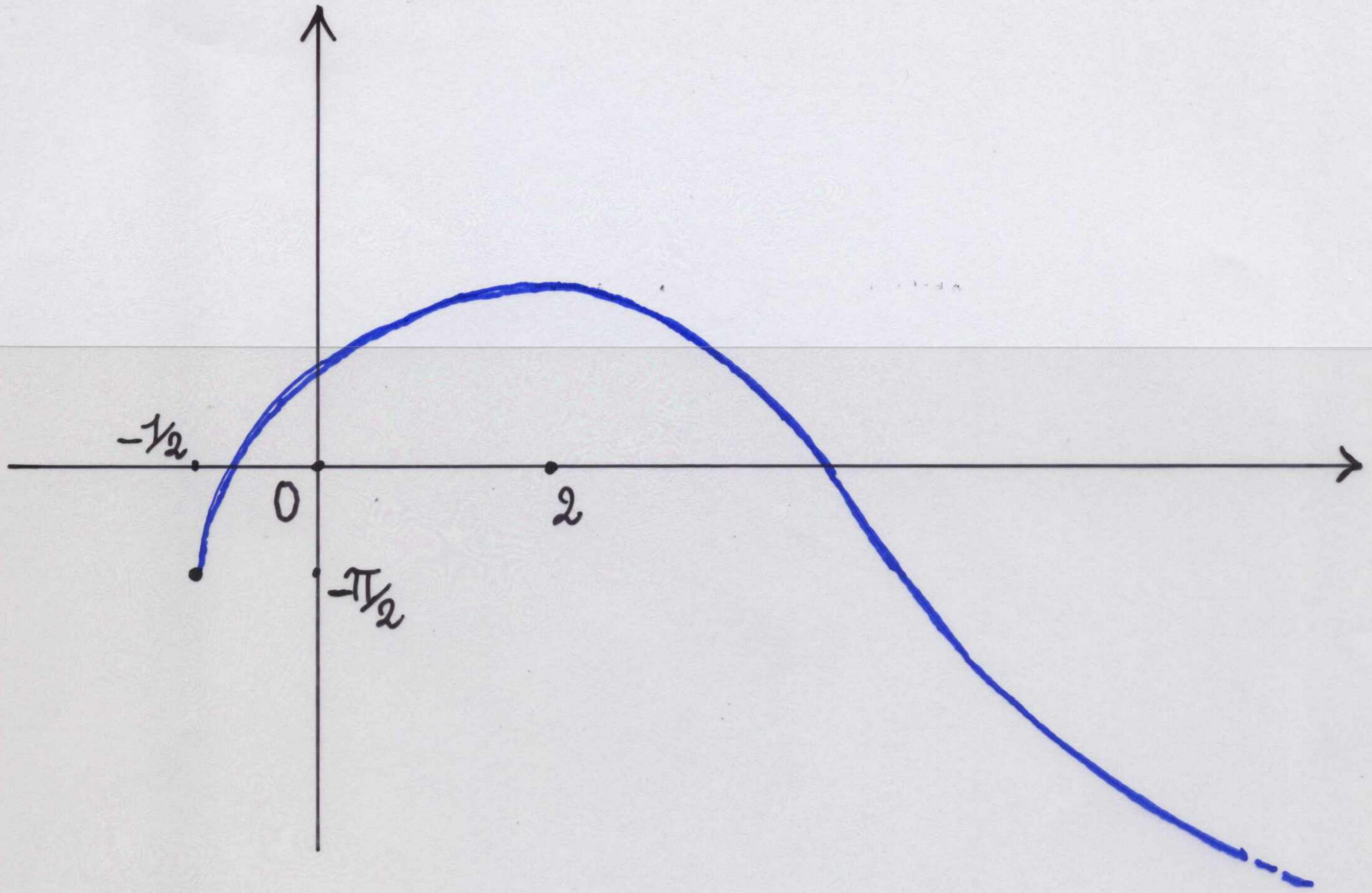
3)



