

Dispense di Matematica

Paola Trebeschi

Corso di Laurea in Biotecnologie

Università degli Studi di Brescia

Anno Accademico 2017/2018

Indice

1	Preliminari	7
1.1	Logica-cenni	7
1.1.1	Quantificatori	7
1.1.2	Proposizioni e Predicati	7
1.1.3	Connettivi logici	8
1.1.4	Negazione di proposizioni con quantificatori e connettivi	10
1.1.5	Teoremi	11
1.2	Insiemi e sottoinsiemi	12
1.3	Relazioni	13
2	I numeri naturali, interi e razionali	15
2.1	I Numeri naturali	16
2.1.1	Calcolo combinatorio	18
2.2	I Numeri interi e razionali	18
3	I Numeri Reali	21
3.1	Struttura algebrica	21
3.2	Valore assoluto	22
3.3	L'assioma di Dedekind: completezza dei numeri reali	23
3.4	Estremo inferiore e superiore di un insieme	24
3.4.1	Maggioranti e minoranti	24
3.4.2	Massimi e minimi	25
3.4.3	Insiemi limitati	25
3.4.4	Estremo inferiore e superiore di un insieme	26
3.5	Retta reale estesa	29
4	Funzioni	33
4.1	Funzioni iniettive, suriettive, biunivoche	35
4.2	Funzione inversa, restrizione e composizione	37
4.3	Funzioni pari, dispari, e periodiche	38
4.3.1	Parità e disparità	38
4.3.2	Periodicità	38
4.4	Funzioni monotone	39
4.5	Funzioni elementari	39
4.5.1	Le funzioni potenza a esponente naturale	40
4.5.2	Le funzioni potenza a esponente intero negativo	42

4.5.3	Inverse delle funzioni potenza a esponente naturale (strettamente positivo)	43
4.5.4	Le funzioni potenza a esponente razionale e reale	44
4.5.5	Le funzioni esponenziali	45
4.5.6	Le funzioni logaritmiche	46
4.5.7	Le funzioni trigonometriche e le loro inverse	50
4.5.8	Le funzioni iperboliche	53
4.6	Operazioni algebriche su funzioni reali di variabile reale.	54
4.7	Ordinamento delle funzioni reali.	55
4.8	Traslazioni del grafico.	55
4.9	Dilatazioni e contrazioni del grafico.	56
4.10	Successioni	56
5	Limiti di funzioni	57
5.1	Cenni di topologia	57
5.2	Definizioni	58
5.3	Limite destro e sinistro	61
5.4	Asintoti	62
5.5	Primi teoremi sui limiti	64
5.6	Confronto asintotico	69
5.6.1	Confronto fra infiniti	70
5.6.2	Confronto fra infinitesimi	71
5.7	Limiti di funzioni monotone	73
5.8	Funzioni continue	74
5.9	Punti di discontinuità	77
5.10	Prime proprietà delle funzioni continue	80
5.11	Funzioni continue su un intervallo	80
5.12	Funzioni continue invertibili	83
6	Derivate	85
6.1	Definizione di derivata e derivate di funzioni elementari	85
6.2	Punti di non derivabilità	91
6.3	Regole di derivazione	93
6.4	Massimi e minimi relativi	97
6.5	I teoremi di Rolle, Cauchy e Lagrange	99
6.6	Derivate di funzioni monotone	102
6.7	Il teorema di de l'Hopital	103
6.8	Derivate di ordini successivi	106
6.9	Il polinomio di Taylor	107
6.9.1	Il polinomio di Taylor con il resto di Peano	109
6.9.2	Polinomi di Mac Laurin notevoli	110
6.9.3	Sviluppi di Mac Laurin notevoli	111
7	Cenni sulle funzioni convesse	115
7.1	Convessità e derivabilità	117

8	Integrale di Riemann	119
8.1	Motivazioni	119
8.2	Definizione di integrale	120
8.3	Classi di funzioni integrabili	125
8.4	Proprietà dell'integrale	126
8.5	La media integrale	127
8.6	I teoremi fondamentali del calcolo	130
	8.6.1 Il problema della primitiva	130
	8.6.2 Il primo teorema fondamentale del calcolo	133
	8.6.3 IL secondo teorema fondamentale del calcolo	135
8.7	Formule di integrazione	137
	8.7.1 Integrazione per parti	137
	8.7.2 Integrazione per sostituzione	138
9	Equazioni differenziali ordinarie	141
9.1	Formulazione del problema	141
9.2	Equazioni a variabili separabili	142
9.3	Equazioni lineari del primo ordine a coefficienti continui	144
9.4	Equazioni lineari del secondo ordine	146
9.5	Appendice: Numeri complessi	150
	9.5.1 Risoluzione di un'equazione di secondo grado in \mathbb{C}	151

Capitolo 1

Preliminari

1.1 Logica-cenni

Scopo di questa sezione di preliminari è introdurre nozioni di logica e il vocabolario per una corretta interpretazione delle dimostrazioni.

1.1.1 Quantificatori

I quantificatori sono gli elementi fondamentali del linguaggio matematico.

- \forall quantificatore universale: “per ogni”
- \exists quantificatore esistenziale: “esiste”
- $\exists!$ quantificatore esiste unico: “esiste uno e uno solo”.

1.1.2 Proposizioni e Predicati

Definizione 1.1 (Proposizione). *Chiamiamo proposizione una frase di senso compiuto, della quale si può inequivocabilmente dire se è vera o falsa.*

Indichiamo le proposizioni con le lettere $\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \dots$

Esempio 1.2. 1. \mathcal{P}_1 : quest’aula contiene studenti di Biotecnologia (**VERA**);

2. \mathcal{P}_2 : Brescia è una città di mare (**FALSA**)

Osservazione 1.3. *Una proposizione può essere VERA o FALSA, ma NON, contemporaneamente, vera e falsa*

Osservazione 1.4. *Una frase che non dà informazioni, NON è una proposizione. Ad esempio:*

1. *Che ora è?* (**non è una prop.**)

2. *Domani* (**non è una prop.**)

Definizione 1.5 (Predicato). *Un predicato è una frase contenente una o più variabili libere, ad esempio:*

$\mathcal{P}(x)$ predicato dipendente da x
 $\mathcal{Q}(x, y)$ predicato dipendente da x, y

Esempio 1.6. 1. $\mathcal{P}(x) = \text{"L'intero } x \text{ è un numero primo"}$

2. $\mathcal{Q}(x, y) = \text{"Il numero } x \text{ è maggiore di } y\text{"}$

I predicati NON hanno un valore di verità intrinseco: quest'ultimo dipende dai valori attribuiti alle variabili libere. Con riferimento all'esempio 1.6 abbiamo:

$\mathcal{P}(2) \text{ V, } \quad \mathcal{P}(4) \text{ F}$

$\mathcal{Q}(3, \frac{7}{2}) \text{ F, } \quad \mathcal{Q}(2, \frac{1}{5}) \text{ V}$

Un modo per trasformare predicati in proposizioni è l'uso di uno dei quantificatori.

Esempio 1.7. Sia $\mathcal{P}(x)$ il predicato

$\mathcal{P}(x) = \text{" nel luogo } x \text{ piove"}$

1. Piove in ogni luogo: $\forall x : \mathcal{P}(x)$

2. Esiste un luogo in cui piove: $\exists x : \mathcal{P}(x)$

Osservazione 1.8. Quando un predicato dipende da più variabili i quantificatori possono essere mescolati. **MAI** invertire l'ordine dei quantificatori in una proposizione! Questa operazione può alterare il senso della frase!

Esempio:

$\mathcal{Q}(x, y) = \text{"nel luogo } x \text{ piove nel giorno } y\text{"}$

Allora:

1. In ogni luogo c' è almeno un giorno in cui piove: $\forall x \exists y : \mathcal{Q}(x, y)$ (**prop. VERA**)

2. Esiste un giorno in cui piove in ogni luogo: $\exists y \forall x : \mathcal{Q}(x, y)$ (**prop. FALSA**)

1.1.3 Connettivi logici

I connettivi logici sono operatori che trasformano una o più proposizioni in altre proposizioni, il cui valore di verità dipende dai valori di verità delle proposizioni di partenza.

non (NEGAZIONE): trasforma \mathcal{P} nella proposizione **non**(\mathcal{P}) che ha valore di verità **contrario** a \mathcal{P} .

- L'operatore di negazione, applicato due volte, si elide,

$$\mathbf{non}(\mathbf{non}(\mathcal{P})) = \mathcal{P}$$

e (CONGIUNZIONE) \wedge : Date \mathcal{P} e \mathcal{Q} ,

$$\mathcal{P} \mathbf{e} \mathcal{Q}$$

è la proposizione nella quale valgono sia la prima, sia la seconda.

Quindi, $\mathcal{P} \mathbf{e} \mathcal{Q}$ è vera unicamente se sia \mathcal{P} sia \mathcal{Q} sono vere.

o (DISGIUNZIONE) \vee : Date \mathcal{P} e \mathcal{Q} ,

$$\mathcal{P} \mathbf{o} \mathcal{Q}$$

è la proposizione nella quale vale almeno delle due.

Quindi,

- $\mathcal{P} \circ \mathcal{Q}$ è vera se almeno una fra \mathcal{P} o \mathcal{Q} è vera.
- Scrivendo $\mathcal{P} \circ \mathcal{Q}$, non escludo che siano vere entrambe.

Esempio 1.9. Date:

\mathcal{P} : “3 è un numero pari” FALSA

\mathcal{Q} : “4 non è un numero primo” VERA

Allora:

- **non** \mathcal{P} : “3 **non** è un numero pari” VERA
- $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$: “3 è un numero pari e 4 non è un numero primo” FALSA
- $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$: “3 è un numero pari **oppure** 4 non è un numero primo” VERA
- **non** ($\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$): “3 **non** è un numero pari **oppure** 4 è un numero primo” = (**non** \mathcal{P}) \vee (**non** \mathcal{Q}) VERA
- **non** ($\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$): “3 **non** è un numero pari e 4 è un numero primo” = (**non** \mathcal{P}) \wedge (**non** \mathcal{Q}) FALSA

\Rightarrow (IMPLICAZIONE): Date \mathcal{P} e \mathcal{Q} , il connettivo \Rightarrow crea la proposizione $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$, che si legge

- \mathcal{P} implica \mathcal{Q}
- se \mathcal{P} , allora \mathcal{Q}

Terminologia alternative per $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$:

- \mathcal{P} è **condizione sufficiente** per \mathcal{Q}
- \mathcal{Q} è **condizione necessaria** per \mathcal{P}

Esempio 1.10. Siano:

\mathcal{P} : “Fido è un cane”;

\mathcal{Q} : “Fido è un mammifero”.

$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$: “**Se** Fido è un cane **allora** è un mammifero”

Con la Terminologia alternativa:

- \mathcal{P} è condizione SUFFICIENTE per \mathcal{Q} : l’essere un cane basta per essere un mammifero.
- \mathcal{Q} è condizione NECESSARIA per \mathcal{P} : l’essere mammifero è un requisito indispensabile per essere cane, ovvero **se** Fido non è un mammifero **allora** non può essere un cane.

Quindi:

Osservazione 1.11. $[\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}]$ equivale a $[\mathbf{non} \mathcal{Q} \Rightarrow \mathbf{non} \mathcal{P}]$

Esempio 1.12 (Esempio matematico). Data $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in I = (a, b)$:

$$f \text{ derivabile in } x_0 \Rightarrow f \text{ continua in } x_0$$

- La derivabilità in x_0 è condizione SUFFICIENTE per la continuità in x_0
- La continuità in x_0 è condizione NECESSARIA per la derivabilità in x_0 (ovvero se f NON è continua in x_0 allora f NON è derivabile in x_0).

Osservazione 1.13. Negare $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$: significa negare che \mathcal{Q} sia indispensabile per la validità di \mathcal{P} , ovvero significa affermare che \mathcal{P} può valere (essere vera) quando non vale \mathcal{Q} , cioè:

$$[\text{non}(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})] \Leftrightarrow [\mathcal{P} \text{ e } (\text{non } \mathcal{Q})]$$

Osservazione 1.14. In generale:

$$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q} \quad \text{è DIVERSO da} \quad \mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$$

\Leftrightarrow (DOPPIA IMPLICAZIONE): Date \mathcal{P} e \mathcal{Q} , il connettivo \Leftrightarrow crea la proposizione

$$\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q} \quad = \quad (\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q} \text{ e } \mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P})$$

Si legge:

- \mathcal{P} equivale a \mathcal{Q}
- \mathcal{P} è **condizione necessaria e sufficiente** per \mathcal{Q}
- \mathcal{P} se e solo se \mathcal{Q}

Osservazione 1.15.

$$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q} \Leftrightarrow (\text{equivale a}) \text{non}(\mathcal{Q}) \Rightarrow \text{non}(\mathcal{P})$$

1.1.4 Negazione di proposizioni con quantificatori e connettivi

Apprendiamo alcune regole **fondamentali** per

1. Negare proposizioni (predicati) contenenti connettivi:

$$\text{non}(\mathcal{P} \text{ e } \mathcal{Q}) = \text{non}(\mathcal{P}) \text{ o } \text{non}(\mathcal{Q})$$

$$\text{non}(\mathcal{P} \text{ o } \mathcal{Q}) = \text{non}(\mathcal{P}) \text{ e } \text{non}(\mathcal{Q})$$

$$\text{non}(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}) = \mathcal{P} \text{ e } \text{non}(\mathcal{Q})$$

2. Negare proposizioni/predicati contenenti quantificatori:

$$\text{NON } (\forall) = \exists \text{ NON}$$

cioè si hanno le seguenti equivalenze

$$\begin{aligned} \text{non } (\forall x \mathcal{P}(x)) &\Leftrightarrow \text{“non è vero che } \mathcal{P}(x) \text{ è sempre vera”} \\ &\Leftrightarrow \text{“c'è almeno un } x \text{ per il quale } \mathcal{P}(x) \text{ è falsa”} \\ &\Leftrightarrow \exists x : \text{non}(\mathcal{P}(x)). \end{aligned}$$

Ad esempio:

- “Non è vero che ogni ragazzo di questa classe è senza gli occhiali”, equivale alla proposizione “Esiste un ragazzo in questa classe che porta gli occhiali”;
- la negazione di “In Irlanda tutti i giorni dell’anno piove” è la proposizione “C’è almeno un giorno all’anno in Irlanda in cui non piove”.

Quindi, **per negare che una proprietà sia verificata universalmente bisogna esibire un esempio in cui essa non sia verificata**: si parla allora di un controesempio.

NON (\exists) = \forall **NON**

cioè si hanno le seguenti equivalenze

$$\begin{aligned} \text{non } (\exists x \mathcal{P}(x)) &\iff \text{“non è vero che esiste un } x \text{ per cui } \mathcal{P}(x) \text{ è vera”} \\ &\iff \text{“per ogni } x \mathcal{P}(x) \text{ è falsa”} \\ &\iff \forall x : \text{non}(\mathcal{P}(x)). \end{aligned}$$

Ad esempio:

- “Non esiste nessuno stato europeo il cui nome inizi per z ”, equivale alla proposizione “Tutti gli stati europei hanno nomi che iniziano per lettere diverse da z ”;
- La negazione di “ $\exists x > 2 : x^2 \leq 4$ ” (FALSA) è “ $\forall x > 2, x^2 \geq 4$ ” (VERA).

NON ($\forall + \exists$) = $\exists + \forall$ **NON**

cioè si hanno le seguenti equivalenze

$$\begin{aligned} \text{non } (\forall x \exists y : \mathcal{P}(x, y)) &\iff \text{“non è vero che per ogni } x \text{ esiste un } y \text{ tale } \mathcal{P}(x, y) \text{ è vera”} \\ &\iff \text{“esiste un } x \text{ per il quale è falso che [esiste un } y \text{ tale } \mathcal{P}(x, y) \text{ è vera]”} \\ &\iff \text{“esiste un } x \text{ per il quale per ogni } y \mathcal{P}(x, y) \text{ è falsa”} \\ &\iff \exists x : \forall y \text{ non}(\mathcal{P}(x, y)). \end{aligned}$$

Ad esempio: “È falso che ogni padre bresciano abbia almeno una figlia bionda” equivale a “esiste un padre bresciano tale che tutte le sue figlie non sono bionde”.

NON ($\exists + \forall$) = $\forall + \exists$ **NON**

Ad esempio, la proposizione

“Non (esiste un numero naturale x tale che per ogni naturale y si abbia $y \leq x$)”

è equivalente a

“per ogni numero naturale x esiste un numero naturale y tale che si abbia $y > x$ ”.

1.1.5 Teoremi

Un teorema è costituito da un **enunciato** e da una **dimostrazione**.

L'**enunciato** ha

1. una IPOTESI (\mathcal{P} , il punto di partenza)
2. una TESI (\mathcal{Q} l’obiettivo da dimostrare)

L'enunciato si sintetizza con $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$.

La **Dimostrazione** è il procedimento logico per dedurre la tesi dall'ipotesi.

Un esempio di dimostrazione è la **Dimostrazione per assurdo**: si vuole provare che

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} & \Rightarrow & \mathcal{Q} \\ \text{Ipotesi} & & \text{Tesi} \end{array}$$

L'equivalenza

$$[\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}] \Leftrightarrow [\text{non } \mathcal{Q} \Rightarrow \text{non } \mathcal{P}]$$

viene utilizzata nella dimostrazione per assurdo: si parte dalla negazione della tesi e si cerca di arrivare (tramite un processo deduttivo) alla negazione dell'ipotesi (il che è un assurdo, perchè l'ipotesi \mathcal{P} è vera!). Dunque la negazione della tesi è falsa. Allora la tesi è vera.

Dimostrazione per assurdo (SECONDA FORMA)

È noto che l'Ipotesi \mathcal{P} è vera e si vuole provare la veridicità dell'implicazione $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ (quindi della Tesi \mathcal{Q}). Si parte ancora dalla negazione di \mathcal{Q} e, attraverso una sequenza di deduzioni logiche, si perviene a dimostrare la veridicità di una terza proposizione \mathcal{R} che, a priori, è già noto essere FALSA (da cui l'**ASSURDO**).

1.2 Insiemi e sottoinsiemi

Definizione 1.16. *Un insieme è una collezione di oggetti, detti elementi.*

Gli insiemi si denotano in due diversi modi:

$$E = \{\dots \text{lista di elementi di } E, \text{ separati da virgole } \dots\} = \{a, x, i, h\}$$

oppure mediante una proprietà

$$E = \{x \in U : \mathcal{P}(x)\}$$

dove U indica un insieme ambiente.

NOTAZIONI:

$x \in E$ significa: x appartiene ad E ;

$x \notin E$ significa: x non appartiene ad E ;

\emptyset indica l'insieme vuoto, ossia l'insieme che non ha alcun elemento.

Definizione 1.17. *Un insieme F si dice sottoinsieme di E se ogni elemento di F è un elemento anche di E , cioè se $\forall x \in F, x \in E$. Scriveremo $F \subseteq E$.*

Vale

$$E = F \Leftrightarrow E \subseteq F \text{ e } F \subseteq E.$$

Con $F \subset E$ intendiamo l'inclusione di insieme stretta, ossia

$$F \subseteq E, \quad \text{e} \quad F \neq E.$$

Denotiamo con $\mathcal{P}(E) = \{F : F \subseteq E\}$. Tale insieme si chiama INSIEME delle PARTI di E .

Definizione 1.18. Chiamiamo unione e intersezione di due insiemi E e F gli insiemi

$$E \cup F = \{x : x \in E \text{ o } x \in F\}, \quad E \cap F = \{x : x \in E \text{ e } x \in F\}.$$

Definizione 1.19. Due insiemi che hanno intersezione vuota, i.e. $E \cap F = \emptyset$ si dicono **DISGIUNTI**.

Definizione 1.20. Chiamiamo complementare di E (in U) (e scriviamo E^c) l'insieme dei punti di U che non stanno in E

$$E^c = \{x : x \in U, x \notin E\}.$$

Vale

$$(E^c)^c = E.$$

Proposizione 1.21 (Leggi di De Morgan). Valgono

$$(E \cup F)^c = E^c \cap F^c \quad (E \cap F)^c = E^c \cup F^c.$$

Definizione 1.22. Chiamiamo differenza di E e F l'insieme

$$E \setminus F = \{x \in E : x \notin F\}.$$

Chiamiamo prodotto cartesiano di E e F l'insieme

$$E \times F = \{(x, y) : x \in E, y \in F\}.$$

Gli elementi (x, y) sono dette coppie (ordinate). Coppie ordinate significa che l'ordine con cui compare ciascun elemento della coppia è essenziale. Due coppie ordinate (x, y) e (x', y') hanno la proprietà che

$$(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow x = x' \text{ e } y = y'.$$

Quindi, dati E e F , in generale si ha $E \times F \neq F \times E$. Se $E = F$, useremo la notazione E^2 per $E \times E$.

Osservazione 1.23. Si può estendere l'operazione di prodotto cartesiano a una n -upla di insiemi A_1, A_2, \dots, A_n , con $n \geq 2$, definendo

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n := \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}$$

cioè l'insieme delle n -uple ordinate (a_1, a_2, \dots, a_n) , al variare di $a_1 \in A_1, \dots, a_n \in A_n$. Anche in questo caso, se $A_i \equiv A$ per ogni $i = 1, 2, \dots, n$, si usa la notazione $A \times A \times \dots \times A = A^n$.

1.3 Relazioni

Gli insiemi prodotto permettono di definire alcuni importanti oggetti matematici.

Definizione 1.24. Una "relazione" \mathcal{R} di A in B è un qualsiasi sottoinsieme di $A \times B$.

Se $A = B$ diremo che essa è una relazione in A .

Diremo che $a \in A$ è in relazione con $b \in B$ tramite \mathcal{R} se $(a, b) \in \mathcal{R}$.

A volte si scriverà $a \mathcal{R} b$.

Esempio 1.25. 1) il sottoinsieme

$$\mathcal{D} = \{(a, a) : a \in A\} \text{ (la "diagonale" di } A)$$

dà luogo alla relazione di *uguaglianza* in A . Infatti $(a, b) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow a = b$.

2) Le usuali relazioni $<$ e \leq tra numeri reali si identificano con gli insiemi

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x < y\} \quad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y\}.$$

Definizione 1.26. Si dice *relazione d'ordine* su un insieme non vuoto A una relazione \mathcal{R} che gode delle seguenti proprietà:

1. *riflessiva*: $\forall x \in A, \quad x\mathcal{R}x$;
2. *antisimmetrica*: $\forall x, y \in A, \quad (x\mathcal{R}y \text{ e } y\mathcal{R}x) \Leftrightarrow x = y$;
3. *transitiva*: $\forall x, y, z \in A, \quad (x\mathcal{R}y \text{ e } y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$.

Definizione 1.27. Una relazione d'ordine su un insieme A non vuoto si dice *totale* se vale anche la seguente proprietà:

4. *dicotomia*: $\forall x, y \in A, \quad x\mathcal{R}y \text{ oppure } y\mathcal{R}x$;

A , in questo caso, munito della relazione \mathcal{R} è detto *insieme totalmente ordinato* (ossia, A è totalmente ordinato se esiste una relazione d'ordine su A che gode delle proprietà 1., \dots , 4.).

Esempio 1.28. 1) \leq su \mathbb{R} è una relazione d'ordine totale.

2) Alla relazione $<$ manca la riflessività.

3) Esempio di relazione d'ordine non totale è l'inclusione \subseteq per gli insiemi.

Definizione 1.29. Si chiama *relazione di equivalenza* \mathcal{R} in un insieme non vuoto A una relazione che gode delle seguenti proprietà:

1. *riflessiva*: $\forall x \in A, \quad x\mathcal{R}x$;
2. *simmetrica*: $\forall x, y \in A, \quad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y\mathcal{R}x$;
3. *transitiva*: $\forall x, y, z \in A, \quad (x\mathcal{R}y \text{ e } y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$.

Esempio 1.30. L'uguaglianza in \mathbb{R} è una relazione di equivalenza. Infatti:

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad x &= x; \\ \forall x, y \in \mathbb{R}, \quad x &= y \Leftrightarrow y = x; \\ \forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad x &= y \text{ e } y = z \Rightarrow x = z. \end{aligned}$$

Capitolo 2

I numeri naturali, interi e razionali

Introduciamo in questo capitolo gli insiemi numerici dei numeri naturali, interi e razionali, analizzando per essi solo alcune proprietà. La loro definizione rigorosa discende da quella dei numeri reali (che introdurremo in modo assiomatico nel prossimo capitolo): essi, infatti, costituiscono un sottoinsieme dei numeri reali.

Prima di introdurre i numeri interi introduciamo il concetto di sommatoria che renderà più veloce molte scritte.

Definizione 2.1. *Dato un insieme finito di indici I , con la scrittura*

$$\sum_{i \in I} a_i$$

indichiamo la somma di tutti i numeri a_i , dove l'indice i assume tutti i valori compresi nell'insieme I .

Esempio 2.2. Se $I = 0, 1, 2, 3, 4$ e sono dati i numeri a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 , allora

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i=0}^4 a_i = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \sum_{p=0}^4 a_p,$$

cioè l'indice della somma è muto.

Non è necessario che l'indice della somma parta da zero, perchè si può cambiare facilmente:

$$a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = \sum_{i=5}^8 a_i = \sum_{h=0}^3 a_{5+h} = \sum_{j=1}^4 a_{4+j} = \dots$$

Gli elementi nell'argomento della sommatoria possono dipendere anche da due indici

$$\sum_{i=0}^2 a_{i,j} = a_{0,j} + a_{1,j} + a_{2,j}.$$

Proposizione 2.3. Se I e J indicano due insiemi finiti di indici e se $(a_i)_{i \in I}$ e $(a_j)_{j \in J}$ sono due famiglie di numeri, tutti reali, allora valgono le seguenti proprietà:

1. se $I \cap J = \emptyset$ allora $\sum_{i \in I \cup J} a_i = \sum_{i \in I} a_i + \sum_{j \in J} a_j$;
2. $\sum_{i \in I} (a_i + b_i) = \sum_{i \in I} a_i + \sum_{i \in I} b_i$;
3. $\sum_{i \in I} c a_i = c \sum_{i \in I} a_i$;
4. $\sum_{i \in I} \left(\sum_{j \in J} a_{i,j} \right) = \sum_{j \in J} \left(\sum_{i \in I} a_{i,j} \right)$.

Notazioni analoghe si possono usare per prodotto finito di numeri. Il simbolo $\prod_{i \in I} a_i$ (produttoria) si usa per indicare il prodotto di tutti i numeri a_i , al variare dell'indice i nell'insieme I . Ad esempio:

$$\prod_{i=1}^3 a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3.$$

2.1 I Numeri naturali

Indichiamo con $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ l'insieme dei numeri naturali.

$\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ è l'insieme dei numeri naturali strettamente positivi.

La somma e il prodotto di numeri naturali sono *operazioni interne ad \mathbb{N}* (cioè il risultato dell'operazione è ancora un elemento dell'insieme); inoltre esse godono delle seguenti proprietà:

commutativa	$n_1 + n_2 = n_2 + n_1$	$n_1 \cdot n_2 = n_2 \cdot n_1$
associativa	$(n_1 + n_2) + n_3 = n_1 + (n_2 + n_3)$	$(n_1 \cdot n_2) \cdot n_3 = n_1 \cdot (n_2 \cdot n_3)$
distributiva	$n_1 \cdot (n_2 + n_3) = n_1 \cdot n_2 + n_1 \cdot n_3$	

In \mathbb{N} , dato un qualsiasi numero naturale n , esiste il suo *successore*, ossia il primo (il più piccolo) numero naturale maggiore di n . L'idea è che a partire da 1 si ottengono via via tutti i numeri naturali con somme successive;

$$2 = 1 + 1; \quad 3 = 2 + 1 = 1 + 1 + 1; \dots$$

e così via. Per formalizzare in maniera corretta dal punto di vista matematico la frase “e così via” si considera come assioma (cioè si assume VERA) la seguente proposizione detta appunto PRINCIPIO di INDUZIONE.

Assioma: Principio di induzione

Sia $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{N}$ un insieme che verifica le seguenti proprietà:

1. $0 \in \mathcal{S}$;
2. $\forall n \in \mathcal{S} \Rightarrow n + 1 \in \mathcal{S}$.

Allora $\mathcal{S} = \mathbb{N}$. Esistono altre forme equivalenti del principio di induzione. In particolare vale

Proposizione 2.4. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $\mathcal{P}(n)$ un predicato. Supponiamo che valgano le seguenti proprietà:

1. $\mathcal{P}(0)$ è vera;

2. $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.

Allora $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Esempio 2.5.

$\mathcal{P}(n) : 2^n > n$.

Verifichiamo 1.: $\mathcal{P}(0)$ è vera, cioè $2^0 = 1 > 0$ (vera).

Verifichiamo 2.: $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$. Per ipotesi sappiamo che $2^n > n$. Verificare 2., significa che a partire da questa ipotesi bisogna verificare che vale $2^{n+1} > n+1$. Ora

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n = 2^n + 2^n > 2^n + n \geq n+1.$$

Abbiamo quindi dimostrato che $2^n > n, \forall n \in \mathbb{N}$.

La Proposizione 2.4 può essere formulata, in generale, partendo da un $n_0 > 0$ al posto di 0 e $\{n \in \mathbb{N}, n \geq n_0\}$ al posto di \mathbb{N} : in questo caso il principio di induzione varrà nella forma:

Se

1. $\mathcal{P}(n_0)$ è vera;

2. $\forall n \geq n_0, \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$,

allora $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni $n \geq n_0$.

Esempio 2.6.

$$\mathcal{P}(n) : 1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}. \quad (2.1)$$

Qui $n_0 = 1$.

Verifichiamo 1.: $\mathcal{P}(1) : 1 = \frac{1(1+1)}{2}$ (vera).

Verifichiamo 2.: Supponiamo allora che $\mathcal{P}(n)$ sia vera. Abbiamo

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(n+1) &= \sum_{i=1}^{n+1} i = (1 + 2 + 3 + \dots + n) + (n+1) = \\ &= \sum_{i=1}^n i + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

Perciò $\mathcal{P}(n+1)$ è vera, e quindi, dal principio di induzione, $\mathcal{P}(n)$ è vera $\forall n \geq 1$.

Esempio 2.7 (Disuguaglianza di Bernoulli). Usiamo la convenzione che $0^0 = 1$. Dimostriamo che vale la seguente disuguaglianza:

$$\forall h \geq -1, \forall n \in \mathbb{N}, (1+h)^n \geq 1+nh. \quad (2.2)$$

Consideriamo $\mathcal{P}(n) : (1+h)^n \geq 1+nh$.

È evidente che $\mathcal{P}(1)$ è vera. Mostriamo adesso che $\mathcal{P}(n)$ implica $\mathcal{P}(n+1)$. Si ha

$$(1+h)^{n+1} = (1+h)(1+h)^n,$$

da cui usando $\mathcal{P}(n)$ e il fatto che $h \geq -1$ (e quindi $(1+h) \geq 0$), si ha

$$(1+h)^{n+1} = (1+h)(1+h)^n \geq (1+h)(1+nh) = 1+h+nh+nh^2 = 1+(n+1)h+nh^2 \geq 1+(n+1)h$$

ossia vale $\mathcal{P}(n+1)$. Per il principio di induzione $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni n , dunque (2.2) è dimostrata.

Come conseguenza del principio di induzione, si può dimostrare un'altra importante proprietà dei numeri naturali; essi sono BEN ORDINATI, ossia ogni sottoinsieme non vuoto di \mathbb{N} ammette *minimo* (il concetto di minimo rigoroso verrà dato più avanti). Vale infatti

Proposizione 2.8 (Principio del minimo intero). *Ogni sottoinsieme non vuoto di \mathbb{N} ha minimo.*

Osservazione 2.9. Questa proprietà non è soddisfatta dai numeri reali: ogni insieme non vuoto in generale ha estremo inferiore ma non minimo.

2.1.1 Calcolo combinatorio

Introduciamo in questa sezione alcuni oggetti che si definiscono a partire dai numeri naturali.

- *Fattoriale di n* : $0! = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)! = (n+1) \cdot n!$.

Per esempio: $1! = 1, 2! = 2 \cdot 1 = 2, 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1, \dots$

- *Coefficienti binomiali*: Siano $k, n \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n$. Allora:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Per esempio: $\binom{n}{n} = 1, \binom{n}{0} = 1, \binom{n}{1} = n, \binom{0}{0} = 1, \dots$

Se $k > n$ si pone, per definizione, $\binom{n}{k} = 0$. Valgono le seguenti relazioni:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

La motivazione per l'introduzione dei coefficienti binomiali sta nella prossima proposizione, nota con il nome di *Formula del Binomio di Newton*.

Proposizione 2.10. *Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ la potenza n -esima del binomio $(a+b)$ è data da*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Usiamo la convenzione che $0^0 = 1$.

2.2 I Numeri interi e razionali

Indichiamo con

$$\mathbb{Z} = \{\dots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

l'insieme dei numeri *interi (relativi)*.

La somma, il prodotto e la sottrazione sono operazioni interne a \mathbb{Z} .

Indichiamo con

$$\mathbb{Q} = \left\{ r = \frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$$

l'insieme dei numeri razionali.

Sono operazioni interne a \mathbb{Q} la somma il prodotto, la sottrazione e la divisione per un numero razionale non nullo.

Un numero razionale ha

- una *rappresentazione decimale limitata*.

Esempi:

$$-\frac{3}{4} = -0.75, \quad \frac{5}{4} = 1.25 .$$

oppure

- una *rappresentazione decimale illimitata periodica*.

Esempi:

$$-\frac{1}{3} = -0.333333 \dots = -0.\overline{3}, \quad \frac{19}{7} = 2.714285714285714285 \dots = \overline{2.714285} .$$

I numeri razionali sono totalmente ordinati (ossia due numeri razionali si possono sempre confrontare) ma non sono *ben ordinati* (ossia non è detto che ogni sottoinsieme non vuoto abbia minimo). Per esempio, non esiste il più piccolo numero razionale maggiore di zero.

La relazione d'ordine di \mathbb{Q} possiede però tutte le proprietà algebriche dell'ordine sui numeri reali (vedi la sezione 3).

I numeri razionali ci permettono di eseguire tutte le operazioni aritmetiche e rappresentano tutti i numeri che incontriamo ogni giorno; infatti le misure che possiamo prendere (lunghezze, aree, masse) sono necessariamente approssimate, perchè non è possibile eseguire misurazioni con precisione infinita.

Ci sono grandezze ideali che non possono essere espresse però tramite un numero razionale (per esempio, già i Pitagorici avevano osservato che la lunghezza della diagonale di un quadrato di lato 1 è $\sqrt{2}$, che non è un numero razionale).

Esistono poi anche equazioni molto semplici che non possono essere risolte in \mathbb{Q} : per esempio $x^2 - 2 = 0$.

Proposizione 2.11. *Se un numero x soddisfa $x^2 = 2$, allora x non è razionale.*

Dimostrazione. Supponiamo PER ASSURDO che x sia razionale:

$$\exists m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : \quad x = \frac{m}{n}$$

e che m ed n NON abbiano FATTORI COMUNI. Eleviamo al quadrato la precedente espressione:

$$x^2 = \frac{m^2}{n^2} = 2 \quad \Rightarrow \quad m^2 = \boxed{2n^2} \quad \Rightarrow \quad m^2 \text{ numero PARI} \quad \Rightarrow \quad m \text{ numero PARI.}$$

Quindi $\exists k \in \mathbb{N}$: $m = 2k$. Pertanto

$$4k^2 = 2n^2 \quad \Rightarrow \quad n^2 = \boxed{2k^2} \quad \Rightarrow \quad n^2 \text{ numero PARI} \quad \Rightarrow \quad n \text{ numero PARI.}$$

Allora m ed n sono PARI. ASSURDO poichè si supposto che m ed n NON avessero FATTORI COMUNI. Otteniamo che x NON è RAZIONALE. \square

In un certo senso, questa proposizione ci dice che l'insieme dei numeri razionali è un insieme "bucherellato".

Capitolo 3

I Numeri Reali

3.1 Struttura algebrica

L'insieme dei numeri reali è un insieme che gode delle seguenti proprietà algebriche:

- \mathbb{R} è un *campo* rispetto alla somma e al prodotto, che godono delle seguenti proprietà.

Operazione di SOMMA $= + : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{array}{lll} \forall a, b \in \mathbb{R} & a + b = b + a & + \text{ è commutativa} \\ \forall a, b, c \in \mathbb{R} & (a + b) + c = a + (b + c) & + \text{ è associativa} \\ \exists 0 \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}: & a + 0 = 0 + a = a & 0 = \text{elemento neutro di } + \\ \forall a \in \mathbb{R}, \exists! -a \in \mathbb{R}: & a + (-a) = (-a) + a = 0 & -a = \text{opposto di } a \text{ rispetto a } + \end{array}$$

Operazione di PRODOTTO $= \cdot : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{array}{lll} \forall a, b \in \mathbb{R} & a \cdot b = b \cdot a & \cdot \text{ è commutativa} \\ \forall a, b, c \in \mathbb{R} & (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) & \cdot \text{ è associativa} \\ \exists 1 \in \mathbb{R}, \forall a \in \mathbb{R}: & a \cdot 1 = 1 \cdot a = a & 1 = \text{elemento neutro di } \cdot \\ \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \exists! a^{-1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}: & a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1 & a^{-1} = \text{reciproco di } a \\ & & \text{rispetto a } \cdot \end{array}$$

La somma e il prodotto godono della seguente proprietà:

Proprietà distributiva:

$$\begin{array}{ll} \forall a, b, c \in \mathbb{R} & a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \\ \forall a, b, c \in \mathbb{R} & (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c. \end{array}$$

- \mathbb{R} ha un **ordinamento totale**. La relazione \leq su \mathbb{R} :

$$a \leq b \Leftrightarrow a < b \text{ oppure } a = b$$

è una relazione d'ordine TOTALE che gode della seguente proprietà:

$$\begin{array}{ll} \forall a, b, c \in \mathbb{R} & \text{se } a \leq b & \text{allora } a + c \leq b + c, \\ \forall a, b, c \in \mathbb{R} & \text{se } a \leq b \text{ e } \begin{cases} c > 0 \\ 0 = c \\ c < 0 \end{cases} & \text{allora } \begin{cases} a \cdot c \leq b \cdot c \\ a \cdot 0 = 0 = b \cdot 0 \\ a \cdot c \geq b \cdot c. \end{cases} \end{array}$$

Useremo le seguenti notazioni:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Insieme dei numeri reali positivi:} & \mathbb{R}^+ = \{a \in \mathbb{R} : a > 0\}. \\
 \text{Insieme dei numeri reali NON negativi:} & \{0\} \cup \mathbb{R}^+ = \{a \in \mathbb{R} : a \geq 0\}. \\
 \text{Insieme dei numeri reali negativi:} & \mathbb{R}^- = \{a \in \mathbb{R} : a < 0\}. \\
 \text{Insieme dei numeri reali NON positivi:} & \{0\} \cup \mathbb{R}^- = \{a \in \mathbb{R} : a \leq 0\}.
 \end{array}$$

3.2 Valore assoluto

Usando l'ordine su \mathbb{R} possiamo definire il valore assoluto di un numero reale.

Definizione 3.1. Sia $a \in \mathbb{R}$. Si definisce valore assoluto (o modulo) di a il numero

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ -a & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

Si ha sempre:

- $|a| \geq 0$;
- $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

Inoltre, per ogni coppia di numeri reali $a, b \in \mathbb{R}$ sono verificate le seguenti disuguaglianze:

$$|a + b| \leq |a| + |b| \quad (\text{disuguaglianza triangolare}); \quad (3.1)$$

$$|a - b| \geq |a| - |b|. \quad (3.2)$$

$$||a| - |b|| \leq |a - b|. \quad (3.3)$$

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|. \quad (3.4)$$

A partire dalla nozione di valore assoluto si può definire il concetto di *distanza* fra due numeri reali. Precisamente:

Definizione 3.2. Siano $x, y \in \mathbb{R}$. Si definisce distanza fra i due numeri x e y il numero reale non negativo

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Si verificano le seguenti proprietà:

1. $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = 0$ se e solo se $x = y$;
2. $d(x, y) = d(y, x)$.
3. Disuguaglianza triangolare: $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

3.3 L'assioma di Dedekind: completezza dei numeri reali

Gli assiomi relativi alla struttura algebrica dei numeri reali sono ancora insufficienti a descrivere completamente l'insieme dei numeri reali. Quello che manca è l'assioma di Dedekind, che rende conto di una delle proprietà fondamentali dei numeri reali, ossia la continuità (o "completezza"). Questa proprietà li distingue dagli altri insiemi numerici (per esempio i numeri razionali ne sono privi) e rende \mathbb{R} l'insieme più adatto all'analisi, non appena si passa dalle operazioni algebriche elementari (somma, prodotto, ecc) allo studio di relazioni più complesse.

Assioma di Dedekind: Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$, non vuoti, tali che

$$a \leq b \quad \forall a \in A, \quad \forall b \in B.$$

Allora

$$\exists c \in \mathbb{R} : \quad a \leq c \leq b \quad \forall a \in A, \quad \forall b \in B.$$

Chiamiamo c : *elemento separatore* di A e B .

A e B nelle condizioni precedenti si dicono classi *separate*.

Osservazione 3.3. Attenzione a non invertire l'ordine dei quantificatori. Scrivere

$$\forall a \in A, \forall b \in B \quad \exists c \in \mathbb{R} : \quad a \leq c \leq b.$$

è un errore grave. Infatti in questa scrittura sbagliata c si potrebbe scegliere in funzione di a e b (basterebbe prendere $c = a$). Invece nell'assioma di Dedekind c deve essere *indipendente da a e b* e deve *separare* i due insiemi.

Osserviamo ancora che l'elemento separatore non è unico: per esempio se

$$A = \{x \in \mathbb{R}; x < -2\} \quad B = \{x \in \mathbb{R}; x > 2\}$$

allora tutti i numeri fra -2 e 2 sono separatori.

L'elemento separatore è unico se gli insiemi A e B sono *contigui*, ossia se in A e in B esistono elementi arbitrariamente vicini.

La proprietà espressa dall'assioma di Dedekind si può anche enunciare dicendo che i numeri reali sono continui, o l'insieme \mathbb{R} non ha lacune. Un altro modo equivalente è dire che \mathbb{R} è *completo*. Tale proprietà non è soddisfatta dai numeri razionali.

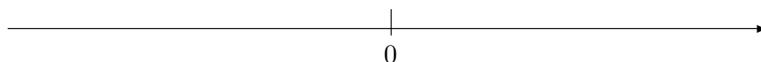
Osservazione 3.4. \mathbb{Q} *NON è completo*. Ad esempio, siano

$$A = \{a \in \mathbb{Q}^+ \cup \{0\} : a^2 \leq 2\}, \quad B = \{b \in \mathbb{Q}^+ : b^2 \geq 2\}.$$

Si ha $a \leq b \quad \forall a \in A, \forall b \in B$. MA NON ESISTE $c \in \mathbb{Q} : a \leq c \leq b, \forall a \in A, \forall b \in B$. Un tale c dovrebbe essere necessariamente $c = \sqrt{2}$, ma $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Osservazione 3.5. \mathbb{R} COMPLETO equivale, geometricamente, al fatto che ogni punto di una retta può essere univocamente associato ad un numero reale e, viceversa, a ogni numero reale corrisponde uno e un solo punto di una retta.

Si può quindi rappresentare geometricamente \mathbb{R} con la **Retta reale**:



3.4 Estremo inferiore e superiore di un insieme

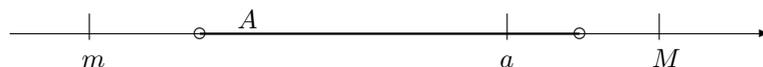
L'assioma di Dedekind consente di introdurre un concetto molto importante, quello dell'*estremo superiore e inferiore di un insieme*, concetti che formalizzano l'idea di dove "inizia" e dove "finisce" un insieme.

3.4.1 Maggioranti e minoranti

Cominciamo con l'introdurre la nozione di *maggioranti e minoranti*.

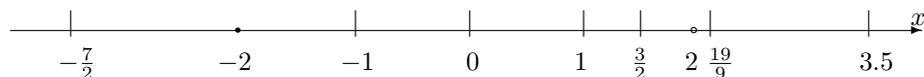
Definizione 3.6. Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $M, m \in \mathbb{R}$.

- M è un maggiorante per A se $\forall a \in A, a \leq M$.
- m è un minorante per A se $\forall a \in A, m \leq a$.



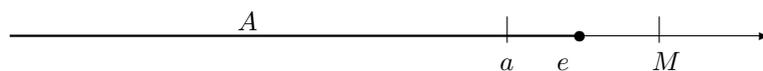
Esempio 3.7. Sia $A = \{x \in \mathbb{R} : -2 \leq x < 2\}$. Allora

- $2, \frac{19}{9}, 3.5, \sqrt{26}, 150$ sono maggioranti per A .
- $-\sqrt{41}, -\frac{7}{2}$ sono minoranti per A .
- $-1, 0, 1, \frac{3}{2}$ non sono nè maggioranti nè minoranti per A .



- L'insieme dei maggioranti per A è $\{x \in \mathbb{R} : x \geq 2\}$.
- L'insieme dei minoranti per A è $\{x \in \mathbb{R} : x \leq -2\}$.

Esempio 3.8. Sia $A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq e\}$.



- L'insieme dei maggioranti per A è $\{x \in \mathbb{R} : x \geq e\}$.
- L'insieme dei minoranti per A è \emptyset .

3.4.2 Massimi e minimi

Definizione 3.9. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Si chiama *massimo* di A un maggiorante M di A tale che $M \in A$. Si chiama *minimo* di A un minorante m di A tale che $m \in A$.

Il massimo di A è quindi quel numero $M \in A$ che gode delle seguenti proprietà:

1. per ogni $a \in A$ si ha $a \leq M$, ossia M è maggiorante di A ;
2. $M \in A$, quindi in particolare non esistono maggioranti di A che siano più piccoli di M .

In altre parole il *massimo* di A , se esiste, è il più piccolo dei maggioranti di A ed è denotato con $\max A$.

Analogamente, il *minimo* di A , se esiste, è il più grande dei minoranti di A ed è denotato con $\min A$.

Esempio 3.10. $A = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 2\}$ ha massimo $\max A = 2$ e minimo $\min A = -1$.

Esempio 3.11. $A = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x < 2\}$ ha minimo $\min A = -1$ e non ha massimo.

Esempio 3.12. $A = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x \leq 2\}$ ha massimo $\max A = 2$ e non ha minimo.

3.4.3 Insiemi limitati

Introduciamo ora il concetto di *insieme superiormente e/o inferiormente limitato*.

Definizione 3.13. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Si dice che

- A è *superiormente limitato* se esiste almeno un maggiorante M per A , cioè

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall a \in A \quad a \leq M.$$

- A è *inferiormente limitato* se esiste almeno un minorante m per A , cioè

$$\exists m \in \mathbb{R} : \forall a \in A \quad a \geq m.$$

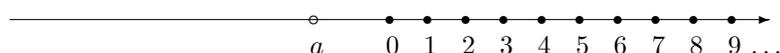
Esempio 3.14. Sia $A = \{x \in \mathbb{R} : -5 \leq x < 2\}$. Allora

- Qualunque $M \geq 2$ è maggiorante di A . A è superiormente limitato.
- Qualunque $m \leq -5$ è minorante di A . A è inferiormente limitato.



Esempio 3.15. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ è inferiormente limitato. Infatti

$$\forall a \in \mathbb{R}^- \cup \{0\} \quad a \leq n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

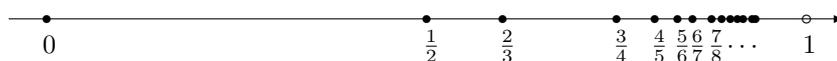


Esempio 3.16. L'insieme

$$A = \left\{ \frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots \right\}$$

è sia inferiormente limitato e sia superiormente limitato. Infatti

$$0 \leq \frac{n}{n+1} < 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$



Definizione 3.17. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Diciamo che A è limitato se A è sia inferiormente limitato sia superiormente limitato, cioè

$$\exists m, M \in \mathbb{R} : \quad \forall a \in A \quad m \leq a \leq M.$$

Per gli insiemi limitati superiormente e inferiormente vale la seguente proprietà:

Proposizione 3.18. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme non vuoto e limitato superiormente. L'insieme dei maggioranti di A , $M(A)$, ha minimo.

Dimostrazione. Consideriamo $M(A) := \{M \in \mathbb{R} : a \leq M, \forall a \in A\}$ e il suo complementare, che indichiamo con M' . Vale che

$$M(A) \cup M' = \mathbb{R}, \quad M(A) \cap M' = \emptyset, \quad m' \leq m, \quad \forall m' \in M', \forall m \in M(A).$$

Per l'assioma di Dedekind (M' e $M(A)$ sono due classi separate) esiste L elemento separatore, che per definizione verifica

$$m' \leq L \leq m, \quad \forall m' \in M', \forall m \in M(A).$$

È immediato verificare che L è l'unico elemento separatore per le classi M' e $M(A)$ (cioè che gli insiemi M' e $M(A)$ sono contigui). Chiaramente, L è un minorante per l'insieme $M(A)$. Dimostriamo ora che $L \in M(A)$. Se, per assurdo, fosse $L \in M'$ (cioè L non fosse un maggiorante di A), esisterebbe $a \in A$ tale che $L < a$. Allora si avrebbe

$$L < \frac{L+a}{2} < a \in A \quad \text{e} \quad \frac{L+a}{2} \in M'.$$

Ma questo è assurdo, perchè si otterrebbe che anche $\frac{L+a}{2}$ è elemento separatore per $M(A)$ e M' , cosa che non può essere data l'unicità dell'elemento separatore. Quindi L è il minimo di $M(A)$. \square

3.4.4 Estremo inferiore e superiore di un insieme

Possiamo allora dare la seguente definizione.

Definizione 3.19. Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme limitato superiormente. Diremo estremo superiore di A il minimo dei maggioranti di A e lo indicheremo con $\sup A$. Analogamente, per $A \subseteq \mathbb{R}$ insieme limitato inferiormente, diremo estremo inferiore di A il massimo dei minoranti di A e lo indicheremo con $\inf A$.

Dalla definizione, segue che per ogni insieme non vuoto A , vale

$$\inf A \leq \sup A, \quad (3.5)$$

dato che, $\forall x \in A$ si ha $\inf A \leq x \leq \sup A$.

Il sup e l'inf di un insieme sono caratterizzati dalle seguenti proprietà.

Proposizione 3.20 (Caratterizzazione del sup). *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ limitato superiormente. Il numero $L = \sup A \in \mathbb{R}$ è caratterizzato dalle seguenti proprietà.*

1. $\forall x \in A, x \leq L$
2. $\forall m \in \mathbb{R}, \text{ con } m < L, \exists x \in A: x > m.$

Ciò significa:

1. L è un maggiorante di A .



2. Ogni numero reale m minore di L NON è maggiorante per A .

Quindi L è il *più piccolo dei maggioranti*.



Osservazione 3.21 (Caratterizzazione del sup con ε). La Proposizione 3.20 può essere formulata anche nel seguente modo. $L = \sup A$ se e solo se

1. $\forall x \in A, x \leq L$
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : L - \varepsilon < x.$

Analogamente vale la seguente proposizione

Proposizione 3.22 (Caratterizzazione dell'inf). *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ inferiormente limitato. $I = \inf A \in \mathbb{R}$ se e solo se*

1. $\forall x \in A, x \geq I$
2. $\forall m \in \mathbb{R}, \text{ con } m > I, \exists x \in A: x < m.$

Ciò significa:

1. I è un minorante di A .



2. Ogni numero reale m maggiore di I NON è minorante per A .

Quindi I è il *più grande dei minoranti*.



Osservazione 3.23 (Caratterizzazione dell' inf con ε). La Proposizione 3.22 può essere formulata così: $I = \inf A$ se e solo se

1. $\forall x \in A, x \geq I$
2. $\forall \varepsilon > 0, \exists x \in A : x < I + \varepsilon$.

Osserviamo che dalla Definizione 3.19 **non** segue, in generale, sup e inf di un insieme appartengano all'insieme.

Esempio 3.24. L'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

è tale che $a = \inf A \notin A$ e $b = \sup A \notin A$.

L'estremo superiore e inferiore di un insieme hanno un comportamento particolare rispetto all'inclusione di insiemi. Dalla Definizione 3.19, discende la seguente proprietà.

Proposizione 3.25. *Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$ sottoinsiemi non vuoti, tali che $A \subseteq B$. Allora*

$$\sup A \leq \sup B; \quad \inf A \geq \inf B.$$

Quando l'estremo superiore e inferiore appartengono all'insieme si diranno massimo e minimo. Vale infatti la seguente proposizione.

Proposizione 3.26. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme superiormente limitato e sia $L = \sup A \in \mathbb{R}$. Se $L \in A$, allora L è il massimo di A .*

Analogamente, se A è inferiormente limitato, sia $I = \inf A \in \mathbb{R}$. Se $I \in A$, allora I è il minimo di A .

Osservazione 3.27. Mentre il sup e l'inf di un insieme (limitato) esistono sempre, il massimo e il minimo di un insieme possono non esistere. Nell'esempio sopra, l'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

non ha massimo nè minimo.

Osservazione 3.28. È comodo parlare di estremo superiore e inferiore anche di insiemi non limitati superiormente e inferiormente. Se A non è limitato superiormente, cioè:

$$\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in A : x > M,$$

allora porremo, per definizione, $\sup A = +\infty$.

Analogamente, se A non è limitato inferiormente, cioè:

$$\forall m \in \mathbb{R}, \exists x \in A : x < m$$

allora porremo, per definizione, $\inf A = -\infty$.

Esempio 3.29. Gli insiemi $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ non sono superiormente limitati. Poichè

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q},$$

Basta dimostrare che $\sup \mathbb{N} = +\infty$. Questo discende dalla *proprietà di Archimede*.

Proposizione 3.30 (*Proprietà di Archimede*). Per ogni $a, b \in \mathbb{R}^+$, allora esiste $n \in \mathbb{N}^+$ tale che $na > b$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esistano due numeri reali positivi a, b tali che

$$na \leq b, \quad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

Allora l'insieme dei multipli di a :

$$A = \{na, n \in \mathbb{N}^+\}$$

(chiaramente A è non vuoto, perché $a \in A$) è limitato superiormente, dato che ammette b come maggiorante. Sia $L = \sup A \in \mathbb{R}$. Allora, per ogni $m \in \mathbb{N}^+$

$$(m+1)a \leq L$$

da cui

$$ma \leq L - a, \quad \forall m \in \mathbb{N}^+.$$

Ma allora $L - a$ sarebbe un maggiorante di A e questo assurdo perché $L - a < L$ e L , per definizione, è il più piccolo dei maggioranti. \square

Il fatto che $\sup \mathbb{N} = +\infty$ discende facilmente dalla proprietà di Archimede prendendo $a = 1$: per ogni $b \in \mathbb{R}^+$, esiste $n \in \mathbb{N}^+$ tale che $n > b$.

Un altro risultato importante che segue dalla proprietà di Archimede è la proprietà che dice che \mathbb{Q} è denso in \mathbb{R} .

Proposizione 3.31. *Dati comunque due numeri reali a, b tali che $a < b$, esiste sempre un numero razionale q tale che $a \leq q \leq b$.*

Notazioni: Poniamo per definizione $\sup \emptyset = -\infty$ e $\inf \emptyset = +\infty$.

3.5 Retta reale estesa

Introduciamo una convenzione che dà una sistemazione teorica alle scritture $\sup A = +\infty$ e $\inf A = -\infty$.

Definizione 3.32. *Chiamiamo insieme dei numeri reali estesi (denotato con il simbolo $\overline{\mathbb{R}}$) l'insieme costituito dai numeri reali e dai due simboli $+\infty$ e $-\infty$ (che non sono numeri reali) (cioè $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$).*

Su $\overline{\mathbb{R}}$ introduciamo una relazione d'ordine, estendendo quella su \mathbb{R} e ponendo

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad -\infty \leq x \leq +\infty;$$

inoltre estendiamo in maniera naturale la somma e il prodotto di \mathbb{R} , ponendo

$$\begin{aligned} \forall x < +\infty, \quad x + (-\infty) &= -\infty, & \forall x > -\infty, \quad x + (+\infty) &= +\infty, \\ \forall x > 0, \quad x \cdot (+\infty) &= +\infty, & \forall x < 0, \quad x \cdot (+\infty) &= -\infty, \\ \forall x > 0, \quad x \cdot (-\infty) &= -\infty, & \forall x < 0, \quad x \cdot (-\infty) &= +\infty. \end{aligned}$$

Non sono definite (e quindi non hanno senso) le operazioni

$$(+\infty) + (-\infty) \quad (\pm\infty) \cdot 0.$$

Con queste convenzioni, $\overline{\mathbb{R}}$ è un insieme

- totalmente ordinato;
- ogni sottoinsieme non vuoto di $\overline{\mathbb{R}}$ ha dei maggioranti (almeno $+\infty$),
- ogni sottoinsieme non vuoto di $\overline{\mathbb{R}}$ ha estremo superiore e inferiore;
- delle caratterizzazioni dell'estremo inferiore e superiore, non valgono più quelle con ε (cf. le Osservazioni 3.21 e 3.23), che invece valgono solo se \sup e \inf sono numeri reali.

Introduciamo ora dei simboli molto comodi per indicare alcuni sottoinsiemi di $\overline{\mathbb{R}}$.

Definizione 3.33. *Un sottoinsieme $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ è un intervallo se e solo se*

$$\forall x, y \in I \quad x < y \quad \Rightarrow \quad \{z \in \overline{\mathbb{R}} : x < z < y\} \subseteq I.$$



Dunque un insieme è un intervallo se, presi comunque due suoi punti, contiene tutti i punti intermedi: la nozione di intervallo traduce l'idea di un insieme senza “buchi”.

Definizione 3.34. *Siano $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ e tali che $a \leq b$. Definiamo intervallo chiuso di estremi a e b l'insieme*

$$[a, b] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : a \leq x \leq b\}.$$



Definizione 3.35. *Siano $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ e tali che $a < b$. Definiamo intervallo aperto di estremi a e b l'insieme*

$$(a, b) =]a, b[= \{x \in \overline{\mathbb{R}} : a < x < b\}.$$



Definizione 3.36. *Siano $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ e tali che $a < b$. Definiamo intervallo SEMI-APERTO A DESTRA di estremi a e b l'insieme*

$$[a, b) = [a, b[= \{x \in \overline{\mathbb{R}} : a \leq x < b\}.$$



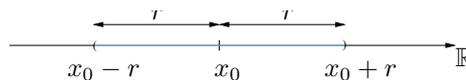
Definizione 3.37. *Siano $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ e tali che $a < b$. Definiamo intervallo SEMI-APERTO A SINISTRA di estremi a e b l'insieme*

$$(a, b] =]a, b] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : a < x \leq b\}.$$



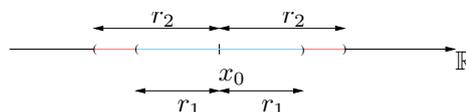
Definizione 3.38. Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e $r > 0$. Chiamiamo intorno sferico di centro x_0 e raggio r l'insieme dei numeri reali che distano da x_0 meno di r . In simboli,

$$I_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : d(x, x_0) < r\} = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\} = \{x \in \mathbb{R} : x_0 - r < x < x_0 + r\}.$$



Osservazione 3.39. Se, fissato $x_0 \in \mathbb{R}$, facciamo variare il raggio r in \mathbb{R}^+ , otteniamo la famiglia di tutti gli intorni di centro x_0 .

In particolare, se $r_1 < r_2$ si ha $I_{r_1}(x_0) \subseteq I_{r_2}(x_0)$.



Definizione 3.40. Per ogni $M \in \mathbb{R}^+$, chiamiamo intorno di $+\infty$ di estremo inferiore M , l'intervallo aperto e superiormente illimitato

$$I_M(+\infty) = (M, +\infty) =]M, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x > M\}.$$

Analogamente, l'intorno di $-\infty$ di estremo superiore $-M$ è l'insieme

$$I_M(-\infty) = (-\infty, -M) =]-\infty, -M[= \{x \in \mathbb{R} : x < -M\}.$$

Nelle definizioni precedenti, se le disuguaglianze non sono strette (ossia valgono con \leq al posto di $<$), allora si parla di intorni chiusi, chiusi a destra e sinistra. Con un abuso di notazione indicheremo con lo stesso simbolo intorni chiusi e aperti: il problema specifico che si sta studiando chiarificherà, di volta in volta, quale intorno viene preso in esame.

Capitolo 4

Funzioni

Definizione 4.1. Una funzione è una terna (A, B, f) dove A, B sono due insiemi e f è una legge che ad ogni elemento di A associa uno e un solo elemento di B . In simboli, scriviamo $f : A \rightarrow B$. Affinché f sia una funzione, deve essere

$$\forall x \in A, \quad \exists! y \in B : y = f(x).$$

L'insieme A si chiama **DOMINIO** di f e si denota con $\text{dom } f$ o D_f e B è il **CODOMINIO** di f .

Notiamo che, dalla definizione, a diversi x può corrispondere lo stesso y .

Il ruolo del codominio non sembra tanto chiaro a prima vista: sembra una specie di contenitore dei valori assunti da f (cioè i punti di B che si possono scrivere come $y = f(x)$).

Definizione 4.2. L'insieme dei punti di B assunti da f è detta **immagine** di f e si denota con $\text{im } f$, ossia

$$\text{im } f = f(A) = \{y \in B : \exists x \in A, \quad y = f(x)\} \subseteq B.$$

Da notare che in generale B contiene più punti di quelli assunti da f (cioè B contiene strettamente l'insieme immagine $\text{im } f$), e quindi sembra che ingrandendo tale insieme B la funzione non cambi. Il ruolo del codominio sarà chiaro quando introdurremo il concetto di funzione inversa.

Esempio 4.3. 1) Un normale impianto elettrico è una funzione che ad ogni interruttore fa corrispondere un lampadario.

2) la somma di due numeri reali è una funzione:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\rightarrow x + y \end{aligned}$$

La funzione sopra scritta è un esempio di funzione di due variabili.

3) In questo corso ci occuperemo di funzioni di una sola variabile. Studieremo le **funzioni reali** ($B \subseteq \mathbb{R}$) di **variabile reale** ($A \subseteq \mathbb{R}$), ossia di funzioni

$$f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}.$$

Definizione 4.4. Si dice grafico di $f : A \rightarrow B$ l'insieme

$$\mathcal{G}_f = \{(x, y) \in A \times B : y = f(x)\} \subseteq A \times B.$$

Il grafico è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$, dunque è un insieme di coppie ordinate. Dalla definizione di funzione segue la seguente proprietà di cui godono i punti del grafico:

$$\forall x \in A, \quad \exists! y \in B : (x, y) \in \mathcal{G}_f. \quad (4.1)$$

Segue che un insieme del prodotto cartesiano di A e B che non gode di questa proprietà NON può essere il grafico di una funzione.

Osservazione 4.5. Dalla proprietà sopra scritta segue che, dato un certo $\bar{x} \in A$, non possono esistere $y_1, y_2 \in B$, con $y_1 \neq y_2$, tali che (\bar{x}, y_1) e $(\bar{x}, y_2) \in \mathcal{G}_f$: se così fosse, si avrebbe infatti $f(\bar{x}) = y_1$ e $f(\bar{x}) = y_2$, cioè a \bar{x} verrebbero associati due diversi elementi y_1 e y_2 (contro la definizione di funzione).

Esempio 4.6. Consideriamo $A \times B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\} \times \mathbb{R}$ e consideriamo il sottoinsieme dato dalla circonferenza

$$\gamma = \{(x, y) : -1 \leq x \leq 1 \wedge x^2 + y^2 = 1\}.$$

Allora γ non è il grafico di una funzione da A in B perchè γ non soddisfa la proprietà (4.1). Infatti al punto $x = 0$ corrispondono due y (precisamente: $y_1 = 1$ e $y_2 = -1$) per i quali $(x, y) \in \gamma$. Invece $\gamma \cap \{(x, y) : x \in A \wedge y \geq 0\}$ è un grafico.

Osservazione 4.7. (Interpretazione geometrica del grafico di funzioni reali di variabile reale:) Condizione necessaria e sufficiente affinché un sottoinsieme di \mathbb{R}^2 sia il grafico di una funzione è che ogni retta parallela all'asse delle y intersechi tale sottoinsieme in al massimo un punto.

Osservazione 4.8. Ribadiamo che una funzione si considera ben definita quando vengono forniti:

- sia la formula che definisce f ,
- sia il dominio di f .

Quindi, due funzioni f_1 e f_2 coincidono se e solo se

$$\text{dom}(f_1) = \text{dom}(f_2) \quad \text{e} \quad f_1(x) = f_2(x) \quad \forall x \in \text{dom}(f_1) = \text{dom}(f_2).$$

Ad esempio, le funzioni $f_1(x) = x^2 \quad \forall x \geq 0$ e $f_2(x) = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ **non coincidono**, cosa che si può vedere anche dal confronto fra i rispettivi grafici: il grafico di f_2 è la parabola $y = x^2$, mentre il grafico di f_1 è il ramo della parabola $y = x^2$ contenuto nel primo quadrante.

Osservazione 4.9 (Il dominio naturale di definizione.). Quando una funzione di variabile reale e a valori reali è data senza che ne venga specificato il dominio, si sottintende che il suo dominio sia l'insieme di tutti gli $x \in \mathbb{R}$ per i quali il valore $f(x)$ ha senso ed è un numero reale.

Esempio 4.10. 1.

$$f_1(x) := \frac{1}{x^2 - 1}.$$

In questo caso, $\text{dom}(f_1) = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \pm 1\} = (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

2.

$$f_2(x) := \sqrt{4 - x^2}.$$

In questo caso, $\text{dom}(f_2) = \{x \in \mathbb{R} : 4 - x^2 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4 \leq 0\} = [-2, 2]$.

Ricordiamo infine la seguente definizione.

Definizione 4.11. Sia $f : A \rightarrow B$. Dato $y \in B$, un elemento $x \in A$ si chiama controimmagine di y tramite f se esso verifica

$$f(x) = y.$$

Denotiamo con $f^{-1}(\{y\})$ l'insieme (eventualmente vuoto) delle controimmagini di y tramite f .

È chiaro che

$$y \in \text{im}(f) \Leftrightarrow f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset. \quad (4.2)$$

Osservazione 4.12 (Interpretazione grafica della controimmagine nel caso di funzioni reali di variabile reale). Data $f : \text{dom}(f) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e dato un valore $\bar{y} \in \mathbb{R}$, si può individuare graficamente l'insieme controimmagine di \bar{y} dato da $f^{-1}(\{\bar{y}\})$ in questo modo: si considera la retta orizzontale $y = \bar{y}$ e se ne cercano intersezioni con $\text{graf}(f)$:

- se $y = \bar{y}$ non interseca $\text{graf}(f)$ in alcun punto, allora $f^{-1}(\{\bar{y}\}) = \emptyset$;
- viceversa, per ogni punto $(\bar{x}, \bar{y}) \in \text{graf}(f)$ (chiaramente (x, \bar{y}) appartiene alla retta $y = \bar{y}$), si ha che $\bar{x} \in f^{-1}(\{\bar{y}\})$.

4.1 Funzioni iniettive, suriettive, biunivoche

Sia $f : A \rightarrow B$.

Definizione 4.13. Si dice che f è una funzione iniettiva se

$$\begin{aligned} \forall x_1, x_2 \in A, [(x_1 \neq x_2) \Rightarrow (f(x_1) \neq f(x_2))] \\ \Updownarrow \\ \forall x_1, x_2 \in A, [(f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2)]. \end{aligned}$$

Attenzione a non confondere l'ordine in cui è scritta la formula: infatti la proposizione

$$\forall x_1, x_2 \in A, [(x_1 = x_2) \Rightarrow (f(x_1) = f(x_2))]$$

è verificata da ogni funzione.

Esempio 4.14. 1) la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x$ è iniettiva.

2) la funzione $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ (di dominio naturale $\mathbb{R} \setminus \{1\}$) è iniettiva perchè

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{2x_1+1}{x_1-1} = \frac{2x_2+1}{x_2-1} \Rightarrow 2x_1x_2 - 2x_1 + x_2 - 1 = 2x_1x_2 - 2x_2 + x_1 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

3) la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^2$ non è iniettiva perchè $f(1) = f(-1)$.

Le funzioni iniettive hanno così la caratteristica che se un certo y è immagine di qualche punto del dominio di f , allora è immagine di un solo punto.

Osservazione 4.15 (Interpretazione grafica di funzioni reali di variabile reale INIETTIVE): Una funzione f reale di variabile reale è iniettiva se ogni retta parallela all'asse x (è una qualsiasi retta $y = \bar{y}$, per ogni \bar{y}) interseca il grafico di f in uno e in un solo punto.

Definizione 4.16. Una funzione $f : A \rightarrow B$ si dice suriettiva, o surgettiva, se

$$\forall y \in B, \quad \exists x \in A : y = f(x).$$

Dalla definizione segue che una funzione f è suriettiva se $\text{im } f = B$.

Osservazione 4.17 (Importante). Nel caso di una funzione reale di variabile reale, cioè

$$f : \text{dom}(f) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \text{ove } \text{dom}(f) \subseteq \mathbb{R},$$

considereremo sempre come codominio l'insieme \mathbb{R} . Quindi

$$f \text{ è suriettiva se } \text{im}(f) = \mathbb{R}.$$

Osservazione 4.18 (Interpretazione geometrica della suriettività per funzioni reali di variabile reale). Una funzione reale di variabile reale è suriettiva se ogni retta parallela all'asse x interseca il grafico di f almeno una volta.

Esempio 4.19. 1) la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x$ è suriettiva.

2) la funzione $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ non è suriettiva da $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ in \mathbb{R} perchè, per esempio, $y = 2$ non si può scrivere come $f(x)$ per qualche $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Infatti l'equazione

$$\frac{2x+1}{x-1} = 2$$

non ha soluzione, dunque la funzione NON assume mai il valore 2.

3) $f(x) = x^2$ non è suriettiva da \mathbb{R} in \mathbb{R} , perchè $y = -1$ non è mai assunto da f . Notiamo che

$$\text{im } f = \{y \in \mathbb{R} : y \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}.$$

Osservazione 4.20. Osserviamo ancora che se una funzione f non è suriettiva, si può passare ad una nuova funzione che differisce non troppo da f e che risulta essere suriettiva considerando

$$\tilde{f} : A \rightarrow f(A) \quad \text{con } \tilde{f}(x) = f(x).$$

Questo significa considerare la stessa legge f sullo stesso dominio, ma prendere come codominio esattamente $\text{im } f = f(A)$.

Le due nozioni di iniettività e suriettività sono indipendenti: vi sono funzioni che possono essere iniettive ma non suriettive e viceversa e invece funzioni che possono essere sia iniettive che suriettive.

Definizione 4.21. Una funzione iniettiva e suriettiva si dice biunivoca (o biettiva o bigettiva).

Osserviamo che se $f : A \rightarrow B$ è biettiva, allora

1. f è suriettiva, i.e., $\forall y \in B, \quad \exists x \in A : y = f(x)$;
2. f è iniettiva, i.e l'elemento $x \in A$ al punto 1. è unico.

Dunque f è biettiva se e solo se

$$\forall y \in B, \quad \exists! x \in A : y = f(x).$$

Osserviamo che la relazione sopra definisce una funzione da B in A , perchè ad ogni $y \in B$ associa uno e un solo elemento $x \in A$; l'elemento x è quell'unico elemento tale che $f(x) = y$.

4.2 Funzione inversa, restrizione e composizione

Definizione 4.22. Sia $f : A \rightarrow B$ una funzione biunivoca. Si dice inversa di f e si denota con f^{-1} la funzione $f^{-1} : B \rightarrow A$ che associa ad $y \in B$ l'unico elemento $x \in A$ tale che $y = f(x)$.

Esempio 4.23. 1) Data $f(x) = 2x - 1$ la funzione inversa $f^{-1}(y)$ è la funzione che si ottiene così: da

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = 2x - 1 \Leftrightarrow x = \frac{y + 1}{2}$$

si ottiene che $f^{-1}(y) = \frac{y+1}{2}$.

2) Data $f(x) = e^x$ la funzione inversa è $f^{-1}(y) = \log y$. Infatti da

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = e^x \Leftrightarrow x = \log y$$

si ottiene che $f^{-1}(y) = \log y$.

Se una funzione f è biunivoca allora il grafico di f^{-1} è:

$$\mathcal{G}_{f^{-1}} = \{(y, x) \in B \times A : x = f^{-1}(y)\} = \{(y, x) \in B \times A : (x, y) \in \mathcal{G}_f\}.$$

Si ha allora che il grafico di f^{-1} è il *simmetrico* di quello di f , perchè si ottiene scambiando A con B (nel caso di funzioni reali a valori reali il grafico della funzione inversa è il simmetrico rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante di quello di f .)