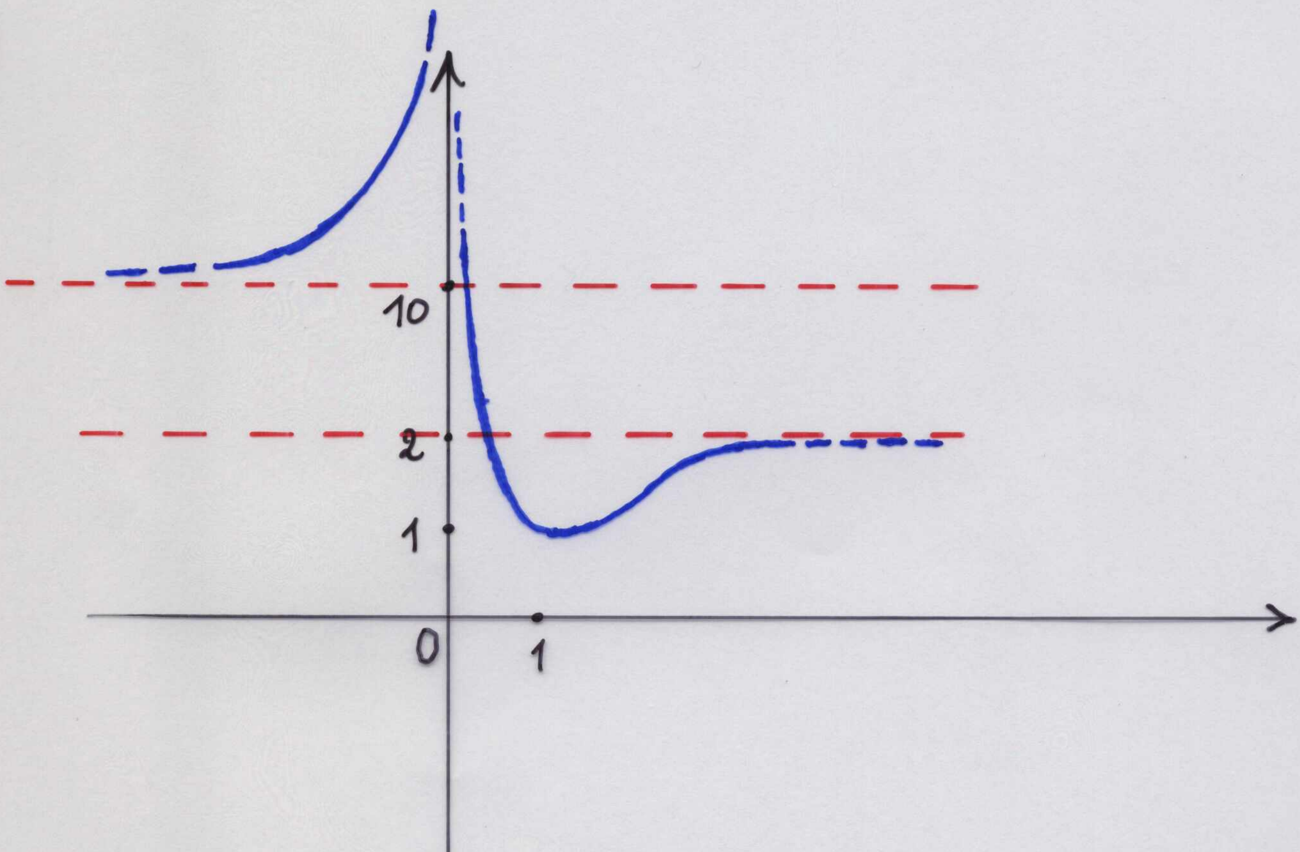
4)



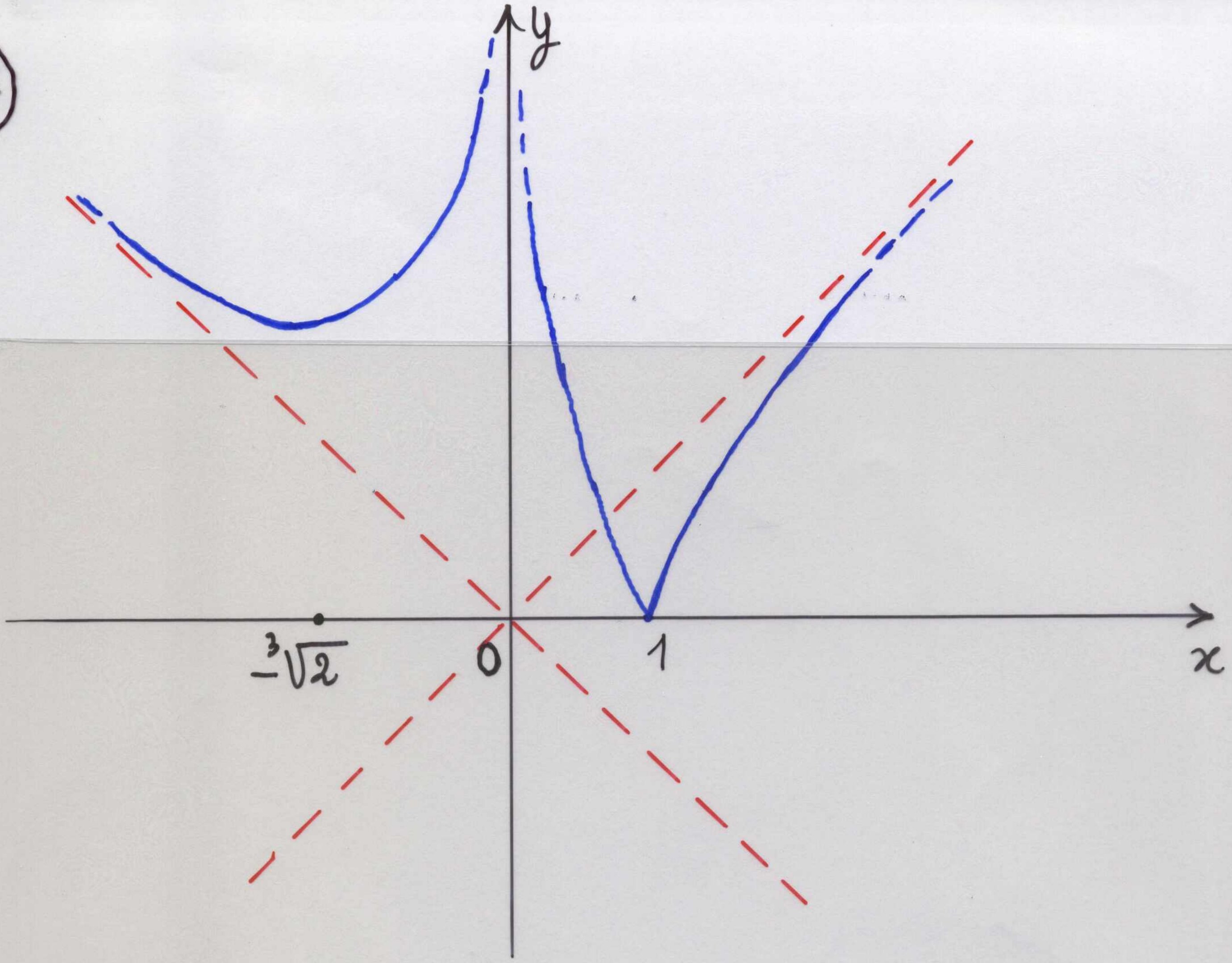
5)



6)



7)



8)