Definizione 4.24. Se $f : A \rightarrow B$ ed $E \subseteq A$, si dice *restrizione di f ad E* la funzione $f|_E : E \rightarrow B$ definita da $f|_E(x) = f(x)$ per ogni $x \in E$.

Esempio 4.25. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ definita da $f(x) = x^2$. Essa non è iniettiva e non è invertibile, ma se consideriamo la funzione $f|_{\mathbb{R}^+}$ dove $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ essa risulta iniettiva. La sua inversa si costruisce così: parto da $y = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$, da cui $(f|_{\mathbb{R}^+})^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

Dall'esempio sopra si capisce che una funzione che non è iniettiva si può rendere iniettiva semplicemente considerando opportune restrizioni della funzione stessa.

Definizione 4.26. Siano $f : A \rightarrow B$, $g : B' \rightarrow C$, con $f(A) \subseteq B'$; si dice *composizione di f e g* la funzione $g \circ f : A \rightarrow C$ definita dalla legge $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Esempio 4.27. 1) Se $f(x) = |x^3|$ con $x \neq 0$ e $g(x) = \log x$ allora $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \log(f(x)) = \log(|x^3|)$.

Valgono le seguenti proprietà:

- . la composizione di funzioni è associativa: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$;
- . la composizione di funzioni non è commutativa: $f \circ g \neq g \circ f$;
- . $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

4.3 Funzioni pari, dispari, e periodiche

4.3.1 Parità e disparità

Definizione 4.28. Diciamo che un insieme $D \subseteq \mathbb{R}$ è simmetrico rispetto all'origine se gode della seguente proprietà:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \in D \Leftrightarrow -x \in D.$$

Ad esempio, sono insiemi simmetrici rispetto all'origine tutti gli intervalli della forma $(-M, M)$, con $M > 0$. Ma anche l'insieme $I = \{7\} \cup [-5, -3) \cup \{-2\} \cup \{2\} \cup (3, 5] \cup \{7\}$ è simmetrico rispetto all'origine.

Definizione 4.29. Sia $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$, con $D_f \subseteq \mathbb{R}$ simmetrico rispetto all'origine. Diciamo che

- f è pari se

$$f(x) = f(-x) \quad \forall x \in D_f;$$

- f è dispari se

$$f(x) = -f(-x) \quad \forall x \in D_f.$$

Si noti che:

- la definizione di funzione pari/dispari ha significato solo su domini simmetrici rispetto all'origine;
- se $D_f \subseteq \mathbb{R}$ è simmetrico rispetto all'origine e $0 \in D_f$, e se $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione dispari, necessariamente $f(0) = 0^1$.
- Se una funzione $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ è pari o dispari, allora il suo grafico ha la seguente notevole proprietà:
 - se f è pari, allora $\text{graf}(f)$ è **simmetrico rispetto all'asse y** ;
 - se f è dispari, allora $\text{graf}(f)$ è **simmetrico rispetto all'origine degli assi**.

Quindi, per disegnare il grafico qualitativo di una funzione pari o dispari, è sufficiente conoscerne l'andamento solo per $x \geq 0$: il grafico completo si otterrà facendo l'opportuna simmetria.

4.3.2 Periodicità

Definizione 4.30. Sia $T > 0$ e $D \subseteq \mathbb{R}$ un insieme non vuoto con la proprietà che

$$\forall x \in D, \quad x + T \in D. \tag{4.3}$$

Diciamo che una funzione $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ è periodica di periodo T (brevemente, T -periodica), se si ha

$$f(x + T) = f(x) \quad \forall x \in D. \tag{4.4}$$

¹in quanto, per la disparità, si ha $f(0) = -f(-0) = -f(0)$: l'unica possibilità perché valga ciò è che $f(0)$ sia 0.

Godono della proprietà (4.3) per esempio gli insiemi $D = \mathbb{R}$, per ogni $T > 0$, e $D = \text{dom}(\tan)$, per $T = \pi$, (si denota \tan la funzione tangente, che verrà definita nella Sezione 4.5.7).

Si noti che se $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione T -periodica, f è anche periodica di periodo kT per ogni $k \in \mathbb{N}$. Il minimo $T' > 0$ per il quale f è periodica di periodo T' , se esiste, viene chiamato *periodo minimo*.

Osservazione 4.31. Dalla definizione di funzione periodica segue che date due funzioni periodiche f e g di periodi T_1 e T_2 rispettivamente, allora la funzione somma $f + g$ è una funzione periodica di periodo $T := m.c.m.\{T_1, T_2\}$, dove *m.c.m.* indica il minimo comune multiplo fra i due numeri.

4.4 Funzioni monotone

Definizione 4.32. Una funzione $f : \text{dom } f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice

(i) *monotona crescente se*

$$\forall x, y \in \text{dom } f : x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y);$$

(ii) *monotona decrescente se*

$$\forall x, y \in \text{dom } f : x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y);$$

(ii) *strettamente crescente o strettamente decrescente se le disuguaglianze sopra sono strette.*

Esempio 4.33. Sono funzioni monotone la funzione esponenziale e la funzione logaritmo (per la loro definizione si veda la sezione *Funzioni elementari*). In particolare si ha:

- $f(x) = a^x$ con $a > 1$ è monotona crescente (strettamente);
- $f(x) = a^x$ con $0 < a < 1$ è monotona decrescente (strettamente);
- $f(x) = \log_a(x)$ con $a > 1$ è monotona crescente (strettamente);
- $f(x) = \log_a(x)$ con $0 < a < 1$ è monotona decrescente (strettamente).

4.5 Funzioni elementari

Vengono comunemente definite *funzioni elementari* le

- le funzioni potenza a esponente naturale, intero, razionale, e reale;
- le funzioni esponenziali di base $a > 0$;
- le funzioni logaritmiche di base $a > 0$, con $a \neq 1$;
- le funzioni trigonometriche \sin , \cos , \tan , \cot ;
- le funzioni trigonometriche inverse \arcsin , \arccos , \arctan , arccot .

4.5.1 Le funzioni potenza a esponente naturale

Consideriamo le funzioni

$$x \in \mathbb{R} \mapsto x^n, \quad \text{con } n \in \mathbb{N} \text{ e dominio } D_f = \mathbb{R}.$$

1. Per $n = 0$, otteniamo la funzione costante

$$f(x) = x^0 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Si ha che $f(x) \equiv 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Il grafico di tale funzione è la retta $y = 1$. Chiaramente $\text{im}(f) = \{1\}$, quindi f non è né suriettiva, né iniettiva. f è pari. f è periodica con periodo $T > 0$ **per ogni** $T > 0$ (quindi f non ha periodo minimo). **Le considerazioni appena sviluppate valgono anche per la generica funzione costante $f(x) \equiv c$, con $c \in \mathbb{R}$.**

2. Per $n = 1$, otteniamo la funzione identità

$$f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Il suo grafico è la bisettrice del primo e del terzo quadrante $y = x$. È immediato vedere che f è iniettiva e che $\text{im}(f) = \mathbb{R}$, quindi f è anche suriettiva. Inoltre f è dispari.

- più in generale, consideriamo la funzione lineare

$$f(x) = ax + b \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0. \quad (4.5)$$

Il suo grafico è la retta $y = ax + b$. f è iniettiva e $\text{im}(f) = \mathbb{R}$, quindi f è anche suriettiva. Inoltre, f è dispari se e solo se $b = 0$.

Esempio 4.34 (Moto rettilineo uniforme). In fisica, la **legge oraria** è la funzione che esprime la posizione di un corpo in funzione del tempo. Nel caso del moto rettilineo uniforme la legge oraria è descritta dalla legge

$$s(t) = s_0 + vt$$

che è una funzione lineare del tipo (4.5), dove $s_0 = b$ è la posizione iniziale, $v = a$ è la velocità (costante nel moto uniforme) e $t = x$ è la variabile indipendente che corrisponde al tempo che occorre per passare dalla posizione iniziale alla generica posizione $s(t) = y$.

- A partire dalla funzione identità definiamo la funzione modulo

$$|x| := \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0, \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Si vede subito che l'insieme immagine della funzione modulo è la semiretta positiva $[0, +\infty)$, quindi $|\cdot|$ non è suriettiva. Essendo

$$|x| = |-x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

(in virtù della definizione di modulo), si ha che la funzione modulo $|\cdot|$ è pari, e quindi non è neppure iniettiva.

3. Per $n = 2$, otteniamo la funzione quadratica

$$f(x) = x^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Il suo grafico è la parabola $y = x^2$. Si ha che $\text{im}(f) = [0, +\infty)$ (quindi f non è suriettiva). Inoltre f è pari, quindi non è iniettiva. Notiamo tuttavia che le funzioni

$$\begin{array}{ll} f|_{[0, +\infty)} & \text{restrizione di } x \mapsto x^2 \text{ a } [0, +\infty), \\ f|_{(-\infty, 0]} & \text{restrizione di } x \mapsto x^2 \text{ a } (-\infty, 0], \end{array} \quad \text{sono iniettive.}$$

• più in generale, consideriamo la funzione quadratica

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{con } a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0. \quad (4.6)$$

Il suo grafico è la parabola di equazione $y = ax^2 + bx + c$.

Esempio 4.35 (Caduta di un grave). Un moto di un corpo che cade è un moto **uniformemente accelerato**. Esso è descritto dalla legge oraria

$$s(t) = s_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2$$

dove s_0 è la posizione iniziale, v_0 è la velocità iniziale nella direzione dell'asse s e $g = 9,8 \text{ms}^{-2}$ è l'accelerazione di gravità. La legge oraria sopra scritta è una funzione quadratica del tipo (4.6) con $c = s_0$, $b = v_0$, $a = -\frac{1}{2}g$, $x = t$ e $y = s$.

4. Per $n = 3$, otteniamo la funzione cubica

$$f(x) = x^3 \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Il suo grafico è la curva cubica $y = x^3$. Si vede che $\text{im}(f) = \mathbb{R}$, quindi f è suriettiva. Inoltre f è iniettiva. Si verifica immediatamente che f è dispari.

5. In generale, le funzioni potenza a esponente **naturale pari**

$$f(x) = x^{2k} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{con } k \in \mathbb{N}, \quad k \geq 1,$$

hanno le stesse proprietà e lo stesso andamento grafico qualitativo della funzione $f(x) = x^2$.

6. In generale, le funzioni potenza a esponente **naturale dispari**

$$f(x) = x^{2k+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{con } k \in \mathbb{N}, \quad k \geq 1,$$

hanno le stesse proprietà e lo stesso andamento grafico qualitativo della funzione $f(x) = x^3$.

Definizione 4.36. Chiamiamo funzione polinomiale una funzione $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ della forma

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

ove i coefficienti a_i , $i = 1, \dots, n$, sono numeri reali, con $a_n \neq 0$, e il numero $n \in \mathbb{N}$ viene detto grado del polinomio.

4.5.2 Le funzioni potenza a esponente intero negativo

Consideriamo le funzioni

$$x \in \mathbb{R} \mapsto x^{-n} := \frac{1}{x^n}, \quad \text{con } n \in \mathbb{N}, \quad n > 0, \quad \text{e dominio } D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

1. Per $n = 1$, otteniamo la funzione reciproca

$$f(x) = \frac{1}{x} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Il suo grafico è l'iperbole $y = \frac{1}{x}$. Si ha che $\text{im}(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, quindi f non è suriettiva. f è iniettiva e dispari.

Osservazione 4.37. Ricordiamo che l'equazione dell'iperbole equilatera (cioè tale che i propri asintoti siano gli assi cartesiani) con centro $(0, 0)$ ha equazione

$$xy = k \tag{4.7}$$

con $k \in \mathbb{R}$.

Il caso generale di un'iperbole equilatera traslata è fornito dalla cosiddetta *funzione omografica* di equazione

$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \tag{4.8}$$

con centro in $C = (-\frac{d}{c}, \frac{a}{c})$. Gli asintoti di tale curva sono: $x = -\frac{d}{c}$ (asintoto verticale) e $y = \frac{a}{c}$ (l'asintoto orizzontale). Facendo la traslazione degli assi

$$X = x + \frac{d}{c} \quad Y = y - \frac{a}{c}$$

l'equazione (4.8) viene riscritta nelle nuove variabili in

$$XY = k := -\frac{da}{c^2} + \frac{b}{c}$$

che risulta essere l'equazione di un'iperbole equilatera riferita ai nuovi assi cartesiani X, Y .

Esempio 4.38 (L'equazione di stato dei gas perfetti). L'equazione di stato dei gas perfetti esprime la relazione fra le variabili di stato P pressione, V volume, T temperatura:

$$PV = nRT$$

con R costante universale dei gas e n numero di moli.

Una trasformazione si dice *isoterma* quando si svolge a temperatura costante (una trasformazione di questo tipo può essere realizzata, per esempio, facendo espandere il gas dal volume V_1 al volume V_2 fornendo calore per mantenere la temperatura costante). Nel piano PV questa trasformazione è rappresentata dalla curva \mathcal{C} , grafico della funzione

$$P = P(V) = \frac{nRT}{V}$$

che è l'iperbole equilatera (4.7) con $k = nRT$, $x = V$ e $y = P$.

Esempio 4.39 (Un esempio in cinetica enzimatica). Lo studio della velocità delle reazioni chimiche è detta *cinetica*, mentre lo studio della velocità delle reazioni chimiche catalizzate dagli enzimi è detta *cinetica enzimatica*. Indicando con V_0 la velocità della reazione catalizzata e con $[S]$ la concentrazione del substrato (molecola sulla quale agisce l'enzima) della reazione, la formula di *Michaelis-Menten* fornisce

$$V_0 = V_{max} \frac{[S]}{[S] + K_{max}}$$

dove V_{max} è una costante, detta *velocità massima* e K_{max} è una costante *uguale alla concentrazione del substrato alla quale la velocità della reazione è pari alla metà della velocità massima*. Il grafico di tale funzione non è altro che un ramo di un'iperbole equilatera traslata. Infatti l'equazione sopra scritta è del tipo (4.8) con $a = V_{max}$, $b = 0$, $c = 1$, $d = K_{max}$, $x = [S]$ e $y = V_0$.

2. Per $n = 2$, otteniamo la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Si ha che $\text{im}(f) = (0, +\infty)$, quindi f non è suriettiva. Inoltre, f è pari, quindi non è iniettiva.

3. In generale, le funzioni potenza a esponente **intero negativo pari**

$$f(x) = x^{-2k} := \frac{1}{x^{2k}} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \text{con } k \in \mathbb{N},$$

hanno le stesse proprietà e lo stesso andamento grafico qualitativo della funzione $f(x) = x^{-2}$.

4. In generale, le funzioni potenza a esponente **intero negativo dispari**

$$f(x) = x^{-(2k+1)} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \quad \text{con } k \in \mathbb{N},$$

hanno le stesse proprietà e lo stesso andamento grafico qualitativo della funzione $f(x) = x^{-3}$.

Definizione 4.40. Chiamiamo funzione razionale fratta una funzione data dal quoziente di due polinomi, cioè della forma

$$f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} \quad \begin{cases} a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n, & a_n \neq 0 \\ b_j \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, m, & b_m \neq 0 \end{cases}.$$

Il dominio di f è allora $\text{dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0 \neq 0\}$.

4.5.3 Inverse delle funzioni potenza a esponente naturale (strettamente positivo)

- La funzione identità $f(x) = x$ è iniettiva su \mathbb{R} , quindi invertibile. Poiché $\text{im}(f) = \mathbb{R}$, la funzione inversa f^{-1} è definita su \mathbb{R} . Si vede immediatamente che $f(x) = x$ coincide con la sua inversa.

- Più in generale, la funzione lineare $f(x) = ax + b$, con $a \neq 0$, è invertibile. Essendo $\text{im}(f) = \mathbb{R}$, si ha che f^{-1} è definita su tutto \mathbb{R} . Si verifica immediatamente che

$$f^{-1}(x) = \frac{x}{a} - \frac{b}{a} \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Prima di introdurre le inverse delle funzioni potenza $f(x) = x^n$, con $n \geq 2$, diamo la seguente

Definizione 4.41. Siano $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, e $x \in [0, +\infty)$. Chiamiamo radice n -esima di x l'unico numero $y \in [0, +\infty)$ verificante $y^n = x$. Useremo la notazione $y = \sqrt[n]{x}$.

Distinguiamo i seguenti casi:

1. $n \geq 2$, n **pari**: in questo caso, la funzione $x \mapsto x^n$ è pari, quindi non è invertibile su tutto \mathbb{R} . **Si conviene di considerare la restrizione di f alla semiretta $[0, +\infty)$.** Tale restrizione ha ancora come insieme immagine la semiretta $[0, +\infty)$ ed è una funzione iniettiva, quindi invertibile. La funzione inversa avrà quindi come dominio la semiretta $[0, +\infty)$, e come insieme immagine il dominio della restrizione di x^n a $[0, +\infty)$. Allora l'insieme immagine della funzione inversa è $[0, +\infty)$. Si vede immediatamente che

$$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} \quad \forall x \in [0, +\infty).$$

2. $n \geq 2$, n **dispari**: in questo caso, la funzione $x \mapsto x^n$ è iniettiva, quindi è invertibile su tutto \mathbb{R} . Il suo insieme immagine è \mathbb{R} . Quindi la funzione f^{-1} è definita su \mathbb{R} , con $\text{im}(f^{-1}) = \mathbb{R}$. Si ha

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt[n]{x} & \forall x \in [0, +\infty), \\ -\sqrt[n]{-x} & \forall x \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

In generale, useremo la notazione $x^{1/n}$ per la funzione inversa di x^n . Si hanno quindi le formule

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x} \quad \forall x \in [0, +\infty) \quad \text{per } n \geq 2, n \text{ PARI,}$$

$$x^{1/n} = \begin{cases} \sqrt[n]{x} & \forall x \in [0, +\infty), \\ -\sqrt[n]{-x} & \forall x \in (-\infty, 0), \end{cases} \quad \text{per } n \geq 2, n \text{ DISPARI.}$$

4.5.4 Le funzioni potenza a esponente razionale e reale

Funzioni potenza a esponente razionale. Vogliamo ora definire le funzioni $f(x) = x^q$, con $q \in \mathbb{Q}$. Distingueremo il caso $q > 0$ dal caso $q < 0$ ².

- $q > 0$: allora $q = \frac{m}{n}$, con $m, n \in \mathbb{Z}$, $m, n \neq 0$, e concordi. Non è limitativo supporre che m e n siano entrambi strettamente positivi. Allora definiamo

$$x^q = x^{m/n} := (x^{1/n})^m \quad \begin{cases} \forall x \in D_f = [0, +\infty) & \text{se } n \text{ è pari,} \\ \forall x \in D_f = \mathbb{R} & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

- caso $q < 0$. Non è limitativo supporre che $q = -\frac{m}{n}$, con $m, n \in \mathbb{N}$, $m, n > 0$. Allora definiamo

$$x^q = x^{-m/n} := \frac{1}{x^{m/n}} \quad \begin{cases} \forall x \in D_f = (0, +\infty) & \text{se } n \text{ è pari,} \\ \forall x \in D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Osserviamo quindi che **il dominio naturale della generica funzione x^q è $(0, +\infty)$.**

²abbiamo già studiato il caso $q = 0$!

Funzioni potenza a esponente reale. Dato $r \in \mathbb{R}$, definiamo la funzione potenza $x \mapsto x^r$ sfruttando la densità di \mathbb{Q} in \mathbb{R} . Quest'ultima proprietà assicura infatti che

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists q \in \mathbb{Q} : |r - q| < \varepsilon,$$

cioè che il numero reale $r \in \mathbb{R}$ può essere approssimato “arbitrariamente bene” da numeri razionali $q \in \mathbb{Q}$. Allora si può definire x^r tramite approssimazione³ con le potenze x^q , $q \in \mathbb{Q}$, che abbiamo testè definito. Poiché il dominio naturale della generica potenza x^q è $(0, +\infty)$, abbiamo che

per ogni $r \in \mathbb{R}$, il dominio naturale della funzione $x \mapsto x^r$ è $(0, +\infty)$.

Abbiamo quindi definito la funzione

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^+ &\rightarrow \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto x^r \end{aligned}$$

dove $r \in \mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^+ = (0, +\infty)$.

4.5.5 Le funzioni esponenziali

Sia a un numero reale strettamente positivo e consideriamo la funzione esponenziale di base a

$$x \in \mathbb{R} \mapsto a^x, \quad \text{con dominio } D_f = \mathbb{R}.$$

Si osservi che, per dare senso alla potenza a^x con esponente reale x , il numero a deve essere strettamente positivo!

Proprietà delle funzioni esponenziali. Valgono per ogni base $a \in (0, +\infty)$ le seguenti proprietà:

1. $a^0 = 1$,
2. $a^{x+y} = a^x a^y$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$,
3. $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$,
4. $(a^x)^y = a^{xy}$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}$,
5. $(ab)^x = a^x b^x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, per ogni $b > 0$.

Abbiamo tre tipi di andamenti grafici qualitativi per le funzioni esponenziali:

1. $a = 1$. In questo caso $f(x) = 1^x \equiv 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, cioè ritroviamo la funzione costantemente uguale a 1.
2. $a > 1$. In questo caso $\text{im}(f) = (0, +\infty)$, quindi f non è suriettiva. f è invece iniettiva e monotona strettamente crescente. Un caso notevole si ha per $a = e = 2,7218\dots$, la costante di Nepero (o costante di Eulero). Nel caso $a = e$ si usa

la notazione alternativa $e^x \equiv \exp(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

³lo sviluppo rigoroso di questo procedimento di approssimazione si basa sulla nozione di *limite di una successione*, che non verrà affrontata in questo corso.

3. $0 < a < 1$. In questo caso $\text{im}(f) = (0, +\infty)$, quindi f non è suriettiva. f è invece iniettiva e monotona strettamente decrescente.

Si noti la relazione

$$\left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x} = a^{-x} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall a > 0,$$

che permette di passare dal caso 2. al caso 3. e viceversa.

4.5.6 Le funzioni logaritmiche

Le funzioni esponenziali $x \in \mathbb{R} \mapsto a^x$ sono iniettive (quindi invertibili) per $a \neq 1$ e, in tal caso, hanno come insieme immagine $(0, +\infty)$.

Definizione 4.42. Sia $a \in (0, +\infty)$, $a \neq 1$. Chiamiamo funzione logaritmica in base a (o logaritmo in base a) la funzione inversa dell'esponenziale $x \mapsto a^x$, e usiamo la notazione \log_a . Nel caso particolare in cui $a = e$, useremo la notazione \ln (o semplicemente \log) invece di \log_e e ci riferiremo alla funzione \ln con il nome logaritmo naturale.

- Per definizione di funzione inversa, la funzione \log_a è data dalla formula

$$\forall x > 0 \quad \log_a(x) = y \Leftrightarrow a^y = x$$

cioè il logaritmo in base a di un numero strettamente positivo x è quel numero reale y tale che a elevato alla y sia uguale a x .

- In particolare, segue dal fatto che $a^0 = 1$ che

$$\log_a(1) = 0 \quad \forall a \in (0, +\infty), a \neq 1.$$

- Per costruzione si che per ogni $a \in (0, +\infty)$, $a \neq 1$

$$\text{dom}(\log_a) = (0, +\infty), \quad \text{im}(\log_a) = \mathbb{R}, \quad \log_a \text{ è iniettiva.}$$

Abbiamo due tipi di andamenti grafici qualitativi per le funzioni logaritmiche (si noti che per ogni $a \in (0, +\infty)$, $a \neq 1$, il grafico di \log_a passa per il punto $(1, 0)$):

1. $a > 1$. In questo caso il grafico di \log_a si ottiene considerando il simmetrico (rispetto alla retta $y = x$) del grafico di $x \mapsto a^x$ nel caso $a > 1$. $\log_a x$ è una funzione monotona strettamente crescente.
2. $0 < a < 1$. In questo caso il grafico di \log_a si ottiene considerando il simmetrico (rispetto alla retta $y = x$) del grafico di $x \mapsto a^x$ nel caso $0 < a < 1$. $\log_a x$ è una funzione monotona strettamente decrescente.

Proprietà delle funzioni logaritmiche. Valgono per ogni base $a \in (0, +\infty)$, $a \neq 1$ le seguenti proprietà:

$$\log_a(1) = 0, \tag{4.9}$$

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y) \quad \text{per ogni } x, y > 0, \tag{4.10}$$

$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x) \quad \text{per ogni } x > 0, \tag{4.11}$$

$$\log_a(x^y) = y \log_a(x) \quad \text{per ogni } x \in (0, +\infty) \text{ e per ogni } y \in \mathbb{R}, \tag{4.12}$$

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)} \quad \text{per ogni } x > 0 \text{ e per ogni } b \in (0, +\infty), b \neq 1. \tag{4.13}$$

Da (4.10) e (4.11) segue che

$$\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a(x) - \log_a(y) \quad \forall x, y > 0.$$

Dimostriamo alcune di queste proprietà a partire dalle proprietà delle funzioni esponenziali, usando la relazione di inversione

$$y = \log_a(x) \Leftrightarrow a^y = x.$$

- Per dimostrare la (4.10), poniamo

$$z = \log_a(xy), \quad t = \log_a(x), \quad w = \log_a(y).$$

Per definizione, si ha quindi

$$xy = a^z, \quad x = a^t, \quad y = a^w,$$

da cui

$$xy = (a^t)(a^w) = a^{t+w}$$

ove l'ultima relazione segue dalle proprietà delle funzioni esponenziali. Quindi

$$xy = a^{t+w} \Rightarrow t + w = \log_a(xy) = z,$$

che è la relazione che volevamo dimostrare.

- Per dimostrare la (4.11) osserviamo che

$$w = \log_a(x), \quad t = \log_a \left(\frac{1}{x} \right) \Leftrightarrow a^t = \frac{1}{x} = x^{-1} = (a^w)^{-1} = a^{-w}.$$

Allora da $a^t = a^{-w}$ e dall'iniettività della funzione esponenziale in base a concludiamo che

$$t = -w \Rightarrow \log_a \left(\frac{1}{x} \right) = -\log_a(x).$$

Esercizio. Ragionando in modo completamente analogo, dimostrare la (4.12) e la (4.13).

Esempio 4.43 (Ph e curve di titolazione). Un sistema solido o liquido, costituito da due o più componenti (per esempio sale disciolto in acqua) si chiama **soluzione**. La sostanza disciolta (per esempio il sale) si chiama **soluto**, quella in cui il soluto è sciolto (per esempio l'acqua) si chiama **solvente**. La quantità di soluto contenuta nel solvente si chiama **concentrazione** e in molti casi si misura in grammo-mole per litro.

Acidi e sali in soluzioni acquose formano ioni di idrogeno. La concentrazione di questi ioni nella soluzione permette di quantificare in grado di acidità o alcalinità (detta anche basicità). Il punto di riferimento è l'acqua pura a 25 gradi centigradi, nella quale si hanno $10^{-7} \text{ mol l}^{-1}$ di ioni. Una concentrazione alta di ioni, compresa fra 10^{-2} e 10^{-7} si riscontra nelle cosiddette soluzioni "acide", mentre, se la concentrazione è al di sotto di 10^{-7} , la soluzione è "basica" (o "alcalinica"), se è esattamente uguale a 10^{-7} è detta neutra.

Vista la grande variabilità delle concentrazioni, è conveniente utilizzare come misura l'esponente della concentrazione (con segno positivo). Si definisce così pH , o "indice di ioni di idrogeno", il numero

$$pH = -\log[H^+] \quad (4.14)$$

dove $[H^+]$ è la concentrazione di ioni di idrogeno.

Dalla definizione segue che se in una soluzione si ha

- (i) $pH < 7$, allora la soluzione è ACIDA;
- (ii) $pH = 7$, allora la soluzione è NEUTRA;
- (iii) $pH > 7$, allora la soluzione è ALCALINA.

Il pH della pioggia è 6.5 e quello del sangue è 7.4: questi due valori differiscono di poco meno di un'unità, ma se consideriamo la definizione (4.14) si ha, rispettivamente,

$$[H^+]_{pioggia} = 10^{-6.5}, \quad [H^+]_{sangue} = 10^{-7.5}.$$

Quindi il rapporto fra le due concentrazioni è

$$\frac{10^{-6.5}}{10^{-7.5}} = 10^{+0.9} \approx 8$$

perciò la concentrazione di ioni di idrogeno della pioggia è circa 8 volte quella del sangue. Le cartine di tornasole sono strumenti per la visualizzazione immediata del grado di acidità. Si tratta di piccole strisce di carta impregnate di una soluzione vegetale, il tornasole, che ha la proprietà di colorarsi di azzurro a contatto con gli elementi basici e di rosso con quelli acidi.

Chiamiamo **curva di titolazione** il grafico di una funzione che rappresenta la variazione di un parametro opportuno scelto per una soluzione a seguito dell'aggiunta di un volume di soluzione titolante.

Nelle titolazioni acido-base, le curve di titolazione sono i grafici che rappresentano la variazione di pH della sostanza titolata (titolo) in funzione della sostanza aggiunta (titolante). Sull'asse delle ascisse sono riportati i diversi valori del volume del titolante aggiunto e sulle ordinate si trovano i corrispondenti valori di pH .

Esempio 4.44 (Grafici in scala logaritmica). La crescita veloce dei fenomeni esponenziali può rendere difficile una loro efficace rappresentazione grafica.

Nella crescita malthusiana $N(t) = 2^t$, se i valori della variabile t variano dell'intervallo $[0, 10]$, i corrispondenti valori di $N(t)$ diventano molto grandi; proviamo a rappresentarli in un grafico. Si ha $N(0) = 1$, $N(1) = 2$, $N(2) = 4$, \dots , $N(9) = 512$, $N(10) = 1024$. Se l'unità delle ascisse è pari a quella delle ordinate è praticamente impossibile visualizzare l'intero grafico della funzione, perchè i valori di $N(t)$ diventano troppo grandi. Una possibile soluzione è quella di usare due scale differenti: per esempio, a 1 unità sull'asse delle ascisse si potrebbe far corrispondere 100 unità sull'asse delle ordinate. In questo modo abbiamo una rappresentazione significativa per i valori di $N(t)$ grandi, ma perdiamo i dettagli nella regione in cui $N(t)$ è piccolo (che corrispondono ai valori iniziali di t); per esempio non si vede più l'intersezione del grafico con l'asse y .

Un modo per superare questa difficoltà è rappresentare il logaritmo della funzione. Calcoliamo il logaritmo di entrambi i membri di $N(t) = 2^t$. Si ottiene

$$\log N(t) = t \log 2.$$

Se scegliamo $y(t) = \log N(t)$ come variabile dipendente, otteniamo $y(t) = t \log 2$ il cui grafico è una retta che passa per l'origine con coefficiente angolare pari a $\log 2$.

In generale, un fenomeno descritto dalla funzione esponenziale $f(x) = ce^{ax}$, con $c > 0$, è rappresentato in **scala logaritmica** (di base e) dalla funzione lineare

$$y = \log f(x) = \log c + ax.$$

(abbiamo usato $y = \log f(x) = \log(ce^{ax}) = \log c + \log(e^{ax}) = \log c + ax$).

La rappresentazione dei dati in scala logaritmica è, in pratica, il modo migliore per comprendere se un fenomeno è descritto da una legge esponenziale.

Se un fenomeno è descritto, in scala logaritmica, dalla legge lineare $y = ax + b$, allora si tratta di un fenomeno esponenziale rappresentato dalla funzione

$$f(x) = e^b e^{ax},$$

(abbiamo infatti usato che

$$y = \log f \Leftrightarrow f = e^y$$

da cui

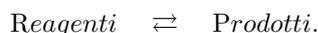
$$f(x) = e^y = e^{ax+b} = e^{ax} e^b.)$$

Esempio 4.45 (Costanti di equilibrio nelle reazioni chimiche). Una reazione chimica è una trasformazione della materia che avviene senza variazioni misurabili di massa, in cui una o più specie chimiche (dette "reagenti") modificano la loro struttura e composizione originaria per generare altre specie chimiche (dette "prodotti").

L'avvenire spontaneo di una trasformazione dipende dalla *variazione di energia libera della reazione* ΔG , che è una misura della spontaneità della trasformazione. Grazie alla seconda legge della termodinamica si ha che:

- una reazione può avvenire spontaneamente solo se $\Delta G < 0$;
- se $\Delta G = 0$ la reazione ha raggiunto uno *stato di equilibrio*;
- se $\Delta G > 0$ la reazione non può procedere spontaneamente, bisogna somministrare energia per far procedere la reazione.
- Il valore di ΔG di una reazione dipende esclusivamente dalla differenza tra l'energia libera dei prodotti (stato finale) e l'energia libera dei reagenti (stato iniziale). Il valore di ΔG è indipendente da come avviene la reazione.
- il valore di ΔG non fornisce informazioni sulla velocità della reazione. Un ΔG negativo ci dice che la reazione avviene spontaneamente, ma non dice se avverrà ad una velocità apprezzabile.

Una reazione di equilibrio si identifica mettendo una doppia freccia tra reagenti e prodotti, i.e



Consideriamo la reazione



Il valore di ΔG della reazione è dato dalla relazione

$$\Delta G = \Delta G^0 + RT \log \frac{[C][D]}{[A][B]} \quad (4.15)$$

dove ΔG^0 è la variazione di energia libera standard (cioè quando i reagenti A, B e i prodotti C, D sono presenti a concentrazione $1M$), R è la costante dei gas, T è la temperatura assoluta, e $[A], [B], [C], [D]$ sono le concentrazioni molari (più precisamente le attività) dei reagenti e dei prodotti.

Per semplificare la determinazione dell'energia libera delle reazioni biochimiche è stata adottata la seguente convenzione: lo stato standard è definito a $pH7$. Di conseguenza quando H^+ è un reagente, la sua attività è pari a 1. Indichiamo con il simbolo

$$\Delta G^{o'}$$

la variazione di energia libera standard a $pH7$. Un modo semplice per calcolare $\Delta G^{o'}$ è misurare la concentrazione dei reagenti e dei prodotti quando la reazione ha raggiunto l'equilibrio e non vi sono più variazioni nette nelle concentrazioni dei reagenti e dei prodotti. In pratica all'equilibrio la reazione si è fermata e $\Delta G = 0$. Quindi all'equilibrio l'equazione (4.15) diventa

$$0 = \Delta G^{o'} + RT \log \frac{[C][D]}{[A][B]}$$

da cui

$$\Delta G^{o'} = -RT \log \frac{[C][D]}{[A][B]}. \quad (4.16)$$

La costante di equilibrio in condizioni standard è data da

$$K = \frac{[C][D]}{[A][B]}.$$

Sostituendo K in (4.16) si ha

$$\Delta G^{o'} = -RT \log K \quad (4.17)$$

equivalente a

$$K = e^{-\Delta G^{o'}/RT}. \quad (4.18)$$

4.5.7 Le funzioni trigonometriche e le loro inverse

Definizione di seno e coseno mediante la circonferenza goniometrica. Si consideri un punto P che si muove sulla circonferenza goniometrica $x^2 + y^2 = 1$, percorrendola in senso antiorario, a partire dal punto $(1, 0)$.

Sia $t > 0$ la lunghezza dell'arco di circonferenza compreso fra il punto $(1, 0)$ e il punto P . Si noti che t è la misura in radianti dell'angolo compreso fra il segmento congiungente $O = (0, 0)$ e $(1, 0)$, e il raggio OP .

D'altra parte, ogni valore $t \in [0, 2\pi]$ individua uno e un solo punto P sulla circonferenza trigonometrica, tale che l'arco orientato da $(1, 0)$ a P abbia lunghezza t (il punto corrispondente a $t = 0$ e $t = 2\pi$ è il punto $(1, 0)$). Possiamo quindi considerare il punto $P = P_t$ come in funzione del parametro t e definire le quantità *seno di t* e *coseno di t* .

$$\text{Fissato } t \in [0, 2\pi], \text{ definiamo } \begin{cases} \cos(t) := \text{ascissa di } P_t, \\ \sin(t) := \text{ordinata di } P_t. \end{cases}$$

Estensione di seno e coseno a valori di $t \in \mathbb{R}$. Le funzioni \sin e \cos si estendono a \mathbb{R} e verificano le relazioni

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x), \quad \cos(x + 2\pi) = \cos(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (4.19)$$

e

$$\sin(-x) = -\sin(x), \quad \cos(-x) = \cos(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4.20)$$

Valori fondamentali di sin e cos, e formule di addizione. Si ricava dalla definizione di sin e cos che

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1, \quad -1 \leq \sin(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4.21)$$

Inoltre si possono calcolare i seguenti valori fondamentali:

$$\begin{aligned} t = 0 & \quad \sin(0) = 0 & \quad \cos(0) = 1 \\ t = \frac{\pi}{6} & \quad \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} & \quad \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ t = \frac{\pi}{4} & \quad \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} & \quad \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ t = \frac{\pi}{3} & \quad \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} & \quad \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \\ t = \frac{\pi}{2} & \quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 & \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{aligned}$$

Usando le formule di addizione per sin e cos

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x) & \forall x, y \in \mathbb{R}, \\ \sin(x-y) &= \sin(x)\cos(y) - \sin(y)\cos(x) & \forall x, y \in \mathbb{R}, \\ \cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(y)\sin(x) & \forall x, y \in \mathbb{R}, \\ \cos(x-y) &= \cos(x)\cos(y) + \sin(y)\sin(x) & \forall x, y \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

si ricavano a partire dai valori fondamentali altri valori di sin e cos su $[0, 2\pi]$. Per esempio,

$$\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \sin\left(\frac{4}{6}\pi\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Tenendo conto di (4.19) e (4.20), ricaviamo infiniti altri valori fondamentali di sin e cos.

Le funzioni sin, cos, e tan. Richiamiamo alcune delle proprietà fondamentali delle funzioni trigonometriche.

- La funzione *seno*:

$$\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

è dispari (si veda (4.20)), 2π -periodica (si veda (4.19)), e ha come insieme immagine $[-1, 1]$ (come si ricava da (4.21)).

- La funzione *coseno*:

$$\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

è pari (si veda (4.20)), 2π -periodica (si veda (4.19)), e ha come insieme immagine $[-1, 1]$ (come si ricava da (4.21)). Inoltre, dalle formule di addizione per il seno si ottiene che

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Quindi (cf. la discussione sulle traslazioni di grafici nella Sezione 4.8), *il grafico di cos si ottiene traslando orizzontalmente il grafico di sin di $\frac{\pi}{2}$, nella direzione negativa dell'asse x .*

- La funzione *tangente* è definita dall'espressione

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

Il suo dominio naturale è dato da tutti gli $x \in \mathbb{R}$ per i quali $\cos(x) \neq 0$. Poiché

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

concludiamo che

$$\text{dom}(\tan) = \left\{x \in \mathbb{R} : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

La funzione tangente è dispari su $\text{dom}(\tan)$ (in quanto, vedi l'osservazione 4.47, è quoziente di sin, dispari, e di cos, pari), π -periodica, ha come insieme immagine \mathbb{R} .

- La funzione *cotangente* è definita dall'espressione

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}.$$

Il suo dominio naturale è dato da tutti gli $x \in \mathbb{R}$ per i quali $\sin(x) \neq 0$. Poiché

$$\sin(\pi + k\pi) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

concludiamo che

$$\text{dom}(\cot) = \{x \in \mathbb{R} : x \neq \pi + k\pi \quad \forall k \in \mathbb{Z}\}.$$

La funzione cotangente è dispari su $\text{dom}(\cot)$ (in quanto, vedi l'osservazione 4.47, è quoziente di cos, pari, e di sin, dispari), π -periodica, ha come insieme immagine \mathbb{R} .

Funzioni trigonometriche inverse. Le funzioni sin, cos, tan e cot essendo periodiche sui loro domini, sono ben lontane dall'essere iniettive (e quindi invertibili) sui rispettivi domini. Tuttavia, esistono dei sottoinsiemi di tali domini, dette *regioni fondamentali*, con la proprietà che le restrizioni di sin, cos, tan e cot a questi sottoinsiemi sono iniettive (e quindi invertibili).

- Si conviene di considerare la restrizione di sin all'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Si verifica che

$$\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} \text{ è iniettiva, e ha come insieme immagine } [-1, 1].$$

Chiamiamo *arcoseno* la funzione inversa della restrizione di sin a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Quindi

$$\arcsin = \left(\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}\right)^{-1} : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],$$

è definito da

$$\arcsin(x) = y \Leftrightarrow \sin(y) = x$$

(cioè l'arcoseno di x è l'arco y il cui seno è x), e ha come insieme immagine $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Il suo grafico si ottiene considerando la curva simmetrica del grafico del seno, ristretto a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, rispetto alla retta $y = x$. La funzione arcsin è dispari.

- Si conviene di considerare la restrizione di \cos all'intervallo $[0, \pi]$. Si verifica che

$\cos|_{[0, \pi]}$ è iniettiva, e ha come insieme immagine $[-1, 1]$.

Chiamiamo *arcocoseno* la funzione inversa della restrizione di \cos a $[0, \pi]$. Quindi

$$\arccos = (\cos|_{[0, \pi]})^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi],$$

è definito da

$$\arccos(x) = y \Leftrightarrow \cos(y) = x$$

(cioè l'arcocoseno di x è l'arco y il cui coseno è x), e ha come insieme immagine $[0, \pi]$. Il suo grafico si ottiene considerando la curva simmetrica del grafico del coseno, ristretto a $[0, \pi]$, rispetto alla retta $y = x$.

- Si conviene di considerare la restrizione di \tan all'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Si verifica che

$\tan|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})}$ è iniettiva, e ha come insieme immagine \mathbb{R} .

Chiamiamo *arcotangente* la funzione inversa della restrizione di \tan a $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Quindi

$$\arctan = (\tan|_{(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})})^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right),$$

è definita da

$$\arctan(x) = y \Leftrightarrow \tan(y) = x$$

(cioè l'arcotangente di x è l'arco y la cui tangente è x), e ha come insieme immagine $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Il suo grafico si ottiene considerando la curva simmetrica del grafico della tangente, ristretta a $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, rispetto alla retta $y = x$. La funzione \arctan è dispari.

- Si conviene di considerare la restrizione di \cot all'intervallo $(0, \pi)$. Si verifica che

$\cot|_{(0, \pi)}$ è iniettiva, e ha come insieme immagine \mathbb{R} .

Chiamiamo *arcocotangente* la funzione inversa della restrizione di \cot a $(0, \pi)$. Quindi

$$\operatorname{arccot} = (\cot|_{(0, \pi)})^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow (0, \pi),$$

è definita da

$$\operatorname{arccot}(x) = y \Leftrightarrow \cot(y) = x$$

4.5.8 Le funzioni iperboliche

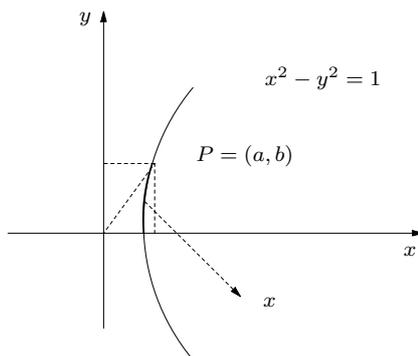
Definiamo le funzioni **seno iperbolico** e **coseno iperbolico** tramite le formule

$$\begin{aligned} \sinh : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \cosh : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \end{aligned}$$

Si parla di funzioni iperboliche poichè il generico punto P del ramo d'iperbole $x^2 - y^2 = 1$ che giace nel primo quadrante ha coordinate $(\cosh s, \sinh s)$ dove s misura la lunghezza dell'arco PD con $D = (1, 0)$ misurato positivamente salendo nel primo quadrante. Si ha dunque un perfetto parallelismo con le funzioni circolari.



Vale la relazione fondamentale

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

4.6 Operazioni algebriche su funzioni reali di variabile reale.

Definizione 4.46. Date $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$ con $D_f, D_g \subseteq \mathbb{R}$, supponiamo che $D := D_f \cap D_g \neq \emptyset$; chiamiamo:

- somma di f e g la funzione $(f + g) : D \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $(f + g)(x) := f(x) + g(x)$ per ogni $x \in D$;
- prodotto di f e g la funzione $f \cdot g : D \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $(f \cdot g)(x) := f(x) \cdot g(x)$ per ogni $x \in D$;
- quoziente di f e g la funzione $\frac{f}{g} : D \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $\frac{f}{g}(x) := \frac{f(x)}{g(x)}$ per ogni x appartenente all'insieme $D \setminus \{x \in D : g(x) = 0\}$.
- potenza di f con esponente g . Se $f(x) > 0$ per ogni $x \in D_f$ allora si chiama funzione potenza di f con esponente g la funzione $f^g : D \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f^g(x) := (f(x))^{g(x)}$.

In particolare, data $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$, chiamiamo *funzione reciproca* di f il quoziente $\frac{1}{f}$, con dominio $D_f \setminus \{x \in D_f : f(x) = 0\}$.

Osservazione 4.47 (Relazione fra parità/disparità e operazioni sulle funzioni). Siano $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni, e supponiamo che $D \subseteq \mathbb{R}$ sia simmetrico rispetto all'origine. Allora

- se f e g sono entrambe pari, anche le funzioni $f + g$, $f \cdot g$, e f/g sono pari. Verifichiamo per esempio che $f \cdot g^4$ sia pari: per ogni $x \in D$ si ha $(f \cdot g)(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)g(x) = (f \cdot g)(x)$.

⁴si ragiona allo stesso modo per f/g .

- se f e g sono entrambe dispari, le funzioni $f \cdot g$ e f/g sono pari, mentre la funzione $f + g$ è dispari. In effetti, per ogni $x \in D$ si ha $(f \cdot g)(-x) = f(-x)g(-x) = (-f(x))(-g(x)) = f(x)g(x) = (f \cdot g)(x)$, mentre $(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) = -f(x) - g(x) = -(f + g)(x)$.
- se f è pari e g è dispari, le funzioni $f \cdot g$ e f/g sono dispari. In effetti, per ogni $x \in D$ vale $(f \cdot g)(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)(-g(x)) = -f(x)g(x) = -(f \cdot g)(x)$. Non si può concludere nulla sulla funzione somma $f + g$. Ad esempio, la funzione $x \mapsto x^2 + x^3$ non è né pari né dispari.

4.7 Ordinamento delle funzioni reali.

Definizione 4.48. Consideriamo due funzioni $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : D_g \rightarrow \mathbb{R}$ con $D_f, D_g \subseteq \mathbb{R}$. Supponiamo che $D := D_f \cap D_g \neq \emptyset$. Diciamo che

- $f \leq g$ se $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in D$;
- $f < g$ se $f(x) < g(x)$ per ogni $x \in D$.

Osserviamo che la relazione d'ordine così introdotta non è totale⁵: per esempio, considerate le funzioni $f(x) := x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ e $g(x) := 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, è falso che $f \leq g$ su $D = \mathbb{R}$ e anche che $g \leq f$ su $D = \mathbb{R}$.

4.8 Traslazioni del grafico.

Sia $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ con $D_f \subseteq \mathbb{R}$ e sia $a > 0$. Introduciamo le seguenti traslate di f :

$$\begin{cases} g(x) := f(x - a) \quad \forall x \in D_g = \{x \in \mathbb{R} : x - a \in D_f\}, \\ h(x) := f(x + a) \quad \forall x \in D_h = \{x \in \mathbb{R} : x + a \in D_f\}, \\ k(x) := f(x) + a \quad \forall x \in D_k = D_f, \\ \ell(x) := f(x) - a \quad \forall x \in D_\ell = D_f. \end{cases}$$

Allora:

- il grafico di g si ottiene traslando orizzontalmente il grafico di f di a nella direzione positiva dell'asse delle x (cioè traslo il grafico di f a destra di a);
- il grafico di h si ottiene traslando orizzontalmente il grafico di f di a nella direzione negativa dell'asse delle x (cioè traslo il grafico di f a sinistra di a);
- il grafico di k si ottiene traslando verticalmente il grafico di f di a nella direzione positiva dell'asse delle y (cioè traslo il grafico di f verso l'alto di a);
- il grafico di ℓ si ottiene traslando verticalmente il grafico di f di a nella direzione negativa dell'asse delle y (cioè traslo il grafico di f verso il basso di a).

⁵ciò non sempre due funzioni sono confrontabili

4.9 Dilatazioni e contrazioni del grafico.

Sia $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ con $D_f \subseteq \mathbb{R}$ e siano $B > 1$, $0 < b < 1$, $A > 1$ e $0 < a < 1$. Introduciamo le seguenti dilatazioni/contrazioni di f :

$$\begin{cases} g(x) := Bf(x) & B > 1 \quad \forall x \in D_g = D_f, \\ h(x) := bf(x) & 0 < b < 1 \quad \forall x \in D_h = D_f, \\ k(x) := f(Ax) & A > 1 \quad \forall x \in D_k = \{x \in \mathbb{R} : Ax \in D_f\}, \\ \ell(x) := f(ax) & 0 < a < 1 \quad \forall x \in D_\ell = \{x \in \mathbb{R} : ax \in D_f\}. \end{cases}$$

Allora:

- il grafico di g è una dilatazione verticale di fattore B ;
- il grafico di h è una contrazione verticale di fattore b ;
- il grafico di k è una contrazione orizzontale di un fattore A ;
- il grafico di ℓ è una dilatazione orizzontale di fattore a .

4.10 Successioni

Richiamiamo solo la definizione di successione, come esempio di funzione di dominio \mathbb{N} , o un suo sottoinsieme della forma $\{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$ con $n_0 > 0$ intero. Non tratteremo in questo corso la teoria delle successioni.

Definizione 4.49. *Una successione a valori reali è una funzione*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{R} \\ n &\mapsto a_n = f(n). \end{aligned}$$

Una successione si indica con $\{a_n\}$ o $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

a_n è l'elemento n -esimo della successione $\{a_n\}$.

Fissato $n_0 \in \mathbb{N}$, se $\text{dom} f = \{n \in \mathbb{N} : n \geq n_0\}$, allora si scrive $\{a_n\}_{n \geq n_0}$.

Esempio 4.50. 1. $a_n = n$ ha dominio \mathbb{N} .

2. $a_n := \sqrt{n-2}$ ha dominio $\{n \in \mathbb{N} : n \geq 2\}$.

Capitolo 5

Limiti di funzioni

Introduciamo il concetto di limite in modo da comprendere limiti di funzioni definite su un qualsiasi sottoinsieme di \mathbb{R} .

5.1 Cenni di topologia

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e $r > 0$. Consideriamo

$$I_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R} : d(x, x_0) < r\} = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\} = \{x \in \mathbb{R} : x_0 - r < x < x_0 + r\},$$

l'intorno sferico aperto di centro x_0 .

Definizione 5.1. Sia $E \subseteq \mathbb{R}$.

1. Diciamo che $p \in \mathbb{R}$ è **interno** a E se:
$$\text{esiste } r > 0 \text{ tale che } I_r(p) \subseteq E.$$
2. Diciamo che $p \in \mathbb{R}$ è **d'accumulazione** per E se
$$\text{per ogni } r > 0 \text{ si ha } (E \setminus \{p\}) \cap I_r(p) \neq \emptyset;$$
3. Diciamo che $p \in \mathbb{R}$ è **punto isolato** di E se
$$\text{esiste } r > 0 \text{ tale che } E \cap I_r(p) = \{p\}.$$
4. Diciamo che $p \in \mathbb{R}$ è **aderente** ad E se p è d'accumulazione per E oppure p è un punto isolato di E .

Osservazione 5.2. Un punto di accumulazione (o aderente) **può non** appartenere ad E . Invece i punti interni o isolati appartengono sempre ad E .

Esempio 5.3. Sia $E =]-1, 1] \cup \{2\}$.

- Ogni punto p di $]-1, 1]$ è di accumulazione per E : in ogni intorno di p ci sono punti di E , diversi da p stesso.
- 2 è un punto isolato di E . Infatti, non è vero che in ogni suo intorno ci sono punti dell'insieme diversi da 2: si prenda, per esempio, come intorno $] \frac{3}{2}, \frac{5}{2} [$.
- $-1 \notin E$, ma è punto di accumulazione.

- $A = [-1, 1] \cup \{2\}$ è l'insieme dei punti aderenti di E .

Esempio 5.4. $E = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}, n \neq 0\}$.

- $0 \notin E$ è l'unico punto di accumulazione per E .
- E è costituito solo di punti isolati.

A partire dalle nozioni precedenti, possiamo associare ad E i seguenti insiemi.

Definizione 5.5. 1. Diciamo **parte interna** di E l'insieme

$$\text{int}(E) := \{p \in E : p \text{ \u00e9 interno ad } E\}.$$

2. Diciamo **chiusura** di E l'insieme

$$\overline{E} := \{p \in \mathbb{R} : p \text{ \u00e9 aderente ad } E\}.$$

3. Diciamo **bordo** di E l'insieme $\partial E := \overline{E} \setminus \text{int}(E)$.

Abbiamo chiaramente che

$$\text{int}(E) \subseteq E \subseteq \overline{E}.$$

Nel seguito saranno utili gli insiemi aperti e gli insiemi chiusi.

Definizione 5.6 (Insiemi aperti e insiemi chiusi). Siano $E, C \subseteq \mathbb{R}$.

- Diciamo che E \u00e9 **aperto** se ogni suo punto \u00e9 interno ad E , cio\u00e9 se $E = \text{int}(E)$.
- Diciamo che C \u00e9 **chiuso** se contiene tutti i suoi punti aderenti, cio\u00e9 se $C = \overline{C}$.

Si pu\u00f2 verificare che E \u00e9 aperto se e solo se il suo complementare $\mathbb{R} \setminus E$ \u00e9 chiuso.

5.2 Definizioni

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale definita in A .

Sia x_0 un punto di accumulazione di A (i.e., $\forall r > 0, I_r(x_0) \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$).

Sia $L \in \mathbb{R}$.

Definizione 5.7. Diremo che la funzione f tende al numero L per $x \rightarrow x_0$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 : \quad \forall x \in A, \quad 0 < |x - x_0| \leq \delta_\varepsilon, (x \neq x_0) \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| \leq \varepsilon.$$

Il numero L si dice il limite di f per $x \rightarrow x_0$, e si scrive $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$.

Osservazione 5.8. Nella definizione sopra, non si richiede che la disuguaglianza $|f(x) - L| \leq \varepsilon$ sia soddisfatta per $x = x_0$. Infatti, si impone $x \neq x_0$ perch\u00e9 non vogliamo che il valore di f in x_0 influenzi il limite.

La Definizione 5.7 pu\u00f2 essere riformulata in termini di intorni nel seguente modo: si ha

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ se, per ogni intorno $J_\varepsilon(L)$ di L esiste un intorno $I_{\delta_\varepsilon}(x_0)$ di x_0 , tale che per ogni $x \neq x_0, x \in I_{\delta_\varepsilon}(x_0) \cap A$, si abbia $f(x) \in J_\varepsilon(L)$.

In altre parole:

$$f(I_{\delta_\varepsilon}(x_0) \cap A \setminus \{x_0\}) \subseteq J_\varepsilon(L).$$

Osservazione 5.9. Nella Definizione 5.7 abbiamo usato le disuguaglianze con il \leq , dunque la notazione $J_\varepsilon(L)$ e $I_{\delta_\varepsilon}(x_0)$ si riferisce in questo caso ad intorni chiusi. La definizione di limite può essere data in modo del tutto equivalente usando le disuguaglianze strette e quindi usando intorni aperti, oppure anche facendo tutte le combinazioni possibili di \leq e $<$.

Esempio 5.10 (Limite notevole). Dimostriamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Sia $0 < x < \pi/2$, e nel cerchio di raggio 1 si considerino l'arco x e i segmenti di lunghezza $\sin x$ e $\tan x$. Si ha

$$0 < \sin x < x < \tan x,$$

e quindi, dividendo per $\sin x$ e invertendo,

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Quest'ultima relazione resta valida anche per $-\pi/2 < x < 0$, dato che i suoi termini restano invariati se si scrive $-x$ al posto di x ; da essa segue

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2 \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right) < \frac{x^2}{2},$$

e in definitiva

$$\left| 1 - \frac{\sin x}{x} \right| < \frac{x^2}{2},$$

cosicché, fissato $\varepsilon > 0$, se $0 < |x| \leq \delta(\varepsilon) = \sqrt{2\varepsilon}$, si ha

$$\left| 1 - \frac{\sin x}{x} \right| \leq \varepsilon.$$

Esempio 5.11 (Un secondo limite notevole). Sia $a > 0$, $a \neq 1$. Si può dimostrare che vale

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a.$$

Nella Definizione 5.7 si è supposto che sia il punto x_0 sia il numero L siano reali. Vogliamo ora estendere la definizione anche al caso in cui uno dei due, o entrambi, siano infiniti.

1. caso : x_0 reale e L infinito.

Definizione 5.12. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$

$$\forall N > 0 \quad \exists \delta_N > 0 : \quad \forall x \in A, \quad 0 < |x - x_0| \leq \delta_N, (x \neq x_0) \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq N.$$

Definizione 5.13. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$

$$\forall N > 0 \quad \exists \delta_N > 0 : \quad \forall x \in A, \quad 0 < |x - x_0| \leq \delta_N, (x \neq x_0) \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq -N.$$

2. caso : x_0 infinito e L reale.

Definizione 5.14. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M_\varepsilon > 0 : \quad \forall x \in A, \quad x \geq M_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| \leq \varepsilon.$$

Definizione 5.15. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M_\varepsilon > 0 : \quad \forall x \in A, \quad x \leq -M_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| \leq \varepsilon.$$

3. caso : x_0 infinito e L infinito.

Definizione 5.16. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$

$$\forall N > 0 \quad \exists M_N > 0 : \quad \forall x \in A, \quad x \geq M_N \quad f(x) \geq N.$$

Definizione 5.17. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$

$$\forall N > 0 \quad \exists M_N > 0 : \quad \forall x \in A, \quad x \geq M_N \quad f(x) \leq -N.$$

Definizione 5.18. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$

$$\forall N > 0 \quad \exists M_N > 0 : \quad \forall x \in A, \quad x \leq -M_N \quad f(x) \geq N.$$

Definizione 5.19. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$

$$\forall N > 0 \quad \exists M_N > 0 : \quad \forall x \in A, \quad x \leq -M_N \quad f(x) \leq -N.$$

Esempio 5.20 (Un terzo limite notevole). Si può dimostrare che vale

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

dove e è il numero compreso fra 2 e 3 ed è detto *Numero di Nepero*.

Usando la retta reale estesa $\overline{\mathbb{R}}$, le definizioni sopra scritte possono essere unificate in un'unica definizione. Occorre dare la nozione di intorno di $+\infty$ e $-\infty$ e di punto di accumulazione per un insieme non limitato superiormente o inferiormente. Ricordiamo che:

- Per ogni $M \in \mathbb{R}^+$, un intorno di $+\infty$ di estremo inferiore M , è l'intervallo aperto e superiormente illimitato

$$I_M(+\infty) =]M, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x > M\}.$$

Analogamente,

- intorno di $-\infty$ di estremo superiore $-M$ è

$$I_M(-\infty) =]-\infty, -M[= \{x \in \mathbb{R} : x < -M\}.$$

Definizione 5.21. Sia $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Diciamo che

- $+\infty$ è d'accumulazione per E se
per ogni $M > 0$ si ha $E \cap]M, +\infty[\neq \emptyset$;
- $-\infty$ è d'accumulazione per E se
per ogni $M > 0$ si ha $E \cap]-\infty, -M[\neq \emptyset$.

Esempio 5.22. Sia $E = \mathbb{N}$ (è costituito solo da punti isolati.)
L'unico punto di accumulazione per \mathbb{N} è $+\infty$: in ogni suo intorno ci sono dei numeri naturali.
Analogamente, i punti di accumulazione per \mathbb{Z} sono $+\infty$ e $-\infty$.

Possiamo ora riformulare la nozione di limite di tutti i vari casi trattati sopra in un'unica definizione.

Definizione 5.23. Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Siano $L, x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, con x_0 punto di accumulazione per A . Si ha $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \Leftrightarrow$

$$\forall \text{ intorno } J \text{ di } L, \exists \text{ un intorno } I \text{ di } x_0 \text{ tale che } \forall x_0 \neq x \in I \cap A, \\ \text{allora } f(x) \in J.$$

Nella definizione di limite 5.23 è essenziale "potersi avvicinare" indefinitamente al punto di accumulazione x_0 (rispetto al quale si fa il limite) dell'insieme A di definizione di f , rimanendo sempre in A .

Esempio 5.24. Consideriamo $f(x) = \sqrt{x^2(x-2)}$.

Risulta $A = \text{dom} f = \{0\} \cup [2, +\infty[$.

- ▶ Ha senso calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2(x-2)}$.
- ▶ NON ha senso calcolare $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x^2(x-2)}$, poichè non ci si può avvicinare a $x = 0$, rimanendo nel $\text{dom} f$.
- ▶ Si osservi che $0 \in \text{dom} f$, mentre $+\infty \notin \text{dom} f$.

Concludiamo questa sezione con la definizione di funzione infinitesima.

Definizione 5.25. Una funzione f tale che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ si dice infinitesima per $x \rightarrow x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.

Notazione: f infinitesimo per $x \rightarrow x_0$ si scrive $f = o(1)$ per $x \rightarrow x_0$.

5.3 Limite destro e sinistro

Definizione 5.26. Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$. Si supponga che x_0 sia di accumulazione per l'insieme $A \cap]x_0, +\infty[$. Se esiste il limite per $x \rightarrow x_0$ della restrizione di f a $A \cap]x_0, +\infty[$, allora tale valore è detto LIMITE DESTRO di f in x_0 , e lo si indica con il simbolo

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x).$$

Osservazione 5.27. La Definizione 5.26 può venire riscritta con il linguaggio degli intorni. Si faccia però attenzione a prendere *intorni 'destri'* di x_0 (cioè insiemi del tipo $I \cap]x_0, +\infty[$ con I intorno di x_0). Per esempio per $L \in \overline{\mathbb{R}}$, possiamo dire che

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$$

se e soltanto se

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in]x_0, x_0 + \delta[\cap \text{dom} f \Rightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon.$$

Osservazione 5.28. Allo stesso modo si definisce il *LIMITE SINISTRO* di f in x_0 , che si denota con $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ prendendo la restrizione di f a $\text{dom} f \cap]-\infty, x_0[$.

Esempio 5.29. Consideriamo la funzione *segno*

$$\text{sign} : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{definita da} \quad \text{sign}(x) := \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & x > 0, \\ -1 & x < 0 \end{cases}.$$

Si vede immediatamente che $\lim_{x \rightarrow 0^+} \text{sign}(x) = 1$, mentre $\lim_{x \rightarrow 0^-} \text{sign}(x) = -1$. D'altra parte, non esiste il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \text{sign}(x)$: intuitivamente, ciò è proprio dovuto al fatto che $f(x)$ tende a 1 per $x \rightarrow 0^+$, e $f(x)$ tende a -1 per $x \rightarrow 0^-$.

Quello che accade per la funzione *sign* è il prototipo di una situazione più generale: **il limite per $x \rightarrow x_0$ esiste se e solo se il limite destro e il limite sinistro esistono e sono uguali**. In tal caso, il valore comune dei limiti destro e sinistro fornisce il valore del limite. La seguente proposizione fornisce il legame fra la nozione di limite e limiti destro e sinistro.

Proposizione 5.30.

$$(I) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$$

$$\Updownarrow$$

$$(II) \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L \quad \boxed{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L.$$

Dimostrazione. (I) \Rightarrow (II): fissato ϵ (oppure $M > 0$ se il limite è infinito) il δ che va bene nella definizione di limite va bene anche nelle definizioni di limite destro e sinistro.

(II) \Rightarrow (I): fissato ϵ (oppure $M > 0$ se il limite è infinito) si trova δ' (rispettivamente δ'') tale che se $x \in]x_0 - \delta', x_0[\cap \text{dom} f$ (rispettivamente $x \in]x_0, x_0 + \delta''[\cap \text{dom} f$), allora $|f(x) - L| \leq \epsilon$ (rispettivamente $|f(x)| \geq M$.) Prendendo $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$, questo va bene nella definizione di limite. \square

5.4 Asintoti

Asintoti orizzontali. Se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$, il grafico di f si avvicina arbitrariamente alla retta di equazione $y = L$ per $x \rightarrow +\infty$: in questo caso, si dice che *la retta di equazione $y = L$ è un asintoto orizzontale per $\text{graf}(f)$ a $+\infty$* . Analogamente, se $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$, *la retta di equazione $y = L$ è un asintoto orizzontale per $\text{graf}(f)$ a $-\infty$* .

Asintoti verticali. Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$, il grafico di f si avvicina arbitrariamente alla retta di equazione $x = x_0$ per x sufficientemente vicino a x_0 : in questo caso, si dice che *la retta di equazione $x = x_0$ è un asintoto (eventualmente destro/sinistro, a seconda che si consideri un limite destro/sinistro) verticale per $\text{graf}(f)$.*

Asintoti obliqui. Introduciamo la nozione di asintoto obliquo (che fornisce delle informazioni più precise sul comportamento di funzioni che, all'infinito, tendono a $+\infty$ o a $-\infty$) solo nel caso di limiti a $+\infty$; le definizioni e i risultati che daremo si estendono in modo immediato al caso di limiti a $-\infty$.

Definizione 5.31. Sia $f : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ e supponiamo che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, o che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$. Diciamo che la retta di equazione $y = mx + q$, con $m, q \in \mathbb{R}$ e $m \neq 0$, è un asintoto obliquo per $\text{graf}(f)$ per $x \rightarrow +\infty$ se

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx - q) = 0.$$

Graficamente, questo significa che il grafico di f si avvicina arbitrariamente retta $y = mx + q$ per x sufficientemente grande. Chiaramente, si avrà $m > 0$ se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ e $m < 0$ se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

Osservazione 5.32. Osserviamo che non sempre una funzione che tende a $\pm\infty$ per $x \rightarrow +\infty$ ammette un asintoto obliquo. Per esempio, per ogni $a > 1$ la funzione esponenziale $f(x) = a^x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ non ammette alcun asintoto obliquo per $x \rightarrow +\infty$: intuitivamente, questo accade perché per $x \rightarrow +\infty$ la funzione esponenziale tende a $+\infty$ più velocemente di qualsiasi funzione potenza.

Diamo ora delle condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di un asintoto obliquo.

Teorema 5.33. Sia $f : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ e supponiamo che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, oppure che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$. Allora, la retta $y = mx + q$ ($m \neq 0$) è un asintoto obliquo per $\text{graf}(f)$ per $x \rightarrow +\infty$ se e solo se valgono le seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} \exists \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0, \\ \exists \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = q. \end{aligned}$$

Operativamente, data una funzione $f : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$, per la ricerca di un eventuale asintoto obliquo si procede in questo modo:

- si calcola $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$: se tale limite esiste, finito, ed è uguale a una costante m non nulla, allora m sarà il coefficiente angolare dell'eventuale asintoto obliquo;
- si calcola $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx)$: se tale limite esiste ed è finito, allora il suo valore individua l'ordinata all'origine dell'asintoto obliquo.

Esempio 5.34. Consideriamo la funzione

$$f(x) := \frac{3}{4}x - \frac{\cos^2(x)}{e^x} + \arctan(x) - \frac{\sin(x)}{x} \quad \forall x \neq 0.$$

Osserviamo che

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos^2(x)}{e^x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \cos^2(x) \cdot \left(\frac{1}{e}\right)^x = 0, & \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) &= \frac{\pi}{2}, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x} &= 0, \end{aligned} \quad (5.1)$$

ove il calcolo del primo limite è giustificato (vedi il Corollario 5.42) dal fatto che la funzione $f_1(x) = \cos^2(x)$ è limitata su \mathbb{R} , mentre $f_2(x) = (1/e)^x$ è infinitesima per $x \rightarrow +\infty$. Combinando i limiti in (5.1) con il fatto che $\frac{3}{4}x \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow +\infty$ e usando i risultati sull'estensione dell'algebra dei limiti, concludiamo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

Per verificare l'esistenza di un eventuale asintoto obliquo, calcoliamo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{4} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos^2(x)}{xe^x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\arctan(x)}{x} - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x^2} = \frac{3}{4},$$

in quanto gli ultimi tre limiti sono uguali a 0 perchè prodotti di funzioni limitate per funzioni infinitesime. Infine, calcoliamo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \frac{3}{4}x \right) = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos^2(x)}{e^x} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

Allora, grazie al Teorema 5.33 concludiamo che la retta $y = \frac{3}{4}x + \frac{\pi}{2}$ è asintoto obliquo per $\text{graf}(f)$ per $x \rightarrow +\infty$. **Esercizio!:** dimostrare che la retta $y = \frac{3}{4}x - \frac{\pi}{2}$ è asintoto obliquo per $\text{graf}(f)$ per $x \rightarrow -\infty$.

5.5 Primi teoremi sui limiti

Dalla definizione di limite seguono i seguenti teoremi.

Teorema 5.35 (Unicità). *Sia x_0 di accumulazione per $\text{dom}f$. Se $f(x) \rightarrow L$ e $f(x) \rightarrow L'$ per $x \rightarrow x_0$, allora $L = L'$.*

Dimostrazione. Dimostriamo per semplicità il teorema nel caso $x_0, L, L' \in \mathbb{R}$.

Supponiamo $L \neq L'$. Sia $\frac{|L-L'|}{2} > \varepsilon > 0$. Si ha

1. $\exists \delta > 0: \forall x_0 \neq x \in \text{dom}f$ con $|x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon$.
2. $\exists \delta' > 0: \forall x_0 \neq x \in \text{dom}f$ con $|x - x_0| \leq \delta' \Rightarrow |f(x) - L'| \leq \varepsilon$.

Quindi $\forall x \neq x_0$ con $|x_0 - x| \leq \min\{\delta, \delta'\}$ si ha

$$|L - L'| \leq |L - f(x)| + |f(x) - L'| \leq 2\varepsilon < |L - L'|.$$

Assurdo. □

Definizione 5.36. 1. Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Diciamo che f è limitata in E se

$$\exists M > 0 : |f(x)| \leq M \quad \forall x \in E,$$

ossia

$$\exists M > 0 : -M \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in E.$$

2. Diciamo che f è limitata superiormente in E se

$$\exists M > 0 : f(x) \leq M \quad \forall x \in E.$$

3. Diciamo che f è limitata inferiormente in E se

$$\exists m > 0 : f(x) \geq m \quad \forall x \in E.$$

Osservazione 5.37. Dalle definizioni sopra si ottiene che una funzione limitata è limitata sia superiormente che inferiormente, con $m = -M$.

Conseguenza immediata della definizione di limite sono i seguenti teoremi.

Teorema 5.38 (Limitatezza locale). *Se la funzione f ha limite finito in x_0 , allora esiste un intorno U di x_0 tale che f è limitata in $U \setminus \{x_0\} \cap \text{dom } f$.*

Teorema 5.39 (Permanenza del segno). *Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L > 0$, allora esiste un intorno U di x_0 tale che*

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in U \setminus \{x_0\} \cap \text{dom } f.$$

Dimostrazione. Dalla definizione di limite, sia J un intorno di L costituito solo da numeri positivi (ad esempio $J = J_L(L)$ se L è finito, $J = J_0(+\infty)$ se $L = +\infty$). Per la definizione di limite, esisterà un intorno U di x_0 , tale che per ogni $x \in U \setminus \{x_0\}$ si ha $f(x) \in J$, e dunque $f(x) > 0$. \square

Teorema 5.40 (Teorema del confronto). *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e siano $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione di A . Supponiamo che f e g ammettano limite per $x \rightarrow x_0$ e che $f \leq g$ in A (ossia $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in A$). Allora*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

Teorema 5.41 (Teorema dei due carabinieri). *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e siano $f, g, h : A \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione di A . Supponiamo che per ogni $x \in A$ si abbia*

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x).$$

Se $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L$, allora anche f ammette limite per $x \rightarrow x_0$ e si ha $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$.

Questo teorema ha un'immediata interpretazione grafica: grazie all'ipotesi $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$, il grafico di f è compreso fra i grafici di h e di g (i "due carabinieri"): si vede subito, allora, che se per $x \rightarrow x_0$ h e g tendono a L , anche f è forzata a tendere a L .

Infine, enunciamo un corollario del Teorema dei due carabinieri.

Corollario 5.42. *Siano $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 un punto di accumulazione per A , e sia I un intorno di x_0 . Supponiamo che:*

- f sia limitata in $I \setminus \{x_0\}$, cioè esista $M > 0$ tale che

$$|f(x)| \leq M \quad \forall x \in I \setminus \{x_0\} \cap A,$$

- $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$.

Allora esiste $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$.

In altri termini, questo risultato afferma che il prodotto di una funzione limitata per una funzione infinitesima è una funzione infinitesima.

Esempio 5.43. Si ha che

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0. \quad (5.2)$$

Innanzitutto osserviamo che, a priori, non è neppure chiaro che tale limite esista: infatti, esiste il limite $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$, ma

$$\nexists \lim_{x \rightarrow 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right). \quad (5.3)$$

(la funzione $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ oscilla sempre più velocemente fra i valori 1 e -1).

Quindi non è possibile applicare la regola sul limite del prodotto fra due funzioni alla funzione prodotto $g(x) := x^2 \sin(1/x)$ per ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Utilizzando il Corollario 5.42, invece si può ragionare velocemente così: la funzione $\sin(1/x)$ è limitata, infatti $-1 \leq \sin(1/x) \leq 1$ per ogni $x \neq 0$, mentre la funzione x^2 è infinitesima. Allora il prodotto $x^2 \sin(1/x)$ è infinitesimo, ossia vale (5.2).

Questo si può vedere anche come diretta conseguenza del Teorema dei due carabinieri ragionando così: ripartiamo da $-1 \leq \sin(1/x) \leq 1$ per ogni $x \neq 0$: allora

$$-x^2 \leq x^2 \sin(1/x) \leq x^2 \quad \forall x \neq 0,$$

quindi, applicando il Teorema dei due carabinieri concludiamo la (5.2).

Dalla definizione di limite si deducono regole di calcolo per i limiti di funzioni. Ricordiamo come si comportano le operazioni di somma, prodotto e divisione fra numeri reali e i simboli $\pm\infty$, dalle quali si dedurrà poi il calcolo dei limiti.

Definizione 5.44. *Definiamo*

per la somma:

$$\begin{aligned} x + (+\infty) &= (+\infty) + x = +\infty, & x + (-\infty) &= (-\infty) + x = -\infty, & \forall x \in \mathbb{R} \\ (+\infty) + (+\infty) &= +\infty, & (-\infty) + (-\infty) &= -\infty, \end{aligned}$$

per il prodotto:

$$\begin{aligned} x \cdot (+\infty) &= +\infty, & x \cdot (-\infty) &= -\infty, & \forall x \in \mathbb{R}^+, \\ x \cdot (+\infty) &= -\infty, & x \cdot (-\infty) &= +\infty, & \forall x \in \mathbb{R}^-, \\ (+\infty)(-\infty) &= -\infty, & (-\infty)(-\infty) &= +\infty, & (+\infty)(+\infty) &= +\infty, \end{aligned}$$

per la divisione:

$$\begin{aligned} \frac{x}{\pm\infty} &= 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, & \frac{x}{0} &= \infty, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ \frac{+\infty}{x} &= +\infty, & \frac{-\infty}{x} &= -\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+, \\ \frac{+\infty}{x} &= -\infty, & \frac{-\infty}{x} &= +\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}^-. \end{aligned}$$

Riguardo all'ordine:

$$-\infty \leq x \leq +\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

In generale non si può concludere nulla nei casi che non rientrano nella definizione sopra: tali casi sono le cosiddette *forme indeterminate*

$$(+\infty) + (-\infty), \quad 0 \cdot (\pm\infty), \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad \infty^0, \quad 0^0, \quad 1^\infty.$$

Teorema 5.45 (Algebra dei limiti). *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e siano $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione di A . Allora*

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x), \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \lambda f(x) &= \lambda \lim_{x \rightarrow x_0} f(x), \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \lim_{x \rightarrow x_0} g(x), \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}, \end{aligned}$$

non appena esistono i limiti a secondo membro e quando le operazioni che compaiono al secondo membro non comportino l'insorgere di forme indeterminate.

Risultati analoghi si hanno quando uno o ambedue i limiti sono infiniti. Usando le regole che coinvolgono somma e prodotto con $\pm\infty$ si dimostra in questo caso che se per $x \rightarrow x_0$:

1. se $f \rightarrow +\infty$ e g è limitata inferiormente, allora $f + g \rightarrow +\infty$,
2. se $f \rightarrow -\infty$ e g è limitata superiormente, allora $f + g \rightarrow -\infty$,
3. se $f \rightarrow +\infty$ e $g \rightarrow L > 0$, allora $fg \rightarrow +\infty$,
4. se $f \rightarrow +\infty$ e $g \rightarrow L < 0$, allora $fg \rightarrow -\infty$,
5. se $f \rightarrow -\infty$ e $g \rightarrow L > 0$, allora $fg \rightarrow -\infty$,
6. se $f \rightarrow -\infty$ e $g \rightarrow L < 0$, allora $fg \rightarrow +\infty$,
7. se $f \rightarrow +\infty$ (oppure se $f \rightarrow -\infty$), allora $\frac{1}{f} \rightarrow 0$,
8. Se $f \rightarrow 0$ e $f > 0$ ($f < 0$), allora $\frac{1}{f} \rightarrow +\infty$ ($-\infty$).

Osservazione 5.46. Attenzione che se $f \rightarrow 0$ (oscillando) e $f \neq 0$, allora la funzione $\frac{1}{f}$ può non avere limite. Per esempio $f(x) = \sin x$ è tale che $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$, ma non esiste il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{f} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sin x}$.

Il teorema di cui sopra dà informazioni relative all'algebra dei limiti a patto che non si verifichino casi di forme indeterminate: in questo caso non si è in grado di ottenere una risposta veloce, ma bisogna operare per altre vie.

Il seguente esempio fa vedere come, nel caso si verifichi la forma indeterminata $(-\infty) + (+\infty)$ in corrispondenza a due funzioni f e g , tali che $f \rightarrow -\infty$ e $g \rightarrow +\infty$, non sia possibile determinare a priori la natura della funzione somma $f + g$: la forma indeterminata va studiata caso per caso.

Esempio 5.47. Consideriamo $x_0 = +\infty$. Siano f e g due funzioni tali che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g = +\infty.$$

Allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f + g = -\infty + \infty \quad \text{FORMA INDETERMINATA.}$$

Vediamo però che a secondo di come sono fatte f e g la forma indeterminata si risolve dando risultati diversi nei vari casi.

1. $f(x) = -x, g(x) = x.$

Allora $f + g = -x + x = 0$. Dunque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f + g = 0$.

2. $f(x) = -x, g(x) = x + \sin x.$

Allora $f + g = -x + x + \sin x = \sin x$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f + g$ NON esiste

3. $f(x) = -x, g(x) = \sqrt{x}.$

Allora $f + g = \sqrt{x}(-\sqrt{x} + 1)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f + g = -\infty$.

4. $f(x) = -x, g(x) = x^2.$

Allora $f + g = x(-1 + x)$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} f + g = +\infty$.

Analogamente tutte le altre forme indeterminate vanno studiate caso per caso.

Esempio 5.48. Calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{2x}$.

Primo tentativo di risoluzione. Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 1) &= +\infty - 1 = +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x &= 2 \cdot (+\infty) = +\infty. \end{aligned}$$

Quindi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{2x} = \frac{+\infty}{+\infty} \quad \text{FORMA INDETERMINATA.}$$

□

Siamo arrivati ad una forma indeterminata: ciò vuol dire che dobbiamo cercare un modo per togliere l'indeterminazione e capire se la successione converge o no. Come risolvere il problema? Un metodo comodo è il *confronto asintotico* fra le funzioni.

5.6 Confronto asintotico

Date due funzioni f, g e dato $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione per i loro domini, siano f e g entrambe divergenti o infinitesime (cioè con limite uguale a zero) per $x \rightarrow x_0$. Vogliamo stabilire quale delle due tenda più rapidamente all'infinito o a zero.

Consideriamo il limite del loro rapporto, supponendo $g \neq 0$. Si possono verificare quattro casi:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} = \begin{cases} 0, & \boxed{\text{A}} \\ l \in \mathbb{R}, \quad l \neq 0, & \boxed{\text{B}} \\ \pm\infty, & \boxed{\text{C}} \\ \text{non esiste,} & \boxed{\text{D}} \end{cases}$$

Caso 1: $\lim_{x \rightarrow x_0} f = \lim_{x \rightarrow x_0} g = +\infty$ (oppure $-\infty$): f e g INFINITI vicino a x_0 .

Diciamo che:

1. f è un infinito di ORDINE **INFERIORE** a g se vale $\boxed{\text{A}}$;
2. f e g sono infinito dello **STESSO ORDINE** se vale $\boxed{\text{B}}$;
3. f è un infinito di ORDINE **SUPERIORE** a g se vale $\boxed{\text{C}}$;
4. f e g **NON** sono **CONFRONTABILI** se vale $\boxed{\text{D}}$.

Caso 2: $\lim_{x \rightarrow x_0} f = \lim_{x \rightarrow x_0} g = 0$: f e g INFINITESIMI vicino a x_0 .

Diciamo che:

1. f è un infinitesimo di ORDINE **SUPERIORE** a g se vale $\boxed{\text{A}}$;
2. f e g sono infinitesimi dello **STESSO ORDINE** se vale $\boxed{\text{B}}$;
3. f è un infinitesimo di ORDINE **INFERIORE** a g se vale $\boxed{\text{C}}$;
4. f e g **NON** sono **CONFRONTABILI** se vale $\boxed{\text{D}}$.

Osservazione 5.49. Se

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f}{g} = l \in \mathbb{R}, \quad l \neq 0$$

allora f e lg si dicono ASINTOTICHE e si scrive $f \sim lg$.

Osservazione 5.50. Attenzione: se $f_1 \sim g_1$ e $f_2 \sim g_2$, allora è falso che $(f_1 + f_2) \sim (g_1 + g_2)$. Per esempio, si ha

$$f \sim f, \quad -f \sim f$$

ma non è vero che $(f - f) \sim 2f$.

5.6.1 Confronto fra infiniti

Un primo esempio di “infiniti confrontabili” è dato dalle potenze.

Proposizione 5.51. Per $x \rightarrow +\infty$, x^p cresce più velocemente di x^q se $p > q > 0$, ossia

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^p}{x^q} = +\infty \quad \forall p > q > 0.$$

Questa prima osservazione consente di riuscire facilmente a risolvere forme di indeterminazione che contengono polinomi.

Esempio 5.52. Calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x}$.

Risoluzione. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x} = \frac{+\infty}{+\infty}$ FORMA INDETERMINATA. La forma di indeterminazione si chiarifica velocemente osservando che il grado del polinomio a numeratore è maggiore di quello del polinomio a denominatore e quindi, usando il confronto asintotico, tale limite vale $+\infty$. Tale limite può essere risolto in modo preciso semplificando x a numeratore e a denominatore:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty.$$

□

Esempio 5.53. Calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{2x}$.

Risoluzione. Anche in questo caso, usando il confronto asintotico, il limite vale $+\infty$. Per calcolare tale limite si deve raccogliere x elevato alla massima potenza a cui compare, sia a numeratore che a denominatore:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{2}.$$

Applicando ora l'algebra dei limiti, per $x \rightarrow \infty$ in ogni termine, si ha

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{2} = \frac{+\infty(1 - 0)}{2} = \frac{+\infty}{2} = +\infty.$$

□

In generale, per quozienti di polinomi in x vale la seguente proposizione.

Proposizione 5.54. Dati $P(x) = \alpha_p x^p + \alpha_{p-1} x^{p-1} + \dots + \alpha_0$ e $Q(x) = \beta_q x^q + \beta_{q-1} x^{q-1} + \dots + \beta_0$, con $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, $\alpha_p \neq 0$, $\beta_q \neq 0$ e $p, q \in \mathbb{N}^+$ si ha:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \begin{cases} \frac{\alpha_p}{\beta_q} & \text{se } p = q \\ +\infty & \text{se } p > q \text{ e } \alpha_p \beta_q > 0 \\ -\infty & \text{se } p > q \text{ e } \alpha_p \beta_q < 0 \\ 0 & \text{se } p < q. \end{cases}$$

La proprietà seguente riassume il comportamento asintotico di alcune funzioni importanti.

Proposizione 5.55. *Valgono i seguenti limiti:*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log^\beta x}{x^\alpha} = 0, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+, \quad \forall \beta \in \mathbb{R},$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{a^x} = 0, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+, \quad \forall a > 1.$$

Pertanto

a^x è un infinito di ordine **superiore** a x^α , $\forall \alpha \in \mathbb{R}^+$,
 x^α è un infinito di ordine **superiore** a $\log^\beta x$, $\forall \beta \in \mathbb{R}$.

Possiamo anche scrivere, per x sufficientemente grande, la serie di disuguaglianze

$$a^x \geq x^\alpha \geq \log^\beta x \quad \forall a > 1, \forall \alpha \in \mathbb{R}^+, \forall \beta \in \mathbb{R}.$$

5.6.2 Confronto fra infinitesimi

Il concetto di ordine di infinitesimo consente di capire bene quale sia la “parte importante” di una funzione. Ricordiamo ancora una volta le seguenti definizioni.

Definizione *Una funzione f tale che $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$ si dice infinitesima per $x \rightarrow x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$.*

Come abbiamo visto nella sezione 5.6, **Caso 2**, punto A, si ha:

Definizione 5.56. *Siano f, g due funzioni infinitesime per $x \rightarrow x_0$, con $g(x) \neq 0$ in un intorno di x_0 (eventualmente privato del punto x_0). Si dice che f è un infinitesimo di ordine superiore a g per $x \rightarrow x_0$, se*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0;$$

In tal caso scriviamo $f = o(g)$ e si legge f è o piccolo di g (o anche che f è trascurabile rispetto a g per $x \rightarrow x_0$).

Esempio 5.57. $\sin^2 x = o(x)$ dato che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \sin x = 0.$$

Esempio 5.58. $f(x) = x^4 = o(x^3)$ dato che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^3} = 0.$$

L'esempio sopra scritto rappresenta il prototipo del comportamento delle potenze: tutte le funzioni x^α , $\alpha > 0$, sono infinitesime per $x \rightarrow 0^+$, ma, al variare di α , ce ne sono però alcune “più piccole” di altre. Per esempio, la funzione x^2 è più piccola di x vicino a 0^+ (basta guardare il grafico delle funzioni elementari) e la relazione

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x} = 0$$

consente di dedurre proprio questa proprietà. Una buona misura per stabilire se una funzione (infinitesima) è “molto più piccola” di un'altra, al punto di essere trascurabile in confronto con l'altra, è appunto stabilire se il quoziente tende a zero..

Per le potenze, questo si può riassumere nella seguente proposizione.

Proposizione 5.59. Per $x \rightarrow 0^+$, x^p decresce più velocemente (o anche tende a zero più velocemente) di x^q se $p > q > 0$, ossia

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^p}{x^q} = 0 \quad \forall p > q > 0,$$

ossia $x^p = o(x^q)$ per ogni $p > q > 0$.

Osservazione 5.60 (Limiti per $x \rightarrow 0$ di funzioni razionali fratte.). Il confronto fra infinitesimi é molto utile per il calcolo di limiti per funzioni razionali fratte. Consideriamo una funzione razionale fratta data dal quoziente di due polinomi omogenei (cioè con termine noto nullo):

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x} \quad \forall x \in D_f.$$

Il limite $\lim_{x \rightarrow 0} P(x)/Q(x)$ dà luogo a una forma indeterminata del tipo $0/0$, che trattiamo raccogliendo, sia al numeratore sia al denominatore, il monomio in x di grado minimo.

Per esempio, supponiamo che $a_1 \neq 0$ e che $b_1 = 0$, ma $b_2 \neq 0$. Allora il termine di grado minimo al numeratore è x , mentre al denominatore è x^2 : in questo modo abbiamo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_2 x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \cdot (a_n x^{n-1} + a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1)}{x^2 \cdot (b_m x^{m-2} + b_{m-1} x^{m-3} + \dots + b_2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{a_1}{b_2} \frac{1}{x} = \pm \infty, \end{aligned}$$

ove avremo $+\infty$ o $-\infty$ a seconda del segno del quoziente a_1/b_2 . Allo stesso modo si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{a_1}{b_2} \frac{1}{x} = \pm \infty \quad \text{a seconda del segno di } \frac{a_1}{b_2},$$

mentre

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_2 x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a_1}{b_2} \frac{1}{x} = \pm \infty \quad \text{NON esiste.}$$

In generale, possiamo dare la seguente regola: siano

$$\begin{aligned} \bar{i} &\text{ l'indice corrispondente al monomio di grado minimo in } P(x), \\ \bar{j} &\text{ l'indice corrispondente al monomio di grado minimo in } Q(x). \end{aligned}$$

Allora

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{a_{\bar{i}} x^{\bar{i}}}{b_{\bar{j}} x^{\bar{j}}} = \begin{cases} 0 & \text{nel caso } \bar{i} > \bar{j}, \\ \frac{a_{\bar{i}}}{b_{\bar{j}}} & \text{nel caso } \bar{i} = \bar{j}, \\ \pm \infty, \text{ oppure non esiste se si ha } \lim_{x \rightarrow 0} & \text{nel caso } \bar{i} < \bar{j} \end{cases} \end{aligned}$$

(avremo $+\infty$ o $-\infty$ a seconda del segno del quoziente P/Q). In altri termini, **ai fini del calcolo del limite conta solo il rapporto fra il termine di grado minimo al numeratore e il termine di grado minimo al denominatore (che tendono a zero meno velocemente di tutti gli altri)**. Questo può essere rivisto anche con la teoria degli o piccoli.

Esempio 5.61. Si ha quindi che

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^5 - 3x^4 + 3x^3}{-6x^7 + 7x^8 - 2x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 + o(x^3)}{-2x^2 + o(x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3}{-2x^2} = 0, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^5 - 3x^2 + 3x}{x^6 + 3x^2 - 2x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x + o(x)}{-2x + o(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{-2x} = -\frac{3}{2}, \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - 6x^6 + 2x}{5x^5 - 3x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + o(x)}{-3x^2 + o(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{-3x^2} = -\frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \text{NONESISTE}.\end{aligned}$$

Osservazione 5.62 (Algebra degli “o piccoli”). Ricordiamo le principali regole di calcolo sugli “o piccoli”.

- $ko(f) = o(f)$
- $o(f) + o(f) = o(f)$
- $o(o(f)) = o(f)$
- $o(f + o(f)) = o(f)$
- $f \cdot o(g) = o(fg)$
- $o(f) \cdot o(g) = o(fg)$
- $f = o(g) \Rightarrow \frac{o(f)}{g} = o\left(\frac{f}{g}\right)$.

In particolare, nel caso in cui le funzioni che compaiono siano potenze positive di $(x - x_0)$ le formule sopra sono molto più leggibili. Nel caso $x_0 = 0$, per $\alpha, \beta > 0$ si ha per $x \rightarrow 0$

- $ko(x^\alpha) = o(x^\alpha)$
- $o(x^\alpha) + o(x^\alpha) = o(x^\alpha), \quad o(x^\alpha) + o(x^{\alpha+\beta}) = o(x^\alpha)$
- $o(o(x^\alpha)) = o(x^\alpha)$
- $o(x^\alpha + o(x^\alpha)) = o(x^\alpha)$
- $x^\alpha \cdot o(x^\beta) = o(x^{\alpha+\beta})$
- $o(x^\alpha) \cdot o(x^\beta) = o(x^{\alpha+\beta})$
- $\frac{o(x^{\alpha+\beta})}{x^\beta} = o(x^\alpha)$.

5.7 Limiti di funzioni monotone

Le funzioni monotone hanno uno speciale comportamento rispetto all'operazione di limite. Ricordiamo che: una funzione $f : \text{dom } f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ si dice

(i) monotona crescente se

$$\forall x, y \in \text{dom } f : x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y);$$

(ii) monotona decrescente se

$$\forall x, y \in \text{dom } f : x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y);$$

(ii) strettamente crescente o strettamente decrescente se le disuguaglianze sopra sono strette.

Teorema 5.63. *Sia f una funzione crescente e sia x_0 punto di accumulazione per $\text{dom } f$. Allora f ha limiti sinistro e destro finiti per $x \rightarrow x_0$ e si ha*

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \sup\{f(x) : x \in \text{dom } f, x < x_0\}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \inf\{f(x) : x \in \text{dom } f, x > x_0\}.$$

In modo analogo il teorema vale per funzioni decrescenti.

Osservazione 5.64. Il teorema precedente è di grande utilità nel calcolo di limiti di funzioni monotone. Per esempio:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} \log x = \log x_0$;
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$.

5.8 Funzioni continue

Definizione 5.65. *Una funzione f è CONTINUA in $x_0 \in \text{dom } f$ se*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap \text{dom } f \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

La definizione precedente esprime rigorosamente il fatto che f è continua se i suoi valori variano con continuità, cioè se a “piccole” variazioni della variabile indipendente x vicino a x_0 corrispondono “piccole” variazioni del valore $f(x)$.

Con la terminologia degli intorni, diciamo che f è continua in x_0 , se per ogni intorno J di $f(x_0)$ esiste un intorno U di x_0 tale che, per ogni $x \in U \cap \text{dom } f$, si abbia

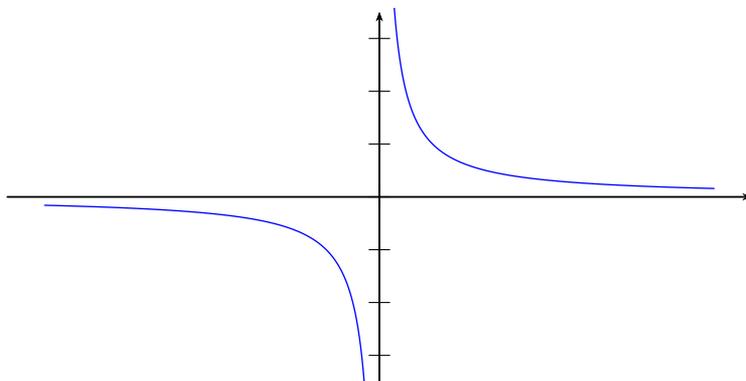
$$f(x) \in J,$$

o, in altre parole,

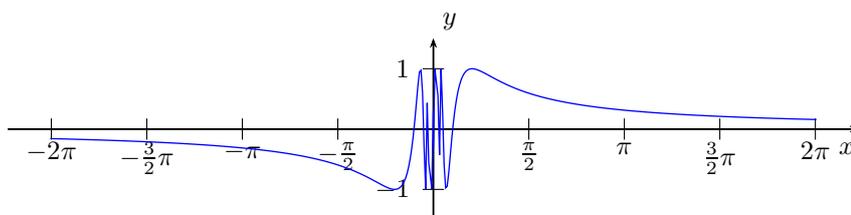
$$f(U \cap \text{dom } f) \subseteq J.$$

Definizione 5.66. *Una funzione f è detta CONTINUA se è continua in ogni punto del suo dominio.*

Esempio 5.67. $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ è continua (con dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$):



Esempio 5.68. $f : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ è continua (con dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$):



Osservazione 5.69. Dalla definizione di continuità in un punto x_0 , si ha che se x_0 è un punto isolato di $\text{dom } f$, allora f è continua in x_0 .

Infatti, $\exists \delta > 0$ tale che $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap \text{dom } f = \{x_0\}$. Tale δ verifica la definizione di continuità per ogni $\varepsilon > 0$.

Dunque, ogni funzione che ha punti isolati nel dominio, risulta sempre continua in tali punti.

Il concetto di limite e continuità sono legati dalla seguente proposizione che caratterizza la continuità, nei punti di accumulazione del dominio, tramite il limite.

Proposizione 5.70. Sia $x_0 \in \text{dom } f$. Se x_0 è un punto di accumulazione per $\text{dom } f$, allora:

$$f \text{ è continua in } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Si hanno gli stessi teoremi enunciati per i limiti di funzioni anche per la continuità.

In particolare:

Teorema 5.71. Somma, differenza, prodotto di funzioni f e g continue in x_0 sono continue in x_0 . Se $g \neq 0$ in un intorno di x_0 , allora anche $\frac{f}{g}$ è continua in x_0 .

Osservazione 5.72. Dal teorema sopra segue immediatamente che esistono numerose classi di funzioni continue, per esempio:

- i **polinomi** sono funzioni continue in ogni $x_0 \in \mathbb{R}$;
- le **funzioni razionali** sono continue in ogni punto del loro dominio.

La continuità è una proprietà stabile per composizione di funzioni.

Teorema 5.73 (Continuità della composizione). *Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Siano $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$. Se f è continua in x_0 e g è continua in $f(x_0) \in B$, allora $g \circ f$ è continua in x_0 .*

Dimostrazione. Per la continuità di g in $f(x_0)$: per ogni U intorno di $g(f(x_0))$ esiste un intorno W di $f(x_0)$ tale che $g(W \cap B) \subseteq U$.

Per la continuità di f in x_0 : in corrispondenza di W esiste un intorno V di x_0 tale che $f(V \cap A) \subseteq W \cap B$ e quindi

$$(g \circ f)(V \cap A) \subseteq U.$$

Ne segue che $g \circ f$ è continua in x_0 . □

Osservazione 5.74. Come conseguenza immediata di questo teorema si ha che, se $f(x)$ è continua in A , allora le funzioni

$$\sin(f(x)), \quad \cos(f(x)), \quad |f(x)|, \quad a^{f(x)}, \quad \log_a f(x) \quad (f(x) > 0), \dots$$

sono anch'esse continue in A .

Il teorema di composizione vale, più in generale, nella seguente forma:

Teorema 5.75 (Composizione di limiti). *Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Siano $f : A \rightarrow B$, $g : B \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0, y_0, L \in \overline{\mathbb{R}}$, tali che si abbia*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0, \quad \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = L.$$

Se è verificata una delle due condizioni seguenti:

(i) $\forall x \in A \setminus \{x_0\}$ si ha $f(x) \neq y_0$;

(ii) $y_0 \in B$ e g è continua in y_0 ,

allora

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = L.$$

Esempio 5.76. Il teorema sopra si applica nell'ipotesi (i) a limiti del tipo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1-x^2}{x}}.$$

Infatti

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1-x^2}{x}} = \lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x))$$

con $x_0 = +\infty$, $f(x) = \frac{1-x^2}{x}$ e $g(y) = e^y$. Osserviamo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x^2}{x} = -\infty := y_0 \quad (f(x) \neq y_0) \quad \text{e} \quad \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = \lim_{y \rightarrow -\infty} e^y = 0 := L.$$

Ora applicando il teorema sopra abbiamo che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1-x^2}{x}} = L = 0.$$

Esempio 5.77. Calcoliamo il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Ragioniamo nel modo seguente:

1. effettuiamo una sostituzione, ponendo $x = \frac{1}{y}$;
2. calcoliamo $\lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y$. Tale limite è un limite notevole; infatti abbiamo visto che

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e.$$

Come giustifichiamo questo procedimento? Usiamo il Teorema 5.75. Osserviamo che il limite che dobbiamo calcolare si può vedere come il risultato della composizione

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x))$$

con $x_0 = 0^+$, $f(x) = y = \frac{1}{x}$ (che vuol dire fare la sostituzione $x = \frac{1}{y}$) e $g(y) = \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y$. Appliciamo il Teorema 5.75:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty := y_0, \quad \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y = e := L.$$

Dal teorema sopra otteniamo che

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = L = e.$$

Esempio 5.78. Dall'esempio sopra, più in generale, segue che

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[1 + \frac{1}{f(x)}\right]^{f(x)} = e$$

se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$.

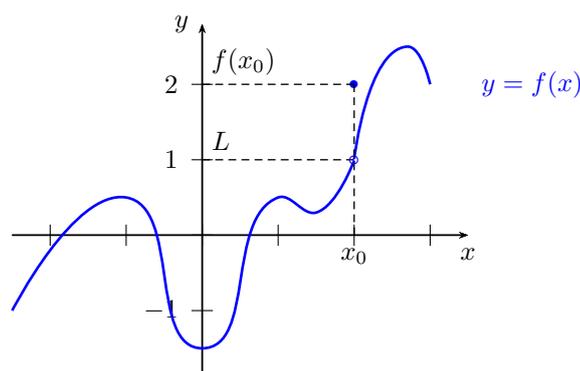
5.9 Punti di discontinuità

In questa sezione classifichiamo i punti di discontinuità di una funzione f , ossia i punti in cui una funzione f non risulta continua. Sottolineiamo il fatto che tali punti sono punti del dominio di f . Esistono 4 casi diversi di tipi di discontinuità:

- discontinuità eliminabile;
- punti di infinito;
- discontinuità di salto;
- discontinuità di seconda specie.

Tali discontinuità si classificano in questo modo. Sia $x_0 \in \text{dom } f$ e x_0 punto di accumulazione per $\text{dom } f$, allora si possono presentare i seguenti casi:

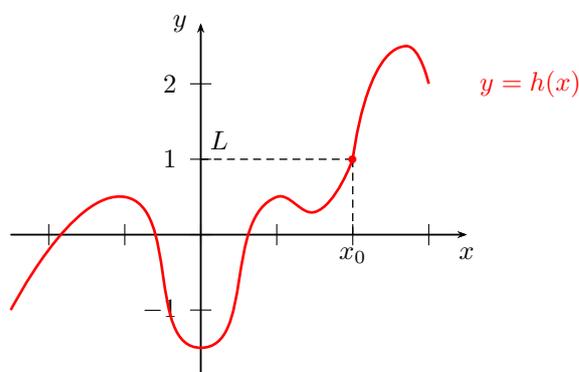
- 1 Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$ con $L \neq f(x_0)$, allora si dice che la funzione f presenta una **DISCONTINUITÀ ELIMINABILE** in x_0 .



In questa circostanza, la funzione definita da

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in \text{dom } f, x \neq x_0 \\ L & \text{se } x = x_0. \end{cases}$$

è continua in x_0 .



La funzione h sopra definita consente di “eliminare” la discontinuità della funzione f .

Esempio 5.79. La funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ ha in $x_0 = 0$ una discontinuità eliminabile. Infatti,

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \neq f(0) = 1.$$

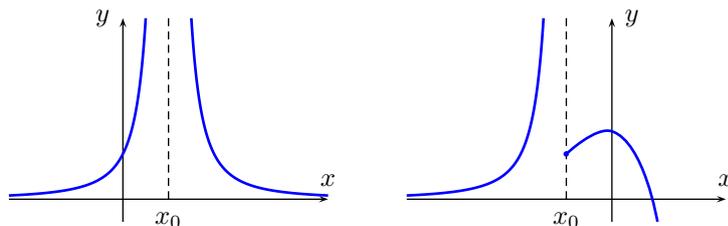
Si osservi che si può costruire la funzione

$$h(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

che è continua.

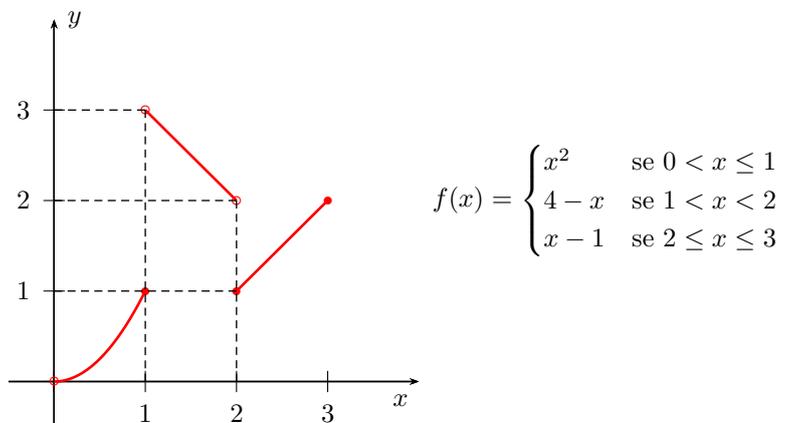
- 2] Se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, oppure se esistono i limiti destro e sinistro e (almeno) uno di questi è infinito (∞), allora si dice che x_0 è **PUNTO DI INFINITO**.

Ad esempio:



- 3] Se i limiti destro e sinistro esistono in \mathbb{R} ma sono **differenti** si dice che x_0 è **PUNTO DI SALTO**.

Ad esempio:



Osservazione 5.80. Nell'esempio sopra la funzione f è monotona a tratti: l'esempio tipico di funzioni che hanno salti è dato, appunto, dalle funzioni $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, monotone nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Infatti, per ogni $x_0 \in (a, b)$, esistono finiti i limiti

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x).$$

Ad esempio, se f è crescente, si ha

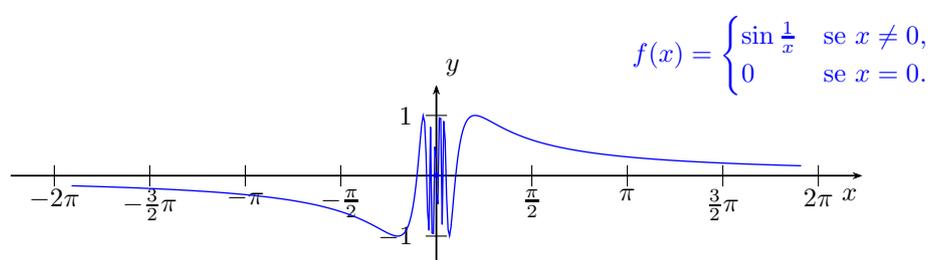
$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x).$$

È interessante ricordare inoltre le seguenti proprietà delle funzioni monotone:

- una funzione monotona su $[a, b]$ può avere al massimo una infinità numerabile di punti di discontinuità.
- Se una funzione monotona, definita in un intervallo, assume tutti i valori compresi fra l'inf e in sup, allora è continua.

4 Se (almeno) uno dei due limiti destro o sinistro non esiste, allora si dice che x_0 presenta una **DISCONTINUITÀ DI SECONDA SPECIE**.

Ad esempio:



5.10 Prime proprietà delle funzioni continue

Esattamente come nel caso dei limiti di funzioni, valgono i seguenti due teoremi: la differenza in questo caso è che le stime ottenute valgono in tutto l'intorno completo U di x_0 , non privato del punto x_0 .

Teorema 5.81 (Limitatezza locale). *Se la funzione f è continua in x_0 , allora esiste un intorno U di x_0 tale che f è limitata in $U \cap \text{dom}f$.*

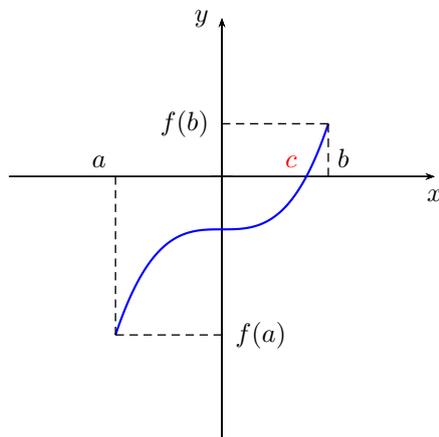
Teorema 5.82 (Permanenza del segno). *Se f è continua in x_0 e $f(x_0) > 0$, allora esiste un intorno U di x_0 tale che $f(x) > 0$ in $U \cap \text{dom}f$.*

Analogamente, se $f(x_0) < 0$, allora esiste un intorno U di x_0 tale che $f(x) < 0$ in $U \cap \text{dom}f$.

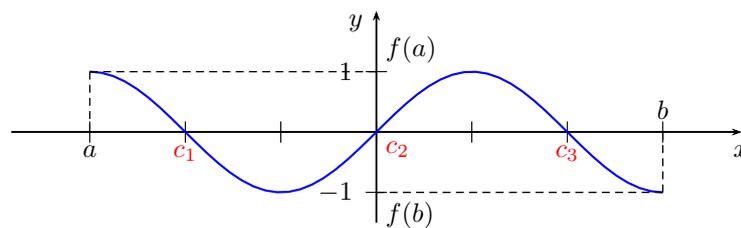
5.11 Funzioni continue su un intervallo

In questa sezione otteniamo i risultati più importanti relativi alle funzioni continue definite su un intervallo. Indicheremo con I un generico intervallo, i cui estremi possono essere finiti o non, e che possono appartenere o non appartenere a I . In alcuni casi sarà necessario che l'intervallo I sia chiuso e limitato, e allora lo indicheremo con $[a, b]$.

Teorema 5.83 (di Bolzano o 'degli zeri'). *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(a)f(b) < 0$. Allora esiste almeno un punto $c \in]a, b[$ tale che $f(c) = 0$.*



Il punto c del teorema non è in generale unico:



Dal teorema degli zeri, segue che, se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua in $[a, b]$ e preso $t \in \mathbb{R}$, se esistono due punti $x_1, x_2 \in [a, b]$ con $f(x_1) < t$ e $f(x_2) > t$, allora esiste ξ tale che $x_1 \leq \xi \leq x_2$ per cui $f(\xi) = t$.

Definizione 5.84. *Definiamo:*

1. *Estremo superiore di f , l'estremo superiore dell'immagine di f , ossia*

$$\sup f = \sup\{f(x) : x \in \text{dom } f\}.$$

2. *Estremo inferiore di f , l'estremo inferiore dell'immagine di f , ossia*

$$\inf f = \inf\{f(x) : x \in \text{dom } f\}.$$

3. *Massimo della funzione f , il massimo fra i valori assunti dalla funzione, ossia*

$$\max f = \max\{f(x) : x \in \text{dom } f\}.$$

Un punto x_0 in cui $f(x_0) = \max f$ si dice punto di massimo per f e quindi vale

$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in \text{dom } f.$$

4. *Minimo della funzione f , il minimo fra i valori assunti dalla funzione, ossia*

$$\min f = \min\{f(x) : x \in \text{dom } f\}.$$

Un punto x_0 in cui $f(x_0) = \min f$ si dice punto di minimo per f e quindi vale

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in \text{dom } f.$$

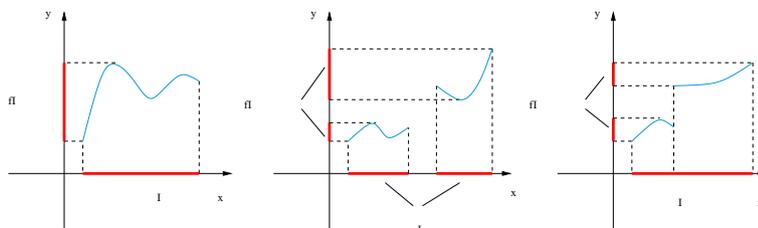
Si ha allora la seguente proposizione.

Proposizione 5.85. *Una funzione continua in un intervallo I assume tutti i valori compresi tra $\inf_I f$ e $\sup_I f$.*

Dal teorema sopra segue che l'immagine $f(I)$ è costituita dall'intervallo aperto $(\inf_I f, \sup_I f)$ più, eventualmente, uno o ambedue gli estremi. Si ha dunque il seguente teorema.

Teorema 5.86 (Dei valori intermedi). *Sia I intervallo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora $f(I)$ un intervallo.*

Esempio 5.87. Confrontare le ipotesi e la tesi del Teorema 5.86 con i seguenti esempi:



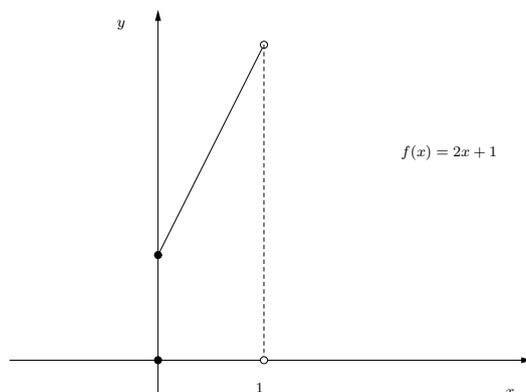
Veniamo ora ad un risultato importantissimo che risponde al problema dell'esistenza o meno di massimi e minimi per funzioni continue.

Teorema 5.88 (di Weierstrass). *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora f ha massimo e minimo.*

Osservazione 5.89. Tutte le ipotesi del teorema sono fondamentali per la validità della affermazione.

1. Se consideriamo ad esempio $I = [0, 1[$ e $f(x) = 2x + 1$ (funzione chiaramente continua su l'intervallo non chiuso $I = [0, 1[$), abbiamo subito che f non ammette massimo su I ma ammette invece minimo. Infatti il minimo è 1 ed è assunto in $x = 0$. Invece f "tende" ad assumere il suo valore massimo vicino a $x = 1$, che però non appartiene a I , ossia esiste il

$\sup_I f = 3$ ma non esiste $\max_I f$.

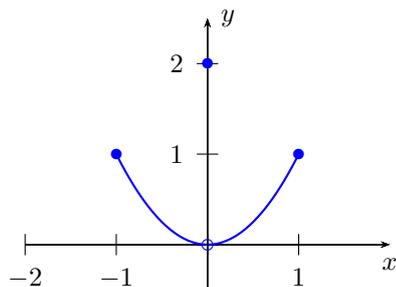


2. Se I è illimitato, può capitare che f non assuma il valore massimo perchè tende ad assumerlo in punti che “vanno all'infinito” come nel caso di $f(x) = \arctan x$, definita su $I = \mathbb{R}$.
3. Se f fosse discontinua, potrebbe verificarsi una situazione analoga alla seguente.

Sia

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{per } x \in [-1, 1] \setminus \{0\}, \\ 2 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

f **non** ha minimo, e $\inf f = 0$. $\max f = 2$ e 0 l'unico *punto di massimo*.



Il risultato seguente è un corollario immediato del teorema di Weierstrass.

Corollario 5.90. *Ogni funzione continua su un intervallo chiuso e limitato è limitata.*

5.12 Funzioni continue invertibili

Sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e iniettiva e sia $f^{-1} : f(A) \rightarrow \mathbb{R}$ la sua inversa. In generale, non ci si può aspettare che f^{-1} sia ancora continua.

Per esempio, sia $A = [0, 1] \cup (2, 3]$ (unione di due intervalli) e sia

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0, 1] \\ x - 1 & \text{se } x \in (2, 3]. \end{cases}$$

Allora f è continua in A e la sua inversa

$$f^{-1} : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f^{-1}(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0, 1] \\ x + 1 & \text{se } x \in (1, 2]. \end{cases}$$

è però una funzione discontinua in $x = 1$.

Notiamo che A non è un intervallo, ma è l'unione di due intervalli.

Se invece $A = I$ è un intervallo, la situazione cambia. Valgono infatti i seguenti risultati.

Proposizione 5.91. *Sia I un intervallo e sia f una funzione continua su I . Allora f è invertibile $\iff f$ è strettamente monotona.*

Teorema 5.92. *Sia f è una funzione continua e invertibile definita su un intervallo I . Allora f^{-1} è continua.*

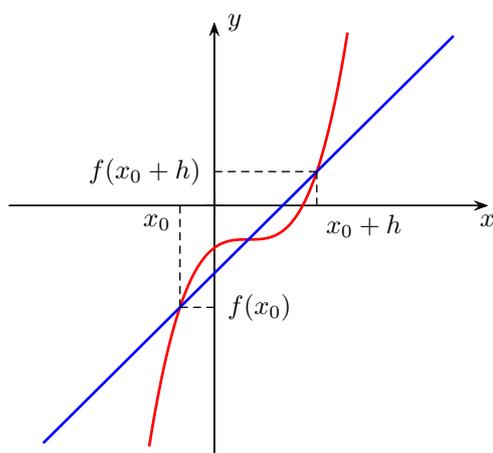
Osservazione 5.93. Dal Teorema 5.92 sopra segue immediatamente che sono continue le seguenti funzioni $\log x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctan x$, inverse delle funzioni e^x , $\sin x$ (ristretto all'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$), $\cos x$ (ristretto all'intervallo $[0, \pi]$) e $\tan x$ (ristretta all'intervallo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$), rispettivamente.

Capitolo 6

Derivate

6.1 Definizione di derivata e derivate di funzioni elementari

Esempio 6.1 (Motivazioni). Consideriamo il grafico di una data funzione $y = f(x)$.



La retta congiungente i punti di coordinate $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ ha equazione $y - f(x_0) = m_h(x - x_0)$

dove $m_h = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{x_0+h-x_0}$.

Come si ottiene il **coefficiente angolare della retta tangente** al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$?

Vedremo che tale problema è strettamente collegato al concetto di derivata della funzione f nel punto x_0 .

Definizione 6.2. Sia $f : \text{dom}f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale. Dati $x_1, x_2 \in \text{dom}f$ con $x_1 \neq x_2$, si definisce rapporto incrementale di f tra x_1 e x_2 il quoziente

$$rf(x_1, x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}.$$

Osservazione 6.3. Valgono le seguenti implicazioni:

1. f crescente $\Leftrightarrow rf \geq 0$.
2. f strettamente crescente $\Leftrightarrow rf > 0$.

Definizione 6.4. Siano I un intervallo, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, e x_0 un punto interno ad I . Se esiste il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} rf(x, x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \overline{\mathbb{R}},$$

esso viene chiamato derivata di f nel punto x_0 e si indica con $f'(x_0)$.

Se $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, allora f si dice derivabile in x_0 .

Osservazione 6.5. Esistono altri modi per scrivere $f'(x_0)$. Per esempio:

$$Df(x_0), \quad \frac{d}{dx}f(x_0), \quad \frac{dy}{dx}(x_0), \quad y'(x_0).$$

Definizione 6.6. Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale tale che

$$I' = \{x \in I : f \text{ è derivabile in } x\} \neq \emptyset.$$

Si definisce funzione **DERIVATA DI f** la funzione

$$f' : I' \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f'(x)$$

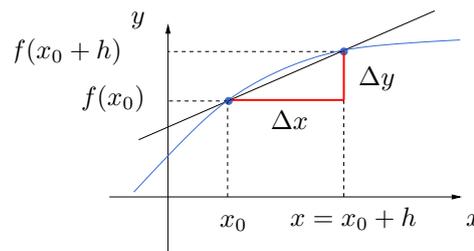
che associa ad ogni punto $x \in I'$ la derivata di f in x .

Abbiamo che $I' \subseteq I$ e in generale $I' \neq I$.

Osservazione 6.7. Come per la derivata in un punto, esistono altri modi per scrivere la funzione derivata $f'(x)$. Per esempio:

$$Df(x), \quad \frac{d}{dx}f(x), \quad y'(x).$$

Osservazione 6.8 (Significato geometrico della derivata). Come preannunciato nella motivazione, il concetto di derivata di una funzione in un punto, è strettamente collegato al concetto di coefficiente angolare della retta tangente al grafico di una funzione in quel punto. Sia f la funzione in figura:



Il coefficiente angolare della retta passante per i punti $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ è

$$m_h = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

dove si è posto $x = x_0 + h$.

Far tendere $x \rightarrow x_0$ equivale a far tendere $x_0 + h \rightarrow x_0$ o $h \rightarrow 0$, quindi il **coefficiente angolare** della retta tangente ad f in x_0 è

$$m = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} m_h.$$

Definizione 6.9. Se f è una funzione derivabile in x_0 , allora l'equazione della retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$ è data da

$$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}.$$

Osservazione 6.10 (Altre interpretazioni della derivata). La definizione di derivata come limite del rapporto incrementale indica che essa deve considerarsi come tasso di variazione puntuale o istantaneo, anzichè medio.

Questo modo di vedere è particolarmente fruttuoso in molte situazioni. Per esempio

- Sia $s(t)$ la legge oraria di un corpo, i.e la funzione $t \rightarrow s(t)$ indica lo spazio percorso al tempo t . Allora

$$\frac{ds}{dt} = \text{velocità del corpo.}$$

- Un pendolo oscilla in un piano verticale attorno ad un asse, formando con esso un angolo $\theta = \theta(t)$. In questo caso

$$\frac{d\theta}{dt} = \text{velocità angolare del pendolo.}$$

- In un filo percorso da corrente sia $q = q(t)$ la quantità di carica che attraversa una sezione del filo nell'istante t . Si ha

$$\frac{dq}{dt} = \text{intensità di corrente.}$$

Usando la definizione, si calcolano velocemente le derivate di alcune funzioni elementari.

Esempio 6.11. Sia $c \in \mathbb{R}$ e sia f la funzione costante $\boxed{f(x) = c}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora

$\boxed{Dc = f'(x) = 0}$ in ogni punto di $x \in \mathbb{R}$. Infatti, per ogni coppia di punti $x, x_0 \in \mathbb{R}$,

$$r f(x, x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{c - c}{x - x_0} = \frac{0}{x - x_0} = 0.$$

Dunque,

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$$

in ogni punto x_0 . Essendo x_0 generico, si ha $f'(x) = 0$ in ogni punto $x \in \mathbb{R}$.

Esempio 6.12. Sia $\boxed{f(x) = x}$. Allora $\boxed{Dx = f'(x) = 1}$, per ogni $x \in \mathbb{R}$. Risulta

$$rf(x, x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

per ogni coppia di punti $x, x_0 \in \mathbb{R}$, per cui

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} rf(x, x_0) = 1$$

per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$. Essendo x_0 generico, si ha $f'(x) = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Esempio 6.13. Sia $\boxed{f(x) = x^n}$ ($n \in \mathbb{N}, n \geq 2$). Allora $\boxed{Dx^n = f'(x) = nx^{n-1}}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Infatti, risulta

$$x^n - x_0^n = (x - x_0) \sum_{i=1}^n x^{n-i} x_0^{i-1} = (x - x_0) (x^{n-1} + x^{n-2} x_0 + \cdots + x x_0^{n-2} + x_0^{n-1})$$

da cui

$$rf(x, x_0) = \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = x^{n-1} + x^{n-2} x_0 + \cdots + x x_0^{n-2} + x_0^{n-1}, \quad \forall x, x_0 \in \mathbb{R}.$$

Passando al limite per $x \rightarrow x_0$, si ha

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} rf(x, x_0) = nx_0^{n-1}.$$

Essendo x_0 generico, si ha $f'(x) = nx^{n-1}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Esempio 6.14. Sia $\boxed{f(x) = a^x}$, con $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. Allora $\boxed{Da^x = f'(x) = a^x \log_e a}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Infatti, si ha

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a^x - a^{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} a^{x_0} \left[\frac{a^{(x-x_0)} - 1}{x - x_0} \right] = a^{x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{a^{(x-x_0)} - 1}{x - x_0} \right].$$

Dobbiamo calcolare il limite $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{a^t - 1}{t}$.

Eseguiamo il seguente cambiamento di variabili:

$$a^t - 1 = y, \quad \text{cioè} \quad t = \log_a(1 + y).$$

Il limite diventa

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\log_a(1 + y)} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\log_a(1 + y)^{\frac{1}{y}}} = \frac{1}{\log_a e} = \log_e a.$$

Otteniamo quindi che

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{a^x - a^{x_0}}{x - x_0} = a^{x_0} \log_e a.$$

Essendo x_0 generico, si ha $f'(x) = a^x \log_e a$, per ogni $x \in \mathbb{R}$.

In particolare, se $\boxed{f(x) = e^x}$ si ha $\boxed{De^x = f'(x) = e^x}$.

Esempio 6.15. Sia $f(x) = \log_a x$, per $x \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. Allora $D \log_a x = f'(x) = \frac{1}{x} \log_a e$ per ogni $x \in \mathbb{R}^+$. Infatti, se $x_0 > 0$ si ha

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(x_0 + h) - \log_a x_0}{h} = \frac{\log_a x_0 + \log_a(1 + \frac{h}{x_0}) - \log_a x_0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\log_a(1 + \frac{h}{x_0})}{h} = \\ &= \log_a \left(\lim_{h \rightarrow 0} \left(1 + \frac{h}{x_0}\right)^{\frac{1}{h}} \right) = \log_a e^{\frac{1}{x_0}} = \frac{1}{x_0} \log_a e. \end{aligned}$$

Essendo x_0 generico, si ha $f'(x) = \frac{1}{x} \log_a e$ per ogni $x \in \mathbb{R}^+$.

In particolare, per $f(x) = \ln x$ si ha $D \ln x = f'(x) = \frac{1}{x}$.

Esempio 6.16. Sia $f(x) = \sin x$, per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora $D \sin x = f'(x) = \cos x$, per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Si ha

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin x_0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x_0 \cos h + \sin h \cos x_0 - \sin x_0}{h} \\ &= \cos x_0 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} + \sin x_0 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h}. \end{aligned}$$

Ricordiamo il limite fondamentale

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1.$$

Inoltre si ha

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} = - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{\cos h + 1} = 0.$$

Allora otteniamo che

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + h) - \sin x_0}{h} = \cos x_0.$$

Essendo x_0 generico, si ha che $f'(x) = \cos x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Ragionando in maniera analoga, si può calcolare la derivata della funzione $\cos x$.

Esempio 6.17. Se $f(x) = \cos x$, per $x \in \mathbb{R}$, allora $D \cos x = f'(x) = -\sin x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Basta osservare che $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} + x)$.

Esempio 6.18. Sia $f(x) = \frac{1}{x}$, per $x \neq 0$. Allora $D \frac{1}{x} = f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ per ogni $x \neq 0$. Infatti, Si ha ($x_0 \neq 0$)

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(1/x) - (1/x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x_0 - x)/(x_0 x)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} -\frac{1}{x_0 x} = -\frac{1}{x_0^2}.$$

Essendo x_0 arbitrario, si ha che $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ per ogni $x \neq 0$.

Dalla definizione di derivabilità segue subito la seguente proposizione che lega il concetto di derivabilità a quello di continuità.

Teorema 6.19. f derivabile in $x_0 \Rightarrow f$ continua in x_0 .

Dimostrazione. Per $x \neq x_0$ si ha

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0).$$

Pertanto

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) - f(x_0)] = f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

□

Osservazione 6.20. Nel teorema 6.19 l'implicazione inversa non vale: esistono funzioni continue ma non derivabili in tutto il loro dominio. Vedi Esempi 6.23 e 6.25 seguenti.

Definizione 6.21. Sia I intervallo, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ e x_0 un punto interno ad I .

(i) Se esiste il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} r f(x, x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \overline{\mathbb{R}},$$

esso viene chiamato derivata sinistra di f nel punto x_0 e si indica con $f'_-(x_0)$.

(ii) Se esiste il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} r f(x, x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \overline{\mathbb{R}},$$

esso viene chiamato derivata destra di f nel punto x_0 e si indica con $f'_+(x_0)$.

Proposizione 6.22. Una funzione f ammette derivata $f'(x_0)$ in un punto x_0 se e solo se

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0).$$

Esempio 6.23. Sia $f(x) = |x|$, per $x \in \mathbb{R}$.

- Se $x_0 > 0$, si ha

$$r f(x, x_0) = \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

per tutti gli $x > 0$, per cui $f'(x_0) = 1$.

- Se $x_0 < 0$, si ha

$$r f(x, x_0) = \frac{|x| - |x_0|}{x - x_0} = \frac{-x - (-x_0)}{x - x_0} = -1$$

per tutti gli $x < 0$, per cui $f'(x_0) = -1$.

- Se $x_0 = 0$, si ha

$$r f(x, 0) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0, \\ -1 & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

per cui $f'_-(0) = -1$ e $f'_+(0) = 1$. In particolare **NON ESISTE** $f'(0)$. La funzione $f(x) = |x|$ è quindi un esempio di funzione continua nel suo dominio, ma non derivabile in esso. Si ha che $I = \text{dom } f = \mathbb{R}$, mentre $I' = \text{dom } f' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dunque il seguente esempio mostra anche che, in generale, $I' \subset I$.

Esempio 6.24 (Funzione di Heaviside). Sia $f(x) \equiv H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0, \\ 0 & \text{se } x < 0. \end{cases}$

Allora

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - 0}{x - 0} = 0,$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{0 - 1}{x - 0} = +\infty.$$

Anche in questo caso NON ESISTE $f'(0)$.

Esempio 6.25. Sia $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x \geq 0, \\ -\sqrt{|x|} & \text{se } x < 0. \end{cases}$ Dimostriamo che in questo caso esiste la derivata $f'(0)$ (esiste e vale $+\infty$), ma essendo non finita la funzione non è derivabile. Si ha

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty,$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-\sqrt{|x|} - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt{|x|}} = +\infty.$$

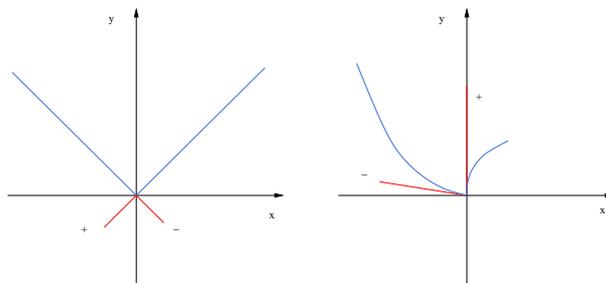
Quindi $f'(0) = +\infty$, e f NON È DERIVABILE IN 0.

6.2 Punti di non derivabilità

Se la funzione f è continua in x_0 ma non è derivabile in x_0 si possono presentare vari casi.

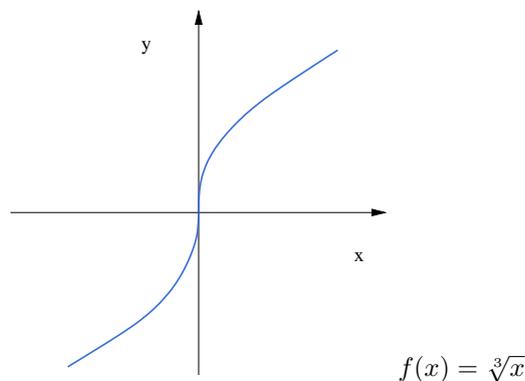
1. Punto angoloso:

Definizione 6.26. Se $\exists f'_-(x_0), f'_+(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$ ($f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$) e almeno una delle due è finita, allora x_0 si dice **punto angoloso**.



2. Punto a tangente verticale

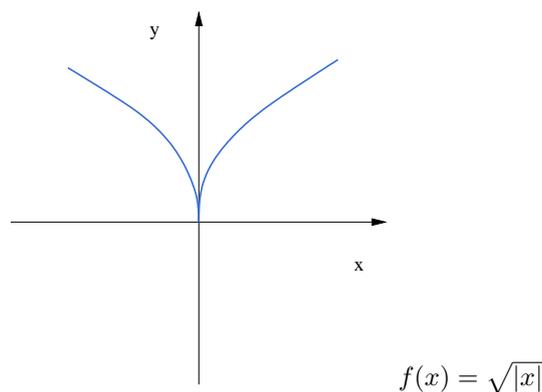
Definizione 6.27. Se $\exists f'(x_0) = \pm\infty$, allora x_0 si dice **punto di flesso a tangente verticale**.



$$f'_-(0) = f'_+(0) = +\infty \text{ (VERIFICARE)}$$

3. Cuspide

Definizione 6.28. Se $f'_-(x_0), f'_+(x_0) \in \{+\infty, -\infty\}$, $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$, allora x_0 si dice **cuspidi**.



$$f'_-(0) = -\infty, \quad f'_+(0) = +\infty \text{ (VERIFICARE)}$$

In tutti i casi analizzati sopra almeno una, fra derivata destra e derivata sinistra della funzione, esiste (finita o infinita). Ci sono casi però in cui, pur essendo f continua in x_0 , $f'_-(x_0)$ e $f'_+(x_0)$ non esistono *entrambe*, come si evince dal seguente esempio.

Esempio 6.29. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

1. la f in $x_0 = 0$ è continua;
2. non esistono, $f'_-(x_0)$ e $f'_+(x_0)$ con $x_0 = 0$. Infatti

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin \frac{1}{x}$$

che non esiste. Analogamente per $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.

6.3 Regole di derivazione

Introduciamo ora alcuni teoremi relativi alle regole di derivazione di funzioni, tramite i quali si possono ottenere poi facilmente le derivate di altre funzioni note.

Teorema 6.30 (Linearità). *Sia I intervallo e x_0 punto interno a I . Se $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ sono derivabili in x_0 e $c \in \mathbb{R}$, allora anche $f + g$ e cf sono derivabili in x_0 e si ha*

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0), \quad (cf)'(x_0) = c(f'(x_0)).$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} (f + g)'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) + g(x_0 + h) - f(x_0) - g(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} \right] = f'(x_0) + g'(x_0), \\ (cf)'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{cf(x_0 + h) - cf(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} c \left[\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right] = cf'(x_0). \end{aligned}$$

□

Esempio 6.31. • $D(5x^2 + 7x + 9) = 5 \cdot D(x^2) + 7 \cdot D(x) + D9 = 10x + 7.$

• $D(3 \sin x - 7 \cos x + 2x) = 3 \cos x + 7 \sin x + 2.$

Teorema 6.32 (Derivata del prodotto). *Sia I intervallo e x_0 punto interno a I . Se $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni derivabili in x_0 , allora anche fg è derivabile in x_0 , e si ha*

$$(fg)'(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0).$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} (fg)'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(fg)(x_0 + h) - (fg)(x_0)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h)[g(x_0 + h) - g(x_0)] + g(x_0)[f(x_0 + h) - f(x_0)]}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ f(x_0 + h) \frac{g(x_0 + h) - g(x_0)}{h} + g(x_0) \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \right\} = \\ &= f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0). \end{aligned}$$

□

Esempio 6.33. $D(x^3 \sin x) = D(x^3) \sin x + x^3 D(\sin x) = 3x^2 \sin x + x^3 \cos x.$

Teorema 6.34 (Derivata della composizione). *Siano I e J intervalli; $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g : J \rightarrow \mathbb{R}$, x_0 un punto interno a I tale che $f(x_0)$ è interno a J .*

Se f è derivabile in x_0 e g è derivabile in $f(x_0)$, allora $g \circ f$ è derivabile in x_0 , e si ha

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0).$$

Dimostrazione. Supponiamo che per $x \neq x_0$ si abbia $f(x) \neq f(x_0)$. Allora, per $x \neq x_0$

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Passando al limite per $x \rightarrow x_0$ si ottiene la tesi.

In generale, però potrà essere $f(x) = f(x_0)$ anche per $x \neq x_0$ e quindi non si potrà moltiplicare e dividere per $f(x) - f(x_0)$. Usiamo questo trucco.

Sia $h : J \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione così definita

$$h(y) = \begin{cases} \frac{g(y) - g(f(x_0))}{y - f(x_0)} & \text{se } y \neq f(x_0) \\ g'(f(x_0)) & \text{se } y = f(x_0). \end{cases}$$

Per $x \neq x_0$ (scegliendo $y = f(x)$) si ha

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = h(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \quad (6.1)$$

Osserviamo che dalla derivabilità di g in $f(x_0)$ segue la continuità di h in $f(x_0)$. Quindi, per il teorema sulla composizione di funzioni continue,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(f(x)) = h(f(x_0)) = g'(f(x_0)).$$

Allora, passando al limite in (6.1) per $x \rightarrow x_0$, si ottiene la tesi. \square

Esempio 6.35. Verifichiamo che $D \cosh x = \sinh x$.

Risulta

$$D \cosh x = D \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2} \right) = \frac{1}{2} (De^x + De^{-x}) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x.$$

Esempio 6.36. Verifichiamo che $D \sinh x = \cosh x$.

Risulta

$$D \sinh x = D \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right) = \frac{1}{2} (De^x - De^{-x}) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$$

Esempio 6.37. Verifichiamo che $D(x^{-n}) = -nx^{-n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

La funzione $x \mapsto x^{-n}$ si può considerare come **composizione** delle funzioni $f(x) = x^n$ e $g(y) = 1/y$. Poichè $f'(x) = nx^{n-1}$, $g'(y) = -1/y^2$, risulta

$$D(x^{-n}) = g'(f(x)) f'(x) = -\frac{1}{(x^n)^2} (nx^{n-1}) = -nx^{-n-1}.$$

Esempio 6.38. Dalle derivate delle funzioni elementari note, con il teorema di composizione, si ricavano le seguenti formule. Se f è una funzione derivabile in I , allora:

1. se $f(x) \neq 0 \forall x \in I$, allora in I vale $D \left(\frac{1}{f} \right) = -\frac{1}{f^2} f'$.

(Si consideri $\frac{1}{f}$ come composizione di f e $\frac{1}{y}$).

2. $D(e^f) = e^f f'$.
3. $D(\sin f) = \cos f f'$.
4. $D(\cos f) = -\sin f f'$.
5. se $f > 0$, allora $D(\ln f) = \frac{1}{f} f'$.

Esempio 6.39. • $D(\cos 2x) = (-\sin 2x) 2$.

• $D(\sin^3 5x) = 3 \sin^2 5x \cdot \cos 5x \cdot 5 = 15 \sin^2 5x \cdot \cos 5x$.

Esempio 6.40. Calcoliamo la derivata della funzione potenza $f(x) = x^\alpha$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x > 0$.

Vale che $D x^\alpha = f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$. Infatti

$$f(x) = x^\alpha = e^{\ln x^\alpha} = e^{\alpha \ln x}.$$

Allora, si ha

$$f'(x) = e^{\alpha \ln x} \left(\frac{\alpha}{x} \right) = x^\alpha \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Teorema 6.41 (Derivata del quoziente). *Sia I intervallo e x_0 punto interno a I . Siano $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni derivabili in x_0 e $g(x_0) \neq 0$. Allora $\frac{f}{g}$ è derivabile in x_0 , e si ha*

$$\left(\frac{f}{g} \right)' (x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

Dimostrazione. IDEA: Applicare la derivazione del prodotto a f e $\frac{1}{g}$, ed usare $D(g^{-1}) = -g^{-2}g'$. \square

Esempio 6.42. Verifichiamo che $D \tan x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Poichè $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, possiamo calcolare la derivata di $\tan x$ nei punti in cui $\cos x \neq 0$, cioè per $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Risulta

$$\begin{aligned} D \tan x &= D \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right) = \frac{(D \sin x) \cos x - \sin x (D \cos x)}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

Esempio 6.43. Verifichiamo che $D \tanh x = \frac{1}{\cosh^2 x}$.

Risulta

$$\begin{aligned} D \tanh x &= D \left(\frac{\sinh x}{\cosh x} \right) = \frac{(D \sinh x) \cosh x - \sinh x (D \cosh x)}{\cosh^2 x} = \\ &= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}. \end{aligned}$$

Teorema 6.44 (Derivazione della funzione inversa). *Sia I intervallo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua e invertibile in I . Sia x_0 **interno ad I** .*

Se esiste $f'(x_0)$, allora esiste anche la derivata di f^{-1} nel punto $y_0 = f(x_0)$, e si ha

$$D(f^{-1})(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \text{cioè} \quad (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Dimostrazione. Sia ha

$$\begin{aligned} & \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} \\ &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{f(f^{-1}(y)) - f(f^{-1}(y_0))} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}, \end{aligned}$$

per il teorema sul limite di composizione. □

Osservazione 6.45. 1. L'ipotesi di invertibilità su f equivale alla stretta monotonia.

2. La formula per la derivata dell'inversa vale anche se $f'(x_0) = 0$ o $f'(x_0) = \pm\infty$, applicando le dovute convenzioni.

3. Se $f'(x_0) \neq 0$, allora f^{-1} è derivabile in $f(x_0)$.

Esempio 6.46. Applicando il Teorema 6.44, calcoliamo la derivata della funzione $\ln x$ pensandola come funzione inversa dell'esponenziale. Sia $f(x) = e^x$ e $f^{-1}(x) = \ln x$. Si ha allora

$$D(\ln x) = D(f^{-1})(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

Esempio 6.47. Verifichiamo che $D(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Siano

$$\begin{aligned} y &= f(x) = \sin x, & x &\in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \\ x &= f^{-1}(y) = \arcsin y, & y &\in]-1, 1[. \end{aligned}$$

Risulta $D(\arcsin y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{D(\sin x)} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$, essendo $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$ per $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ e $\sin x = y$.

Cambiando di nuovo nome alla variabile, scrivendo x al posto di y , si ha che

$$D(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Esempio 6.48. Verifichiamo che $D \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$. Siano

$$\begin{aligned} y &= f(x) = \tan x, & x &\in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, \\ x &= f^{-1}(y) = \arctan y, & y &\in]-\infty, +\infty[. \end{aligned}$$

Risulta

$$D(\arctan y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{D(\tan x)} = \cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2},$$

essendo $\tan x = y$. Cambiando di nuovo nome alla variabile (scrivendo x al posto di y) si ha $D \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$.

Analogamente $D(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ e $D(\operatorname{arccot} x) = -\frac{1}{1+x^2}$.

Osservazione 6.49. Scrivendo $f^g = e^{g \ln f}$, si trova la formula generale per la derivata di f^g :

$$D(f^g) = f^g \left(\frac{f'g}{f} + g' \ln f \right).$$

Esempio 6.50. Calcolare la derivata di $(\ln x)^{\sqrt{x}}$, con $x > 1$.

Possiamo scrivere

$$(\ln x)^{\sqrt{x}} = e^{x^{1/2} \ln(\ln x)}.$$

Si ha

$$D(x^{1/2} \ln(\ln x)) = \ln(\ln x) D(x^{1/2}) + x^{1/2} D(\ln(\ln x)).$$

Poichè $D(x^{1/2}) = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ e $D(\ln(\ln x)) = \frac{1}{\ln x} \frac{1}{x}$, si ha dunque

$$D(x^{1/2} \ln(\ln x)) = \ln(\ln x) \frac{1}{2\sqrt{x}} + x^{1/2} \frac{1}{x \ln x} = \frac{\ln x \ln(\ln x) + 2}{2\sqrt{x} \ln x},$$

ed infine

$$\begin{aligned} D(\ln x)^{\sqrt{x}} &= e^{x^{1/2} \ln(\ln x)} \frac{\ln x \ln(\ln x) + 2}{2\sqrt{x} \ln x} = \\ &= (\ln x)^{(\sqrt{x}-1)} \frac{\ln x \ln(\ln x) + 2}{2\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

6.4 Massimi e minimi relativi

Definizione 6.51. Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in A$. Si dice che

- x_0 è un punto di massimo RELATIVO, o un punto di massimo LOCALE, se esiste un intorno I di x_0 tale che x_0 è punto di massimo per la restrizione di f a $I \cap A$; cioè

$$\exists I : \forall x \in A \cap I \quad \text{si ha} \quad f(x) \leq f(x_0).$$

- x_0 è un punto di minimo RELATIVO o un punto di minimo LOCALE se esiste un intorno I di x_0 tale che x_0 è punto di minimo per la restrizione di f a $I \cap A$; cioè

$$\exists I : \forall x \in A \cap I \quad \text{si ha} \quad f(x) \geq f(x_0).$$

- x_0 è un punto di estremo relativo o punto di estremo locale se è punto di massimo locale o di minimo locale.

Osservazione 6.52. Se x_0 è un punto di massimo per f su A , allora è anche punto di massimo relativo; se vogliamo distinguere i due termini, nel primo caso si parlerà di punto di massimo ASSOLUTO o punto di massimo GLOBALE.

Analogamente, si parlerà di punto di minimo ASSOLUTO o punto di minimo GLOBALE.

Esempio 6.53. Sia $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in [-1, 1] \setminus \{0\}, \\ 2 & \text{se } x = 0. \end{cases}$

I punti $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ sono punti di massimo RELATIVO; $x = 0$ è anche punto di massimo ASSOLUTO.

Non ci sono punti di minimo.

Esempio 6.54. Sia $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } |x| = 1, \\ \frac{1}{x^2} & \text{se } x \in]-1, 1[\setminus \{0\} \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$

$x = 0$ è punto di minimo ASSOLUTO; $x = 1$ e $x = -1$ sono punti di massimo RELATIVO ma NON ASSOLUTO.

Esempio 6.55. Sia $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$. Tutti i punti $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, sono punti di massimo ASSOLUTO (e quindi relativo); tutti i punti $x = (2k + 1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, sono punti di minimo ASSOLUTO (e quindi relativo).

Esempio 6.56. Sia $f(x) = [x]$ (parte intera), $x \in \mathbb{R}$. Tutti i punti $x \in \mathbb{R}$ sono punti di massimo RELATIVO; tutti i punti $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ sono punti di minimo RELATIVO.

Esempio 6.57. Sia $f(x) = \sqrt{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$. Il punto $x = 0$ è l'unico punto di minimo assoluto (e quindi relativo). In $x = 0$ f non è derivabile e $x = 0$ è un punto di cuspid. Non vi sono punti di massimo.

Esempio 6.58. Sia $f(x) = \min\{|x|, |x - 2| + 1\}$. Il punto $x = 0$ è punto di minimo assoluto. Il punto $x = 2$ è punto di minimo relativo; il punto $x = \frac{3}{2}$ è punto di massimo relativo. Notare che la funzione non è derivabile in $x = 0$, $x = \frac{3}{2}$ e $x = 2$.

Esempio 6.59. Sia $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x \leq -1, \\ -x & \text{se } -1 < x < 1, \\ x - 2 & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$

La funzione non ha punti di massimo e minimo assoluti. $x = 1$ è punto di minimo relativo; $x = -1$ è punto di massimo relativo.

Definizione 6.60. Diciamo che x_0 è punto STAZIONARIO per f se f è derivabile in x_0 e se $f'(x_0) = 0$.

Il seguente teorema fornisce la condizione necessaria al primo ordine per i punti di estremo relativo.

Teorema 6.61 (di Fermat). Siano $f : \text{dom} f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e x_0 un **punto interno** a $\text{dom} f$. Se f è derivabile in x_0 e x_0 è un **punto di estremo relativo** per f , allora x_0 è un punto stazionario di f .

Dimostrazione. Sia x_0 un punto di massimo relativo (analogamente se x_0 un punto di minimo relativo).

Per definizione $\exists I$ intorno di x_0 tale che $f(x) - f(x_0) \leq 0 \forall x \in I \cap \text{dom} f$. Risulta quindi

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{cases} \geq 0 & \text{se } x - x_0 < 0, \\ \leq 0 & \text{se } x - x_0 > 0. \end{cases}$$

Passando al limite per $x \rightarrow x_0$ si ha

$$f'_-(x_0) \geq 0 \quad \text{e} \quad f'_+(x_0) \leq 0.$$

Ma per ipotesi f derivabile in x_0 . Quindi $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$. Segue pertanto che $f'(x_0) = 0$ e dalla Definizione 6.60 si trova che x_0 un punto stazionario di f . \square

Osservazione 6.62. Seguendo la dimostrazione del Teorema 6.61 abbiamo dimostrato inoltre:

Sia $f : \text{dom } f \rightarrow \mathbb{R}$ e x_0 un punto interno al $\text{dom } f$. Se x_0 è un punto di estremo relativo per f in cui esistono le derivate destra e/o sinistra, allora

1. se x_0 è punto di massimo relativo allora $f'_-(x_0) \geq 0$, $f'_+(x_0) \leq 0$;
2. se x_0 è punto di minimo relativo allora $f'_-(x_0) \leq 0$, $f'_+(x_0) \geq 0$.

Esempio 6.63. $f(x) = x^2$, $\text{dom } f = \mathbb{R}$. $f'(x) = 2x \Rightarrow x = 0$ è l'unico punto stazionario per f (e di minimo assoluto, e quindi anche relativo).

Il teorema di Fermat fornisce solo una condizione necessaria, ma non sufficiente per i punti di estremo relativo. Infatti, in generale, i punti stazionari possono non essere di estremo per una funzione, ossia:

$$\boxed{x_0 \text{ punto stazionario di } f \not\Rightarrow x_0 \text{ punto di estremo relativo per } f}.$$

Esempio 6.64. $f(x) = x^3$, $\text{dom } f = \mathbb{R}$. $f'(x) = 3x^2 \Rightarrow x = 0$ è l'unico punto stazionario per f (ma NON PUNTO DI ESTREMO RELATIVO).

Esempio 6.65. $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$ Calcoliamo

$$f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h} = 0.$$

Quindi $x = 0$ è punto stazionario per f . Ma $x = 0$ NON è di ESTREMO RELATIVO per f , poiché in ogni suo intorno ci sono punti per cui f è positiva e punti per cui f è negativa.

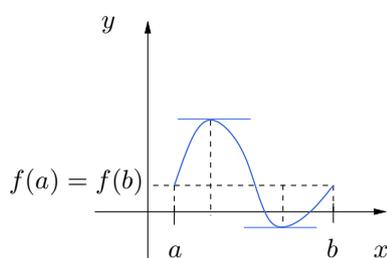
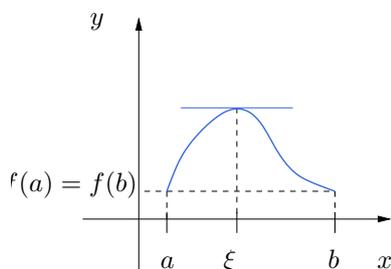
Osservazione 6.66. Il Teorema 6.61 fornisce una 'tecnica' per la ricerca di estremi (relativi) ma solo in punti interni al dominio e in cui f derivabile. Infatti, se f è derivabile, i punti di estremo relativi interni al dominio saranno da ricercarsi fra i punti stazionari.

6.5 I teoremi di Rolle, Cauchy e Lagrange

Teorema 6.67 (di Rolle). Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che

1. f è continua in $[a, b]$;
2. f è derivabile in $]a, b[$;
3. $f(a) = f(b)$.

Allora esiste almeno un punto $\xi \in]a, b[$ tale che $f'(\xi) = 0$.



Dimostrazione. • Se $f(x) = c$ per ogni $x \in [a, b]$, $c \in \mathbb{R}$, allora $f'(x) = 0, \forall x \in]a, b[$.

- Se f non costante, per il **Teorema di Weierstrass** (f continua in $[a, b]$) f ammette minimo assoluto m e massimo assoluto M , con $m < M$ poichè f non è costante. Siano $x_m \in [a, b]$ un punto di minimo e $x_M \in [a, b]$ un punto di massimo tali che $f(x_m) = m$ e $f(x_M) = M$.
 - Se $x_m \notin \{a, b\}$, allora x_m è un punto stazionario e quindi $f'(x_m) = 0$.
 - Altrimenti $f(x_m) = f(a) = f(b)$, e quindi $x_M \notin \{a, b\}$ (dato che f non è costante); perciò x_M è un punto interno ad $[a, b]$, ed è di estremo. Allora $f'(x_M) = 0$.

□

Osservazione 6.68. Nessuna delle ipotesi del teorema può essere eliminata.

1. Se si elimina l'ipotesi di continuità in $[a, b]$ il teorema non vale. Infatti, la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0, 1) \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

è continua in $[0, 1)$, derivabile nell'intervallo aperto $(0, 1)$ e verifica $f(0) = f(1)$, ma non esistono punti in cui $f' = 0$.

2. Se si elimina l'ipotesi di derivabilità in (a, b) , il teorema non vale. Per esempio la funzione $f(x) = |x|$ è continua in $[-1, 1]$ e verifica $f(-1) = f(1)$, ma non esistono punti in $(-1, 1)$ in cui $f' = 0$.
3. Se si elimina l'ipotesi $f(a) = f(b)$ il teorema non vale. Infatti se si considera la la funzione $f(x) = x$, essa è continua in $[0, 1]$ e derivabile in $(0, 1)$, ma non esistono punti in $(0, 1)$ in cui $f' = 0$.

Teorema 6.69 (di Cauchy). *Siano $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni continue in $[a, b]$ e derivabili in $]a, b[$. Allora **esiste almeno un punto** $\xi \in]a, b[$ tale che*

$$f'(\xi)[g(b) - g(a)] = g'(\xi)[f(b) - f(a)].$$

Dimostrazione. Si applica il Teorema di Rolle alla funzione

$$h(x) = f(x)[g(b) - g(a)] - g(x)[f(b) - f(a)],$$

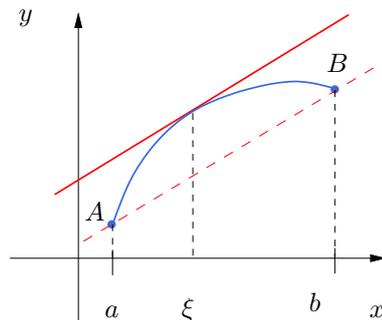
notando che

$$h(a) = f(a)g(b) - g(a)f(b) = h(b).$$

□

Teorema 6.70 (del valor medio, o di Lagrange). *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$, e derivabile in $]a, b[$. Allora **esiste almeno un punto** $\xi \in]a, b[$ tale che*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Significato geometrico: esiste almeno un punto $\xi \in]a, b[$ per cui la tangente al grafico di f in $(\xi, f(\xi))$ è parallela alla retta passante per i punti

$$A = (a, f(a)) \quad \text{e} \quad B = (b, f(b)).$$

Dimostrazione. Si prende $g(x) = x$ nel Teorema di Cauchy. Oppure, si applica il Teorema di Rolle alla funzione $h(x) = f(x) - (x - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, notando che $h(a) = h(b) = f(a)$. □

Teorema 6.71 (della derivata nulla). *Sia $f' = 0$ su un intervallo I , allora f è costante su I .*

Dimostrazione. Se f non è costante, allora $\exists a, b \in I$ tali che $a < b$ e $f(b) \neq f(a)$. Allora per il Teorema del valor medio esiste $\xi \in]a, b[$ tale che $f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \neq 0$, contro l'ipotesi. □

Nel teorema della derivata nulla è essenziale l'ipotesi che la funzione f sia definita su un intervallo. Se cade tale ipotesi, non si può in generale dire che una funzione con derivata nulla è costante.

Esempio 6.72. $f(x) = \arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$, $\text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si ha

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^{-2}} \left(\frac{-1}{x^2}\right) = 0.$$

Non si può concludere però che f sia costante sul suo dominio poiché esso non è un intervallo. Infatti f non è costante, essendo

$$f(1) = 2 \arctan 1 = \frac{\pi}{2}, \quad f(-1) = 2 \arctan(-1) = -\frac{\pi}{2}.$$

Vale infatti

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{se } x < 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

6.6 Derivate di funzioni monotone

Teorema 6.73 (Monotonia e derivata). *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, **derivabile** in $]a, b[$.*

- (i) $f' \geq 0$ (rispettivamente $f' \leq 0$) in (a, b) se e solo se f **crecente** (rispettivamente **decrecente**) in $[a, b]$.
- (ii) Se $f' > 0$ (rispettivamente $f' < 0$) in (a, b) , allora f **strettamente crescente** (rispettivamente **strettamente decrescente**) in $[a, b]$. Non vale il viceversa.

Dimostrazione. Dimostriamo (i). Supponiamo che f sia crescente in $[a, b]$, allora per ogni $x, y \in [a, b]$ con $x \neq y$ si ha

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} \geq 0$$

e quindi, passando al limite per $x \rightarrow y$, si ha

$$f'(y) \geq 0.$$

Viceversa, sia $f' \geq 0$. Siano $x, y \in [a, b]$ con $x < y$. Per il Teorema del valor medio si ha che $\exists \xi \in]x, y[$ tale che $f(y) - f(x) = f'(\xi)(y - x) \geq 0$ e quindi f è crescente in $[a, b]$.

Per quanto riguarda (ii), la dimostrazione è come sopra con le disuguaglianze strette. \square

Osservazione 6.74. Non vale il viceversa nell'implicazione (ii) del teorema precedente: considerate $f(x) = x^3$, funzione strettamente crescente in \mathbb{R} , ma tale che $f'(0) = 0$.

In generale, quindi, per una funzione f strettamente crescente e derivabile si ha ancora che $f' \geq 0$ e non $f' > 0$.

Osservazione 6.75. Il Teorema 6.73 è fondamentale per il **disegno di grafici qualitativi di funzioni**. La 'tecnica' che esso consiglia è la seguente:

- calcolare la derivata prima;
- determinare (eventualmente solo qualitativamente) gli intervalli in cui la funzione derivata prima è positiva e quelli in cui è negativa;
- calcolare i valori (o i limiti) agli estremi di questi intervalli;
- tracciare il grafico usando il Teorema 6.73.

6.7 Il teorema di de l'Hopital

Molti dei limiti che danno luogo a una forma indeterminata sono in una delle forme $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\infty}{\infty}$, o si possono ricondurre ad una di esse. Il teorema di de l'Hopital fornisce un metodo utile per la determinazione del valore del limite.

Teorema 6.76 (de l'Hopital forma $\frac{0}{0}$). *Siano $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni continue, e sia $x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Supponiamo inoltre che:*

1. f, g **derivabili** in $(a, b) \setminus \{x_0\}$;
2. $g'(x) \neq 0 \forall x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$;
3. esiste il limite $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \boxed{L}$.

Allora esiste anche il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \boxed{L}.$$

Osservazione 6.77. Sono possibili vari enunciati del teorema precedente, per casi analoghi. Ad esempio, il teorema resta valido se x_0 coincide con a o b , oppure se si tratta solo di un limite destro o sinistro in x_0 .

Osservazione 6.78. L'ipotesi $f(x_0) = g(x_0) = 0$ può essere sostituita dalla seguente: non è necessario che il punto x_0 appartenga al dominio di f e g , ma

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0.$$

In tal caso basta considerare al posto di f la funzione

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq x_0 \\ 0 & \text{se } x = x_0, \end{cases}$$

e al posto di g la funzione \tilde{g} definita in modo analogo e applicare il teorema sopra alle funzioni \tilde{f} e \tilde{g} .

Osservazione 6.79. Il Teorema di de l'Hopital vale anche nel caso in cui f, g sono funzioni derivabili in $(a, +\infty)$ con $x_0 = +\infty$ (limite da sinistra) e nel caso in cui siano derivabili in $(-\infty, a)$ con $x_0 = -\infty$ (limite da destra). Se

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 0,$$

allora

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

purché questo secondo limite esista.

Bisogna applicare il Teorema 6.76 in $t = 0$ alle funzioni $F(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$ e $G(t) = g\left(\frac{1}{t}\right)$, continue e derivabili in un intorno (destro o sinistro) di $t = 0$, tranne che, al più, nel punto stesso $t = 0$. Si ha

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^\pm} F(t) &= \lim_{t \rightarrow 0^\pm} f\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x), & (x = \frac{1}{t}) \\ \lim_{t \rightarrow 0^\pm} G(t) &= \lim_{t \rightarrow 0^\pm} g\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x), \end{aligned}$$

dove \pm si legga in modo opportuno $+$ o $-$, a seconda che si consideri un intorno destro o sinistro di $t = 0$ nell'ipotesi. Il Teorema di de l'Hopital si applica al quoziente $\frac{F}{G}$ nel caso $t \rightarrow 0^+$ o $t \rightarrow 0^-$. Si osservi che

$$F'(t) = -\frac{1}{t^2} f' \left(\frac{1}{t} \right) \quad \text{e} \quad G'(t) = -\frac{1}{t^2} g' \left(\frac{1}{t} \right) \quad \Rightarrow \quad \frac{F'(t)}{G'(t)} = \frac{f' \left(\frac{1}{t} \right)}{g' \left(\frac{1}{t} \right)}.$$

Pertanto, se esiste $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, tale limite sarà uguale a

$$\lim_{t \rightarrow 0^\pm} \frac{f' \left(\frac{1}{t} \right)}{g' \left(\frac{1}{t} \right)} = \lim_{t \rightarrow 0^\pm} \frac{F'(t)}{G'(t)}.$$

Il prossimo teorema tratta la forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$. Vale infatti il seguente risultato.

Teorema 6.80 (de l'Hopital forma $\frac{\infty}{\infty}$). *Siano $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni derivabili in (a, b) . Supponiamo inoltre che:*

1. $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = +\infty$;
2. $g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a, b)$;
3. esiste il limite $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \boxed{L} \in \overline{\mathbb{R}}$.

Allora esiste anche il limite

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \boxed{L}.$$

Osservazione 6.81. Il Teorema 6.80 resta valido se $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} g(x) = +\infty$ o $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$ con $x_0 \in (a, b)$, pur di modificare le formule nell'enunciato. Inoltre esso continua a valere nel caso in cui le funzioni siano definite in una semiretta e f e g divergano per $x \rightarrow +\infty$ (o per $x \rightarrow -\infty$).

Osservazione 6.82. Mediante i Teoremi di de l'Hopital possiamo ritrovare la maggior parte dei limiti notevoli. Per esempio:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \left(\frac{0}{0} \right) \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$;
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \left(\frac{0}{0} \right) \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{1} = 1$;
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \left(\frac{0}{0} \right) \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+1} = 1$;
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty} \right) \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$;
- $(\alpha > 0) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \left(\frac{+\infty}{+\infty} \right) \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0$.

Osservazione 6.83. Mediante l'applicazione dei Teoremi di de l'Hopital si possono risolvere anche altri tipi di forme indeterminate, dopo averle ricondotte ai casi $\frac{\infty}{\infty}$ o $\frac{0}{0}$. Per esempio:

- $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln |x| = (0 \cdot \infty) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln |x|}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{-\infty}{+\infty} \right) \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0.$
- $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 3x)^{1/x} = (1^\infty) = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{x} \ln(\cos 3x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(\cos 3x)}.$ Poiché

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos 3x)}{x} = \left(\frac{0}{0} \right) \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3 \sin 3x}{\cos 3x} = 0,$$

risulta

$$e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \ln(\cos 3x)} = e^0 = 1.$$

•

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right) &= \left(\begin{array}{l} \infty - \infty, \quad x \rightarrow 0^+ \\ -\infty + \infty, \quad x \rightarrow 0^- \end{array} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x \sin x} = \left(\frac{0}{0} \right) \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\sin x + x \cos x} = \left(\frac{0}{0} \right) \stackrel{(H)}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2 \cos x - x \sin x} = 0. \end{aligned}$$

Osservazione 6.84. Il Teorema di de l'Hopital può semplificare il calcolo di limiti complicati ma **attenzione a non 'eccedere' nell'uso**. Il limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^5 x}{x^5}$ è uguale a 1 (ciò si può verificare applicando il limite fondamentale). Tale limite può essere anche calcolato usando solo il teorema di De L'Hôpital, ma si deve applicare la derivazione 5 volte:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^5 x}{x^5} &\stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin^4 x \cos x}{5x^4} \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \sin^3 x \cos^2 x - \sin^5 x}{4x^3} \stackrel{(H)}{=} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{12 \sin^2 x \cos^3 x - 8 \sin^4 x \cos x - 5 \sin^4 x \cos x}{12x^2} = \dots \end{aligned}$$

Osservazione 6.85. Il Teorema di de l'Hopital fornisce delle condizioni SUFFICIENTI affinché esista il limite

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Tali condizioni NON sono NECESSARIE: dalla convergenza del rapporto $\frac{f}{g}$ non segue, in generale, quella di $\frac{f'}{g'}$. Ad esempio, siano $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ e $g(x) = \sin x$. Risulta

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 1 \cdot 0 = 0,$$

mentre

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}}{\cos x} \quad \underline{\text{non esiste.}}$$

Osservazione 6.86. Molti dei limiti precedenti possono essere risolti anche attraverso strumenti diversi dal Teorema di de l'Hopital:

- utilizzo dei limiti notevoli;
- confronto tra infiniti e infinitesimi;
- polinomi di Taylor (\rightsquigarrow nelle prossime lezioni).

Teorema 6.87 (del limite della derivata). *Sia $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ continua in a e derivabile in $]a, b[$. Se esiste (finito o no) $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$, allora esiste anche $f'_+(a)$ e vale*

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x).$$

Dimostrazione. Le funzioni $f(x) - f(a)$ e $g(x) = x - a$ soddisfano le ipotesi del Teorema di de l'Hopital, dunque $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \stackrel{(H)}{=} \lim_{x \rightarrow a^+} f'(x)$. \square

6.8 Derivate di ordini successivi

Definizione 6.88. *Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile sull'intervallo I . Se esiste la derivata della funzione $x \mapsto f'(x)$ in $x_0 \in I$, allora $(f')'(x_0)$ si dice la derivata seconda di f in x_0 , e si denota con i simboli $f''(x_0)$ o $f^{(2)}(x_0)$.*

Osservazione 6.89. Allo stesso modo si definiscono per induzione le derivate di ordine k , con $k \in \mathbb{N}$:

- si definisce la funzione *derivata 0-ima di f* ponendo $f^{(0)} = f$;
- si definisce la derivata k -esima $f^{(k)}$ come la derivata (prima) della derivata la $(k-1)$ -esima $f^{(k-1)}$:

$$f^{(k)}(x_0) = D(f^{(k-1)})(x_0) \quad \forall k \geq 1.$$

k è detto l'ordine di derivazione.

Esempio 6.90. Sia $f(x) = 3^x$, $x \in \mathbb{R}$. Verificare che $f^{(k)}(x) = 3^x (\ln 3)^k$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Esempio 6.91. Sia $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Verificare che $f^{(k)}(x) = e^x$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Esempio 6.92. Sia $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$. Verificare che per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha $f^{(4k)}(x) = \sin x$, $f^{(4k+1)}(x) = \cos x$, $f^{(4k+2)}(x) = -\sin x$, $f^{(4k+3)}(x) = -\cos x$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Definizione 6.93. *Sia I un intervallo. Definiamo per ogni $k \in \mathbb{N}$ l'insieme $C^k(I)$ delle funzioni k volte derivabili su I , tali che la derivata k -ima sia una funzione continua su I .*

Quindi:

- $C^0(I)$ è l'insieme delle funzioni continue su I ;
- $C^1(I)$ è l'insieme delle funzioni derivabili su I , la cui derivata è una funzione continua; ecc.

Osservazione 6.94. L'esistenza della derivata k -esima implica la continuità della derivata $(k-1)$ -esima e quindi, per induzione, di tutte le precedenti.

Osservazione 6.95. Si noti che valgono le inclusioni:

$$\dots \subset C^2(I) \subset C^1(I) \subset C^0(I).$$

Le inclusioni sopra descritte sono strette.

Definizione 6.96. Definiamo lo spazio delle funzioni la cui derivata k -esima esiste, ed è una funzione continua, per ogni $k \in \mathbb{N}$:

$$C^\infty(I) = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C^k(I).$$

Esempio 6.97. • I polinomi, a^x (con $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$), $\sin x$, $\cos x$, appartengono a $C^\infty(\mathbb{R})$.

• La funzione $\log_a x$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$) appartiene a $C^\infty(\mathbb{R}^+)$.

Osservazione 6.98. Dai teoremi di linearità delle derivate si ha che per ogni k vale, per induzione, il teorema di linearità per funzioni di classe C^k .

In particolare, ogni $C^k(I)$ è uno spazio vettoriale su \mathbb{R} . Infatti, dalla linearità della derivazione, si ha

$$\forall f_1, f_2 \in C^k(I), \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R} : \quad c_1 f_1 + c_2 f_2 \in C^k(I).$$

Usando la derivata seconda si può stabilire la natura di un punto stazionario. Vale il seguente criterio.

Teorema 6.99 (Criterio della derivata seconda). Sia $f \in C^1(I)$ e x_0 un punto stazionario per f .

- Se esiste $f''(x_0) > 0$, allora x_0 è un punto di minimo relativo per f .
- Se esiste $f''(x_0) < 0$, allora x_0 è un punto di massimo relativo per f .

Osservazione 6.100. Il Teorema 6.99 suggerisce un metodo per la ricerca di punti di estremo relativo per funzioni due volte derivabili. Ma **Attenzione**: la condizione nel Teorema 6.99 è SOLO SUFFICIENTE (ad esempio, si consideri la funzione $f(x) = x^4$ nel punto $x_0 = 0$).

6.9 Il polinomio di Taylor

In questa sezione vogliamo studiare l'approssimazione di una funzione nell'intorno di un punto con un polinomio. Vedremo che potremo stimare l'ordine di infinitesimo della differenza fra la funzione e il polinomio che l'approssima. Sotto ipotesi di regolarità sulla funzione tale differenza potrà essere stimata poi in maniera ancora più precisa.

Cominciamo con la seguente osservazione. Sia x_0 punto di accumulazione per $\text{dom } f$:

1. se f è continua nel punto x_0 si ha

$$f(x) = f(x_0) + o(1) \quad \text{per } x \rightarrow x_0.$$

Infatti, ricordiamo che, essendo x_0 un punto di accumulazione per $\text{dom } f$, la continuità di f in x_0 si caratterizza tramite il limite $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. D'altra parte:

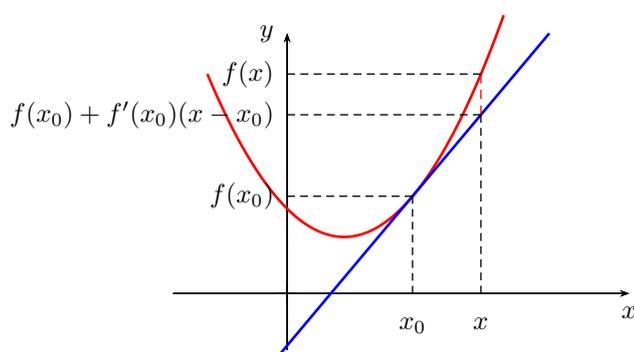
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \iff \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{1} = 0 \iff f(x) - f(x_0) = o(1), \quad \text{per } x \rightarrow x_0.$$

2. Se f è derivabile in x_0 , allora l'equazione della retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$ è data da

$$\boxed{y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)}.$$

La differenza $\Lambda(x)$ tra l'ordinata del punto di ascissa x appartenente al grafico della funzione e quella del punto di ascissa x appartenente alla retta tangente è

$$\Lambda(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$



Calcoliamo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Lambda(x)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right] = 0. \end{aligned}$$

Pertanto, l'errore che si commette approssimando il valore della funzione $f(x)$ con l'ordinata $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ del punto di ascissa x sulla retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$, è un $o(x - x_0)$ per $x \rightarrow x_0$, cioè

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) &= \Lambda(x) = o(x - x_0) \quad \Rightarrow \\ f(x) &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) = P_1(x) + o(x - x_0) \quad \text{per } x \rightarrow x_0. \end{aligned} \quad (6.2)$$

dove $P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ è un polinomio di primo grado.

Il problema che ci poniamo ora è il seguente: approssimando f con un **polinomio di grado** $n > 1$, si commette un errore 'più piccolo', cioè un $o((x - x_0)^n)$?

Vogliamo *generalizzare* la formula (6.2) a funzioni n volte derivabili: il problema è

1. trovare un **polinomio P_n di grado n** tale che si possa scrivere

$$f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n) \quad \text{per } x \rightarrow x_0,$$

2. se possibile, **esprimere P_n mediante le derivate di f in x_0 fino all'ordine n .**

6.9.1 Il polinomio di Taylor con il resto di Peano

Teorema 6.101. Siano $n \in \mathbb{N}$ e f una funzione definita in un intorno del punto $x_0 \in \mathbb{R}$ e derivabile \boxed{n} volte in x_0 . Allora esiste un unico polinomio P_n di grado $\leq \boxed{n}$ tale che

$$f(x) = P_n(x) + o((x - x_0)^n) \quad \text{per } x \rightarrow x_0.$$

P_n è caratterizzato da $P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ per $k = 0, \dots, n$, ed è quindi dato da

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k. \quad (6.3)$$

Questo polinomio viene detto polinomio di Taylor di f di ordine n e di centro x_0 , e indicato con $T_{x_0}^n f$. Nel caso in cui $x_0 = 0$, P_n è detto polinomio di Mac Laurin di f di ordine n e di centro x_0 e è indicato con $T^n f$. Esso è dato da

$$P_n(x) = T^n f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Come conseguenza del teorema, si ha quindi la formula

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + o((x - x_0)^n) \quad \text{per } x \rightarrow x_0,$$

detta formula di Taylor con il resto di Peano. Questa formula è di estrema utilità nel calcolo dei limiti.

Osservazione 6.102. Scriviamo alcuni casi particolari della formula (6.3):

$$\begin{aligned} T_{x_0}^0 f &= P_0(x) = f(x_0) \\ T_{x_0}^1 f &= P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \\ T_{x_0}^2 f &= P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} (x - x_0)^2 \\ T_{x_0}^3 f &= P_3(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} (x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!} (x - x_0)^3 \\ T_{x_0}^n f &= P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \end{aligned}$$

Osservazione 6.103. Se $f(x) = \sum_{k=0}^m c_k (x - x_0)^k$ (f è un polinomio di grado $m \in \mathbb{N}$ in $(x - x_0)$), allora per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$T_{x_0}^n (f(x)) = \sum_{k=0}^{\min\{n, m\}} c_k (x - x_0)^k.$$

Esempio 6.104. Sia $f(x) = e^x$, poichè $f^{(n)}(x) = e^x$, $\forall n \in \mathbb{N}$, risulta $f^{(n)}(1) = e$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Pertanto

$$T_1^n (e^x) = \sum_{k=0}^n \frac{e}{k!} (x - 1)^k.$$

In particolare si ha

$$\begin{aligned} T_1^1 (e^x) &= e + e(x - 1), \\ T_1^2 (e^x) &= e + e(x - 1) + \frac{e}{2} (x - 1)^2. \end{aligned}$$

Esempio 6.105. Sia $f(x) = \sin x$. $\forall j \in \mathbb{N}$ si trova

$$\begin{aligned} f^{(4j)}(x) &= \sin x, & f^{(4j+1)}(x) &= \cos x, \\ f^{(4j+2)}(x) &= -\sin x, & f^{(4j+3)}(x) &= -\cos x. \end{aligned}$$

In particolare, $\forall m \in \mathbb{N}$, si ha $f^{(2m)}(0) = 0$, $f^{(2m+1)}(0) = (-1)^m$. Pertanto

$$T^{2n+1}(\sin x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

Ad esempio $T^1(\sin x) = x$,
 $T^3(\sin x) = x - \frac{x^3}{6}$.

Osservazione 6.106 (IMPORTANTE). Le formule seguenti descrivono come si costruisce il polinomio di Taylor della somma, prodotto e composizione di due funzioni f e g , a partire dai polinomi di Taylor delle funzioni f e g rispettivamente.

1. $T_{x_0}^n(f+g) = T_{x_0}^n f + T_{x_0}^n g$,
2. $T_{x_0}^n(fg) = T_{x_0}^n(T_{x_0}^n f \cdot T_{x_0}^n g)$,
3. $T_{x_0}^n(g \circ f) = T_{x_0}^n(T_{f(x_0)}^n g \circ T_{x_0}^n f)$.

6.9.2 Polinomi di Mac Laurin notevoli

Ricordiamo che, nel caso in cui $x_0 = 0$, il polinomio di Taylor P_n è detto *polinomio di Mac Laurin di f di ordine n e di centro x_0* e indicato con $T^n f$. Riportiamo qui di seguito i polinomi di Mac Laurin di alcune funzioni notevoli.

$$T^n(e^x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!},$$

$$T^n(\ln(1+x)) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k}, \quad x \neq -1$$

$$T^{2n+1}(\sin x) = T^{2n+2}(\sin x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

$$T^{2n}(\cos x) = T^{2n+1}(\cos x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!},$$

$$T^{2n+1}(\sinh x) = T^{2n+2}(\sinh x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

$$T^{2n}(\cosh x) = T^{2n+1}(\cosh x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^{2k}}{(2k)!},$$

$$T^n((1+x)^\alpha) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \dots + \binom{\alpha}{n}x^n, \quad x > -1, \alpha > 0$$

$$T^n((1-x)^{-1}) = \sum_{k=0}^n x^k, \quad x \neq 1$$

$$T^{2n+1}(\arctan)(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)}.$$

6.9.3 Sviluppi di Mac Laurin notevoli

Per $x \rightarrow 0$ si ha

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \dots + \binom{\alpha}{n}x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + o(x^3)$$

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5)$$

$$\arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

Esempio 6.107. Calcoliamo il polinomio di Taylor di ordine 2 e centro 0 della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \ln\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right) & \text{se } x \in]-\frac{1}{3}, 0[\cup]0, \frac{1}{3}[\\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Ricordando che si ha

$$\sin 3x = 3x - \frac{9}{2}x^3 + o(x^3)$$

e che $\ln(1+y) = y + o(y)$, si ha

$$\ln\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right) = \ln\left(1 - \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)\right) = -\frac{3}{2}x^2 + o(x^2),$$

cioè

$$T^2 f(x) = -\frac{3}{2}x^2.$$

I polinomi di Taylor possono essere molto utili nel calcolo dei limiti.

Esempio 6.108. Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^{\frac{1}{x \sin 2x}}.$$

Possiamo scrivere in forma esponenziale

$$\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^{\frac{1}{x \sin 2x}} = e^{\frac{1}{x \sin 2x} \ln\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)}.$$

Il limite dell'esponente (ricordando il limite fondamentale di $\frac{\sin y}{y}$ e l'Esempio 6.107) vale

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x \sin 2x} \ln\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2x^2} \ln\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\frac{3}{2}x^2 + o(x^2)\right) \frac{1}{2x^2} = -\frac{3}{4}.$$

Dunque il nostro limite vale $e^{-3/4}$.

Esempio 6.109. Calcoliamo il polinomio di Taylor di ordine 6 in 0 della funzione

$$f(x) = \ln(1+x^2) - x^2 \cos x.$$

Ricordiamo che

$$\ln(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + o(z^3) \quad \text{per } z \rightarrow 0$$

e che

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

per cui

$$\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^6 + o(x^6) \quad \text{per } x \rightarrow 0$$

e anche

$$x^2 \cos x = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{24}x^6 + o(x^6) \quad \text{per } x \rightarrow 0.$$

Quindi si ha

$$f(x) = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{24}\right)x^6 + o(x^6) = \frac{7}{24}x^6 + o(x^6) \quad \text{per } x \rightarrow 0,$$

e dunque

$$T^6 f(x) = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{24}\right)x^6 = \frac{7}{24}x^6.$$

Esempio 6.110. Calcoliamo il limite

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \cos x - \ln(1 + x^2)}{7x^2 \tan(x^4)}.$$

Ricordando che

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x^4}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1,$$

il limite è uguale a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \cos x - \ln(1 + x^2)}{7x^6}.$$

Per l'Esempio 6.109 si ha quindi

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{7x^6} \left(-\frac{7}{24}x^6 + o(x^6) \right) = -\frac{1}{24}.$$

Esempio 6.111. Calcolare il limite

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{\sin(x^{\frac{3}{2}})}}{(x - \sin x)\sqrt{x}}.$$

Per prima cosa semplifichiamo il limite ricordandoci che $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + o(x^3)$, per cui

$$L = 6 \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt[3]{\sin(x^{\frac{3}{2}})}}{x^3 \sqrt{x}}.$$

Per avere solo potenze intere cambiamo variabile, ponendo $y = \sqrt{x}$. Il limite diventa

$$\begin{aligned} 6 \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y - \sqrt[3]{\sin(y^3)}}{y^6 y} &= 6 \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt[3]{\frac{\sin(y^3)}{y^3}}}{y^6} \\ &= 6 \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt[3]{\frac{\sin t}{t}}}{t^2} \end{aligned}$$

(abbiamo usato il cambiamento di variabili $t = y^3$). Si ha

$$\frac{\sin t}{t} = \frac{t - \frac{1}{6}t^3 + o(t^3)}{t} = 1 - \frac{1}{6}t^2 + o(t^2)$$

e $\sqrt[3]{1+z} = (1+z)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}z + o(z)$, per cui

$$\sqrt[3]{\frac{\sin t}{t}} = \sqrt[3]{1 - \frac{1}{6}t^2 + o(t^2)} = 1 - \frac{1}{18}t^2 + o(t^2).$$

Dunque

$$\begin{aligned} L &= 6 \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - \sqrt[3]{\frac{\sin t}{t}}}{t^2} \\ &= 6 \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{18}t^2 + o(t^2)}{t^2} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Esempio 6.112. Calcolare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x(1 - \cos x)}.$$

Si ha

$$\sin x = T^3(\sin x) + o(x^3) = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3),$$

$$\cos x = T^3(\cos x) + o(x^3) = T^2(\cos x) + o(x^3) = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3).$$

Quindi si ha

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \left[x - \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right]}{x \left\{ 1 - \left[1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) \right] \right\}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^3)}{\frac{x^3}{2} + o(x^4)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{6} \frac{2}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

Capitolo 7

Cenni sulle funzioni convesse

Definizione 7.1. Sia I un intervallo di \mathbb{R} . Una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ si dice convessa se, comunque si prendano due punti $x_1, x_2 \in I$ e $\lambda, 0 \leq \lambda \leq 1$, si ha

$$f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2). \quad (7.1)$$

La funzione $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ si dice concava se $-g$ è convessa.

Se si pone $x = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$, al variare di $\lambda \in [0, 1]$ il punto x descrive tutto l'intervallo chiuso di estremi x_1 e x_2 .

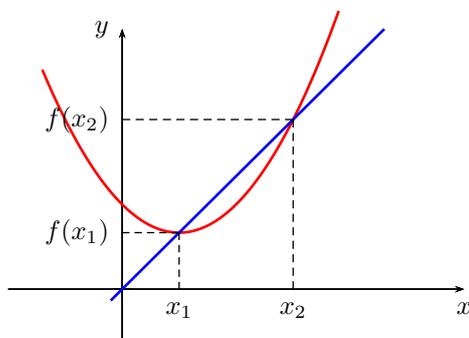
La condizione di convessità si può anche enunciare dicendo che, per ogni $x_1, x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$, e per ogni $x \in [x_1, x_2]$, si ha

$$f(x) \leq \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} f(x_1) + \frac{x_1 - x}{x_1 - x_2} f(x_2) = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} (x - x_1);$$

(l'espressione sopra scritta si ottiene dalla disuguaglianza della definizione (7.1) prendendo $\lambda = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2}$).

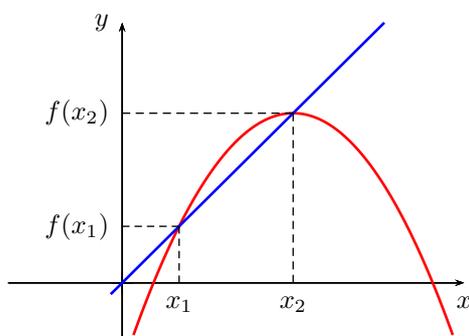
L'ultima espressione descrive la retta passante per i punti $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$, cosicché, dal punto di vista geometrico, la convessità di una funzione si può definire così: sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$,

- f è convessa in $I \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in I$ il segmento che congiunge $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ è al di sopra del grafico di f (\geq) nell'intervallo di estremi x_1 e x_2 .
- f è strettamente convessa in $I \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in I$ il segmento che congiunge $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ è strettamente al di sopra del grafico di f ($>$) nell'intervallo di estremi x_1 e x_2 .



Analogamente, la concavità si caratterizza dal punto di vista geometrico nella forma seguente: sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$,

- f è **concava** in $I \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in I$ il segmento che congiunge $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ è **al di sotto** del grafico di f (\leq) nell'intervallo di estremi x_1 e x_2 .
- f è **strettamente concava** in $I \Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in I$ il segmento che congiunge $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ è **strettamente al di sotto** del grafico di f ($<$) nell'intervallo di estremi x_1 e x_2 .



Si può dimostrare il seguente risultato importante.

Teorema 7.2. Sia I un intervallo di \mathbb{R} , $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ convessa e x_0 un punto di I . Allora la funzione

$$F(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

è crescente in $I \setminus \{x_0\}$.

Segue il seguente corollario:

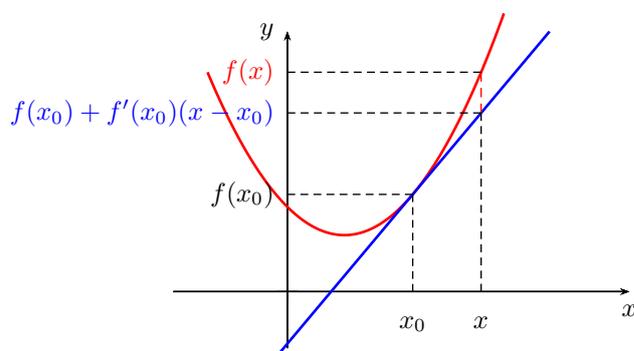
Corollario 7.3. Una funzione convessa in un intervallo I è continua in ogni punto interno a I . Se f non è derivabile in un punto interno x , allora x è un punto angoloso. Gli unici punti di eventuale discontinuità sono gli estremi dell'intervallo I .

7.1 Convessità e derivabilità

Supponiamo ora che la funzione f sia derivabile in I . Allora la convessità si caratterizza con il seguente teorema.

Teorema 7.4. *Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile in I . Condizione necessaria e sufficiente affinché f sia convessa in I è che, per ogni $x, x_0 \in I$, risulti*

$$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \quad (7.2)$$



Osservazione 7.5. La **retta tangente** è sempre (tranne il punto di contatto) **sotto** il **grafico** della **funzione f** .

Osservazione 7.6. Nelle ipotesi del Teorema 7.4, sia x_0 un punto stazionario. Allora, se f è convessa, da (7.2) segue che

$$f(x) \geq f(x_0), \quad \forall x \neq x_0$$

quindi $x_0 = \min_I f(x)$, cioè x_0 è un punto di minimo assoluto.

Teorema 7.7. *Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$.*

1. *Se f derivabile in I , allora*

- (a) f convessa $\Leftrightarrow f'$ crescente,
- (b) f concava $\Leftrightarrow f'$ decrescente.

2. *Se f è derivabile due volte in I , allora*

- (a) f convessa $\Leftrightarrow f''(x) \geq 0, \forall x \in I$,
- (b) f concava $\Leftrightarrow f''(x) \leq 0, \forall x \in I$.

Esempio 7.8 (Esponenziale). Sia $f(x) = a^x$, dove $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. Si ha

$$f'(x) = a^x \ln a \quad \text{e} \quad \boxed{f''(x) = a^x (\ln a)^2 > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}}.$$

Quindi f è STRETTAMENTE CONVESSA su \mathbb{R} .

Esempio 7.9 (Logaritmo). Sia $f(x) = \log_a x$, dove $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ e $x \in \text{dom} f = \mathbb{R}^+$. Si ha

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln a} \quad \text{e} \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2 \ln a}.$$

Quindi

- se $0 < a < 1$, $\ln a < 0$, $f''(x) > 0$, $\forall x \in \text{dom} f$ e f è STRETTAMENTE CONVESSA su \mathbb{R}^+ ,
- se $a > 1$, $\ln a > 0$, $f''(x) < 0$, $\forall x \in \text{dom} f$ e f è STRETTAMENTE CONCAVA su \mathbb{R}^+ .

Esempio 7.10 (Potenze). Sia $f(x) = x^\alpha$, dove $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x > 0$. Si ha $f''(x) = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2}$.

Quindi

- se $\alpha < 0$ o $\alpha > 1$, $f''(x) > 0$, $\forall x > 0$ e f è STRETTAMENTE CONVESSA,
- se $0 < \alpha < 1$, $f''(x) < 0$, $\forall x > 0$ e f è STRETTAMENTE CONCAVA.
- se $\alpha = 0$, $f(x) = 1$, $\forall x > 0$, f è SIA CONVESSA CHE CONCAVA
- se $\alpha = 1$, $f(x) = x$, $\forall x > 0$, f è SIA CONVESSA CHE CONCAVA.

Definizione 7.11. Siano $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in]a, b[$. Diciamo che x_0 è PUNTO DI FLESSO per f se

(i) esiste un intorno **destro** di x_0 nel quale f è **convessa (concava)**

ed

(ii) esiste un intorno **sinistro** di x_0 nel quale f è **concava (convessa)**.

Proposizione 7.12. Sia x_0 un punto di flesso per f . Se esiste $f''(x_0)$, allora $f''(x_0) = 0$.

Osservazione 7.13. La condizione è NECESSARIA ma NON SUFFICIENTE. Per esempio, sia $f(x) = x^4$. Si ha $f'(0) = 0$ e $f''(0) = 0$. $x_0 = 0$ è PUNTO DI MINIMO, NON DI FLESSO.

Capitolo 8

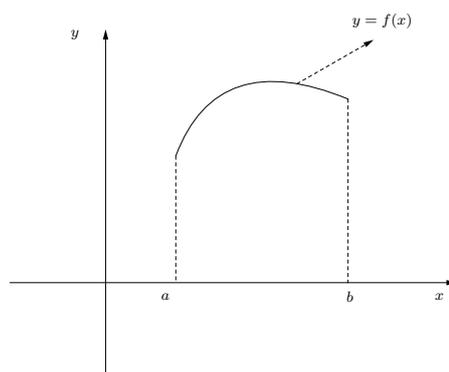
Integrale di Riemann

In questo capitolo svilupperemo la teoria dell'integrazione secondo Riemann per funzioni di una variabile reale.

8.1 Motivazioni

Consideriamo il seguente problema.

Calcolo di un'area. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e positiva il cui grafico sia quello rappresentato in figura.



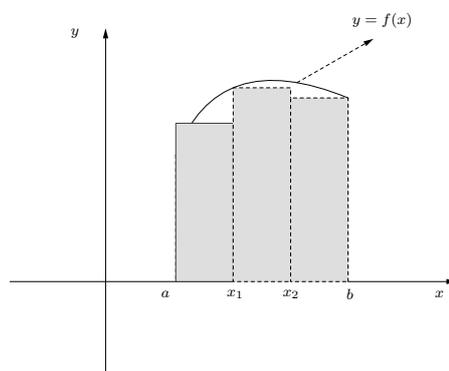
L'area A della regione di piano compresa tra il grafico di f e il segmento $[a, b]$ riportato sull'asse delle x non è calcolabile elementarmente se il grafico di f non è rettilineo. Un modo per calcolare A può essere quello di usare il seguente processo di approssimazione. Dividiamo l'intervallo $[a, b]$ tramite dei punti di suddivisione x_1, x_2, \dots, x_n e poniamo per comodità $x_0 = a$ e $x_{n+1} = b$. Sia I_j l'intervallo $[x_j, x_{j+1}]$. Se I_j è abbastanza piccolo, la variazione di f su I_j sarà piccola, cioè f sarà approssimativamente costante. Sia $\xi_j \in I_j$: un'approssimazione dell'area A_j sottesa da f su I_j è dunque

$$A_j \sim f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j).$$

Concludiamo che un'approssimazione di A è data dalla somma delle A_j , cioè

$$A \sim \tilde{A} = \sum_{j=0}^n f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j). \quad (8.1)$$

Se la scelta dei punti di suddivisione è operata in modo da risultare abbastanza fitta, ci si aspetta che \tilde{A} sia una buona approssimazione di A : anzi, più la suddivisione è fitta, più il valore \tilde{A} si avvicinerà ad A .



8.2 Definizione di integrale

Sia $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo chiuso e limitato con $a < b$, e sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata, cioè esiste una costante $M \geq 0$ tale che per ogni $x \in [a, b]$

$$-M \leq f(x) \leq M.$$

Diamo ora una formulazione matematica rigorosa delle idee viste nella sezione precedente. Introduciamo le seguenti definizioni:

1. Diciamo che $S = \{x_0, x_1, \dots, x_{n+1}\}$ è una **suddivisione** di $[a, b]$ se

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} = b.$$

2. Sia $\xi_j \in [x_j, x_{j+1}]$: diremo che la quantità

$$\Sigma(f, S) := \sum_{j=0}^n f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j)$$

è una **somma di Riemann** di f relativa alla suddivisione S . Come visto nella sezione precedente, le somme di Riemann nascono in modo naturale nelle applicazioni.

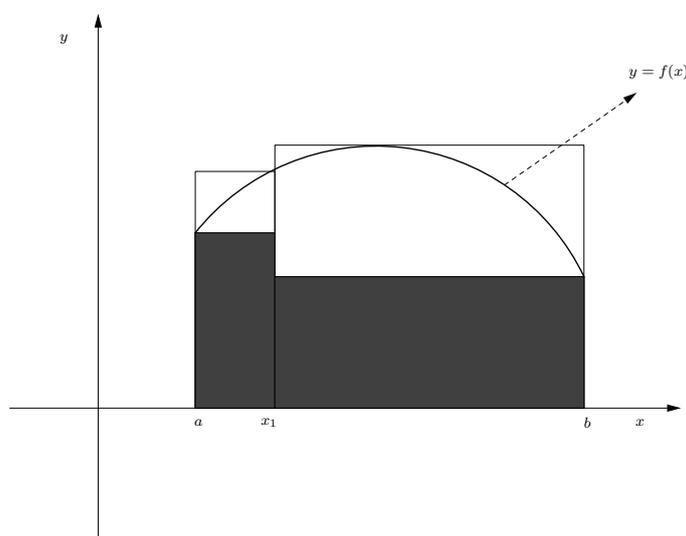
3. Poniamo

$$\Sigma'(f, S) := \sum_{j=0}^n \left[\inf_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x) \right] (x_{j+1} - x_j)$$

e

$$\Sigma''(f, S) := \sum_{j=0}^n \left[\sup_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x) \right] (x_{j+1} - x_j)$$

I numeri reali $\Sigma'(S, f)$ e $\Sigma''(S, f)$ si chiamano rispettivamente **somma inferiore** e **somma superiore** associate alla funzione f e alla suddivisione S .



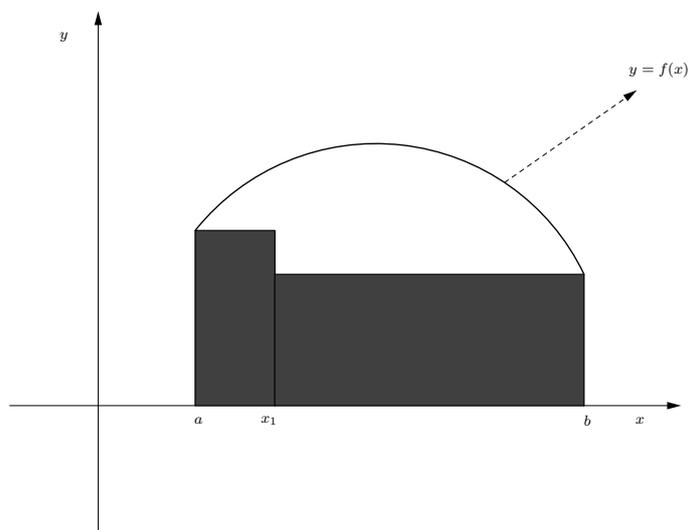
Chiaramente, ogni somma di Riemann relativa a S è compresa tra $\Sigma'(f, S)$ e $\Sigma''(f, S)$, ossia

$$\Sigma'(f, S) \leq \Sigma(f, S) \leq \Sigma''(f, S).$$

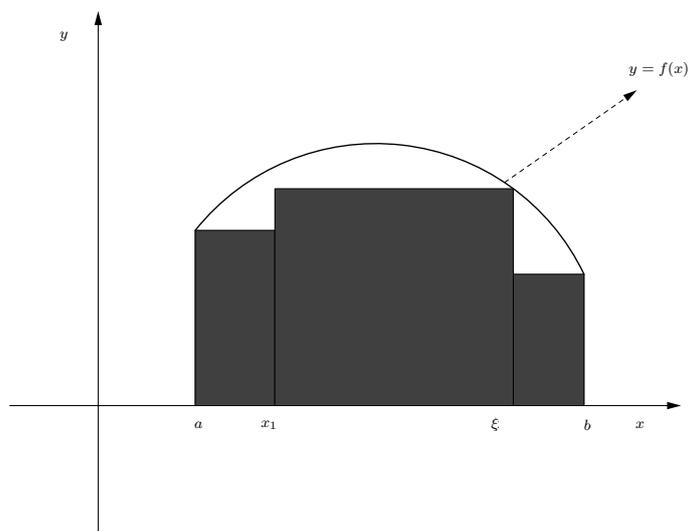
4. Diciamo che una suddivisione T è un raffinamento della suddivisione S se T contiene i punti di suddivisione di S , cioè $S \subseteq T$. In tal caso si ha che

$$\Sigma'(f, S) \leq \Sigma'(f, T) \quad \text{e} \quad \Sigma''(f, S) \geq \Sigma''(f, T).$$

E' facile capire queste disuguaglianze nel caso in cui T si ottiene da S aggiungendo un punto di suddivisione ξ : il risultato generale discende da questo, aggiungendo un punto alla volta. Se $S = \{a, x_1, b\}$ e $T = \{a, x_1, \xi, b\}$ si ha per le somme inferiori



e



Dunque “raffinando” la suddivisione di $[a, b]$ la somma inferiore cresce, mentre quella superiore decresce.

5. Poniamo

$$\mathcal{I}'(f) := \sup_S \Sigma'(f, S) \quad \text{e} \quad \mathcal{I}''(f) := \inf_S \Sigma''(f, S).$$

I numeri reali $\mathcal{I}'(f)$ e $\mathcal{I}''(f)$ si dicono rispettivamente **integrale inferiore** e **integrale superiore** di f su $[a, b]$.

Abbiamo immediatamente la disuguaglianza $\mathcal{I}'(f) \leq \mathcal{I}''(f)$.

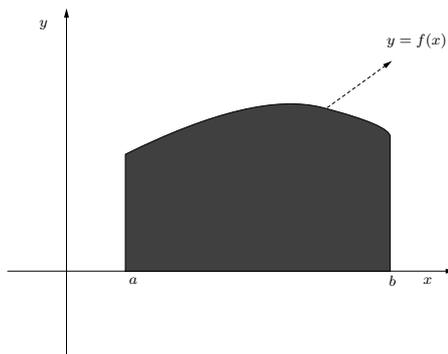
Possiamo ora dare la definizione di integrabilità nel senso di Riemann.

Definizione 8.1 (Integrabilità secondo Riemann). Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, e sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata. Diciamo che f è integrabile secondo Riemann se $\mathcal{I}'(f) = \mathcal{I}''(f)$. Tale valore si dice integrale di f sull'intervallo $[a, b]$, e si indica con i simboli

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{oppure} \quad \int_a^b f dx.$$

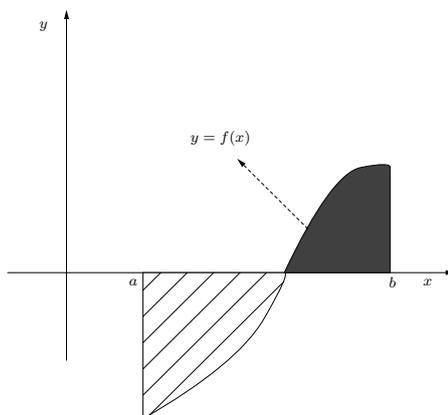
Poichè in questo corso useremo solo l'integrazione secondo Riemann, ometteremo di indicare che l'integrabilità è intesa nel senso di Riemann.

Osservazione 8.2 (Interpretazione geometrica). Se f è positiva, $\int_a^b f(x) dx$ può interpretarsi come l'area compresa tra l'asse delle ascisse e il grafico di f .



Nel caso in cui $f(x) \leq 0$ per ogni $x \in [a, b]$, $\int_a^b f(x) dx$ rappresenta l'area tra f e l'asse delle ascisse ma con il segno negativo.

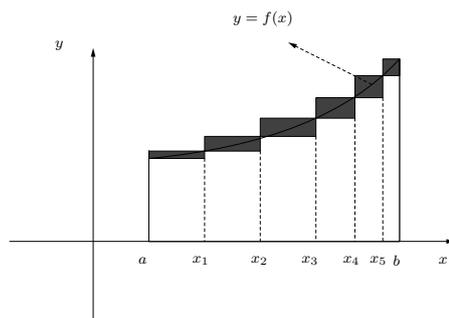
Se f cambia segno sull'intervallo $[a, b]$, $\int_a^b f(x) dx$ tiene conto del "bilanciamento" tra le aree positive e quelle negative.



La seguente proposizione contiene una caratterizzazione della classe delle funzioni integrabili.

Proposizione 8.3 (C.n.s. per l'integrabilità). Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, e sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata. Allora f è integrabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una suddivisione S_ε di $[a, b]$ tale che

$$\Sigma''(f, S_\varepsilon) - \Sigma'(f, S_\varepsilon) \leq \varepsilon. \quad (8.2)$$



Geometricamente possiamo interpretare il risultato in questo modo: f è integrabile se e solo se il suo grafico può ricoprirsì con un numero finito di rettangoli, associati ad una suddivisione la somma delle cui aree è piccola a piacere.

Osservazione 8.4. Sia S_ε una suddivisione di $[a, b]$ tale che valga (8.2), e sia

$$\Sigma(f, S_\varepsilon) = \sum_{j=0}^n f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j)$$

una somma di Riemann associata a S_ε . Dalle disuguaglianze

$$\Sigma'(f, S_\varepsilon) \leq \Sigma(f, S_\varepsilon) \leq \Sigma''(f, S_\varepsilon) \quad (-\Sigma''(f, S_\varepsilon) \leq -\Sigma(f, S_\varepsilon) \leq -\Sigma'(f, S_\varepsilon))$$

e

$$\Sigma'(f, S_\varepsilon) \leq \int_a^b f(x) dx \leq \Sigma''(f, S_\varepsilon)$$

ricaviamo la disuguaglianza

$$-(\Sigma''(f, S_\varepsilon) - \Sigma'(f, S_\varepsilon)) \leq \int_a^b f(x) dx - \Sigma(f, S_\varepsilon) \leq \Sigma''(f, S_\varepsilon) - \Sigma'(f, S_\varepsilon).$$

Grazie a (8.2) si ha quindi

$$-\varepsilon \leq \int_a^b f(x) dx - \Sigma(f, S_\varepsilon) \leq \varepsilon,$$

ossia

$$\left| \int_a^b f(x) dx - \Sigma(f, S_\varepsilon) \right| < \varepsilon. \quad (8.3)$$

Dunque una qualsiasi somma di Riemann relativa S_ε fornisce una approssimazione dell'integrale di f su $[a, b]$.

8.3 Classi di funzioni integrabili

In questa sezione vediamo che la classe di funzioni integrabili è molto ampia.

1. Chiaramente **sono integrabili le funzioni costanti**, ed anzi sappiamo calcolare anche il valore del loro integrale

$$\int_a^b c \, dx = c(b - a).$$

2. **Sono integrabili le funzioni continue** $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Vale infatti il seguente teorema:

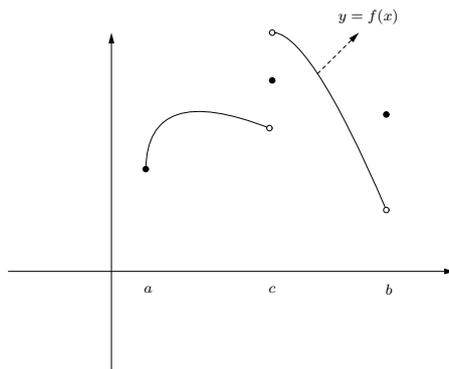
Teorema 8.5. *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Allora f è integrabile secondo Riemann.*

3. **Sono integrabili le funzioni continue a tratti.** Siamo interessati ad integrare anche funzioni discontinue. Una classe di funzioni discontinue molto utili nelle applicazioni sono le funzioni **continue a tratti**.

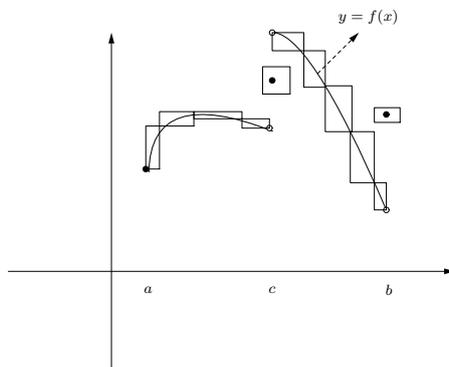
Definizione 8.6. *Diciamo che $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è continua a tratti se esiste una suddivisione $S = \{x_0, x_1, \dots, x_{n+1}\}$ di $[a, b]$ tale che f è continua su ogni intervallo aperto $]x_j, x_{j+1}[$ ed esistono finiti i limiti*

$$\lim_{x \rightarrow x_j^+} f(x) \quad e \quad \lim_{x \rightarrow x_{j+1}^-} f(x).$$

Un grafico tipico di funzioni continue a tratti è il seguente.



Anche le funzioni continue a tratti sono integrabili. A parte i valori in corrispondenza dei punti della suddivisione S , il grafico di f è contenuto nell'unione di grafici di funzioni continue: dunque in base al punto precedente, possiamo ricoprirlo tramite un numero finito di rettangoli di area piccola a piacere. I punti eccezionali sono poi in numero finito: dunque possiamo ricoprirli con un numero finito di quadrati di area piccola a piacere. Globalmente, il grafico di f viene così ricoperto con rettangoli la somma delle cui aree è piccola a piacere: dunque f è integrabile.



Osservazione 8.7 (Esempio di funzione NON integrabile secondo Riemann). Non tutte le funzioni limitate sono integrabili. Ad esempio non lo è la funzione $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ data da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ è razionale} \\ 0 & \text{se } x \text{ è irrazionale} \end{cases}$$

poichè $\mathcal{I}'(f) = 0$ e $\mathcal{I}''(f) = 1$. La funzione f è detta *funzione di Dirichlet*.

8.4 Proprietà dell'integrale

Vediamo ora alcune proprietà del calcolo integrale molto utili nelle applicazioni.

1. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ due funzione integrabili, e siano $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$. Si può innanzitutto dimostrare che le funzioni

$$f + g, \quad \lambda f, \quad |f|$$

e la restrizione di f a qualsiasi sottointervallo sono a loro volta integrabili. Inoltre valgono le seguenti proprietà.

(a) **Linearità:**

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx;$$

(b) **Confronto:** se $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [a, b]$, si ha

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx;$$

(c) **Suddivisione:** se $c \in]a, b[$

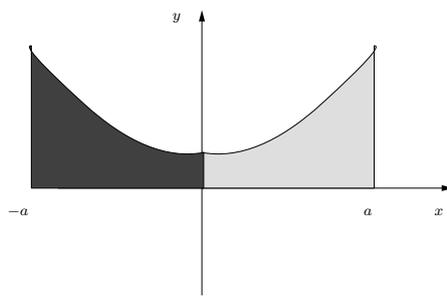
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx;$$

(d) **Confronto con il modulo:**

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

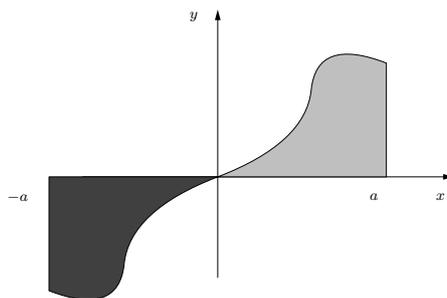
2. Se la funzione f è definita su un intervallo simmetrico rispetto all'origine, cioè del tipo $[-a, a]$ con $a > 0$, e f possiede particolari **simmetrie**, esse si riflettono sul calcolo dell'integrale. Se $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione **pari** (cioè $f(-x) = f(x)$), allora

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$



Se invece f è una funzione **dispari** (cioè $f(-x) = -f(x)$) si ha

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$



8.5 La media integrale

Definizione 8.8. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione integrabile. Chiamiamo **media integrale** di f su $[a, b]$ il numero

$$M_f = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Osservazione 8.9 (Origine del nome Media). Il nome Media Integrale nasce dal fatto che la definizione di M_f corrisponde all'usuale media aritmetica. Infatti, se f è una funzione continua

su $[a, b]$, allora sappiamo che è integrabile .

Sia S la suddivisione di $[a, b]$ in n intervalli uguali di ampiezza $(b-a)/n$. Si può dimostrare che, relativamente ad essa, la somma inferiore e la somma superiore si discostano di una quantità sempre più piccola al crescere di n (perchè f è integrabile).

Scegliamo un punto ξ_i qualsiasi all'interno dell' i -esimo intervallo della suddivisione S e sia

$$f(\xi_1) \frac{b-a}{n} + f(\xi_2) \frac{b-a}{n} + \cdots + f(\xi_n) \frac{b-a}{n}$$

una somma di Riemann generica associata alla suddivisione S . Per definizione di somma inferiore e superiore abbiamo la disuguaglianza

$$\Sigma'(f, S) \leq f(\xi_1) \frac{b-a}{n} + f(\xi_2) \frac{b-a}{n} + \cdots + f(\xi_n) \frac{b-a}{n} \leq \Sigma''(f, S).$$

Poichè $\Sigma'(f, S)$ e $\Sigma''(f, S)$ sono sempre più vicini tra loro e vicini all'integrale di f al crescere di n , concludiamo che per n sempre più grande la quantità

$$\frac{f(\xi_1) + f(\xi_2) + \cdots + f(\xi_n)}{n} (b-a) \sim \int_a^b f(x) dx$$

e cioè

$$\frac{f(\xi_1) + f(\xi_2) + \cdots + f(\xi_n)}{n} \sim \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Dunque l'integrale di f diviso per $b-a$ rappresenta una sorta di media aritmetica dei valori della f (i valori di f sono infiniti, noi abbiamo operato in un certo senso un campionamento).

Osservazione 8.10 (Interpretazione geometrica). Scrivendo la relazione precedente nella forma

$$\int_a^b f(x) dx = M_f (b-a),$$

deduciamo che M_f ha il seguente significato geometrico: tenendo conto della convenzione sui segni sulle aree, l'area associata al grafico di f è equivalente ad un rettangolo di base $b-a$ e altezza M_f .

Osservazione 8.11. Bisogna notare che se f è discontinua, il valore M_f potrebbe non essere mai assunto dalla funzione f . Infatti, essendo per ogni $x \in [a, b]$

$$\inf_{[a,b]} f \leq f(x) \leq \sup_{[a,b]} f,$$

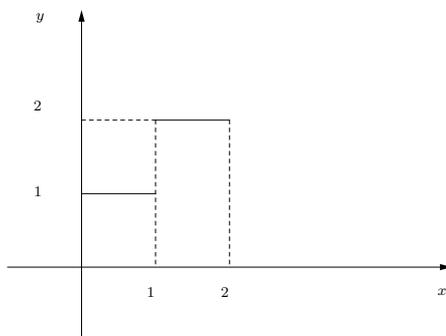
dal teorema del confronto (integrando su $[a, b]$) segue che

$$(b-a) \inf_{[a,b]} f \leq \int_a^b f(x) dx \leq (b-a) \sup_{[a,b]} f.$$

Dividendo per $(b-a)$ si ha

$$\inf_{[a,b]} f \leq M_f \leq \sup_{[a,b]} f$$

ma non è detto che esista $x \in [a, b]$ tale che $f(x) = M_f$: in altre parole M_f potrebbe non essere mai assunto dalla funzione. Questa situazione capita ad esempio per la funzione riportata in figura:



Si ha infatti $M_f = 3/2$ (basta fare la somma delle aree dei due rettangoli) ed f assume solo i valori 1 e 2. Dunque non esiste $x \in [a, b]$ tale che $M_f = f(x)$, ossia M_f non è assunto dalla funzione f .

Nel caso delle funzioni continue, la media integrale M_f invece è effettivamente un valore assunto da f .

Teorema 8.12 (Teorema della media). *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora esiste $c \in [a, b]$ tale che $f(c) = M_f$ e cioè*

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a).$$

Dimostrazione. Siano m e M il minimo ed il massimo di f su $[a, b]$: dalla disuguaglianza

$$\forall x \in [a, b] : m \leq f(x) \leq M,$$

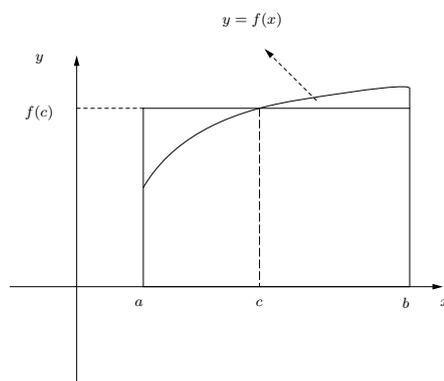
integrando su $[a, b]$ ed utilizzando la proprietà del confronto si ha la disuguaglianza

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b - a),$$

che dividendo per $b - a$ porta a

$$m \leq M_f \leq M.$$

Poichè f assume, essendo continua, tutti i valori intermedi tra m e M , si ha che esiste $c \in [a, b]$ tale che $f(c) = M_f$, ed il teorema è così dimostrato. \square



8.6 I teoremi fondamentali del calcolo

In questa sezione collegheremo il problema dell'integrazione al problema del calcolo della primitiva di una funzione; in ciò consistono i teoremi fondamentali del calcolo.

8.6.1 Il problema della primitiva

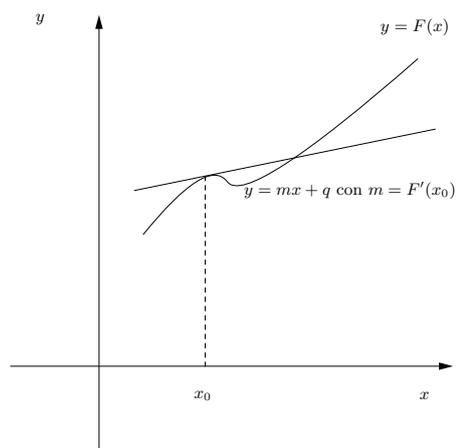
Definizione 8.13. Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto, e siano $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ e $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni. Diciamo che F è una **primitiva** di f su I se F è derivabile su I e si ha

$$\forall x \in I : F'(x) = f(x).$$

Esempio 8.14. $F(x) = x^2$ è una primitiva su \mathbb{R} di $f(x) = 2x$.

$G(x) = \frac{\sin(2x)}{2}$ è una primitiva su \mathbb{R} di $g(x) = \cos(2x)$.

Osservazione 8.15 (Interpretazione geometrica). Geometricamente, una primitiva F di f è una funzione tale che per ogni $x_0 \in I$ la tangente al grafico di F nel punto x_0 è una retta il cui coefficiente angolare è proprio pari a $f(x_0)$.



Definizione 8.16. L'insieme delle primitive di f (se esistono) si usa indicare con il simbolo

$$\int f(x) dx$$

chiamato *integrale indefinito*.

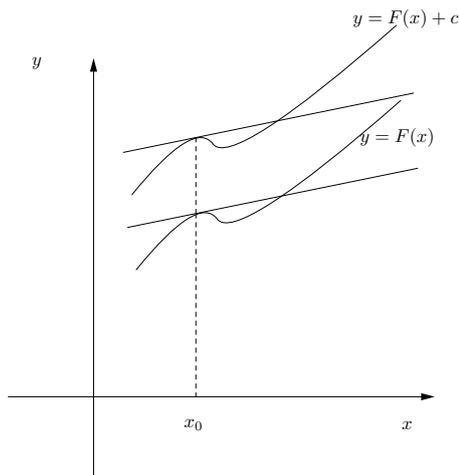
Osservazione 8.17. Attenzione, ribadiamo il fatto che l'integrale indefinito NON è un numero, ma è un insieme di funzioni. La scelta del simbolo già anticipa però il legame con il problema dell'integrazione.

Il **problema delle primitive** può enunciarsi così: **determinare l'insieme di tutte le primitive su I della funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$** . Tale problema non è affatto semplice: innanzitutto f potrebbe non ammettere primitive; oppure potrebbe ammetterle, ma esse non risultano facili da calcolare esplicitamente. Una cosa che possiamo facilmente notare è che se f ammette una

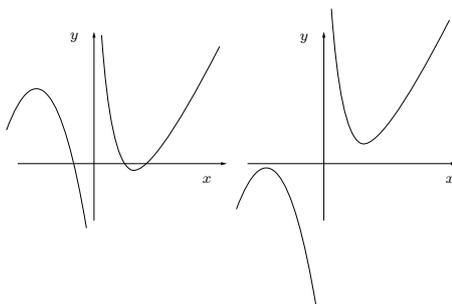
primitiva F , allora anche $F + c$, con $c \in \mathbb{R}$, è una primitiva di f : infatti derivando si ha che la costante sparisce, così che

$$(F + c)'(x) = F'(x) = f(x).$$

Lo stesso fatto può capirsi geometricamente in termini di traslazioni del grafico di F .



Infatti traslando in verticale il grafico di F , si ottiene una nuova curva tale che la retta tangente nel punto x_0 ha chiaramente coefficiente angolare pari ancora a $f(x_0)$: dunque la nuova funzione è ancora una primitiva di f . Concludiamo che, **se l'insieme delle primitive è non vuoto, esso contiene infinite funzioni**, in particolare quelle ottenute sommando una costante arbitraria. Il ragionamento geometrico sopra illustrato può farci capire una cosa molto importante: se il grafico di F si compone di più pezzi, cioè f non è definita su un intervallo ma su un'unione di intervalli, allora ogni tratto del grafico può essere traslato in maniera indipendente dagli altri. Di conseguenza la generica primitiva di f può venire a dipendere da tante costanti arbitrarie.



Ad esempio la funzione

$$f(x) = -\frac{1}{x^2}$$

ammette come primitive tutte le funzioni della forma

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} + c_1 & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{x} + c_2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

con in generale $c_1 \neq c_2$.

Nel caso in cui f sia definita su un intervallo, le primitive dipendono da una sola costante arbitraria.

Proposizione 8.18 (Due primitive su un intervallo differiscono per una costante).

Siano F, \tilde{F} due primitive di f sull'intervallo I . Allora esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che $\tilde{F} = F + c$ (cioè $\tilde{F}(x) = F(x) + c$ per ogni $x \in \mathbb{R}$).

Dimostrazione. Per vederlo, basta provare che la funzione $G(x) = \tilde{F}(x) - F(x)$ è costante. Infatti si ha

$$G'(x) = (\tilde{F}(x) - F(x))' = \tilde{F}'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

e cioè la funzione G ha derivata nulla in ogni punto: poichè G è definita su un intervallo I , per ogni $[a, b] \subseteq I$ si ha per il Teorema di Lagrange che esiste $c \in]a, b[$ tale che

$$G(b) - G(a) = G'(c)(b - a) = 0,$$

cioè $G(b) = G(a)$. Dunque G è una funzione costante. □

Integrali indefiniti elementari Diamo ora gli integrali indefiniti di **alcune** funzioni elementari.

$$\forall r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \quad \int x^r dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + c, \quad (8.4a)$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) + c, \quad (8.4b)$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \int \sin(\alpha x) dx = -\frac{1}{\alpha} \cos(\alpha x) + c, \quad (8.4c)$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \int \cos(\alpha x) dx = \frac{1}{\alpha} \sin(\alpha x) + c, \quad (8.4d)$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \int \frac{1}{\cos^2(\alpha x)} dx = \int (1 + \tan^2(\alpha x)) dx = \frac{1}{\alpha} \tan(\alpha x) + c, \quad (8.4e)$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \int e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} e^{\alpha x} + c, \quad (8.4f)$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \int \frac{1}{1 + \alpha^2 x^2} dx = \frac{1}{\alpha} \arctan(\alpha x) + c. \quad (8.4g)$$

Generalizzazione della tabella degli integrali indefiniti elementari. Sia $g : I \rightarrow \mathbb{R}$. Diamo la seguente estensione della tabella degli integrali indefiniti elementari, che può essere

giustificata usando la formula di integrazione per sostituzione (che vedremo più avanti):

$$\forall r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\} \quad \int g(x)^r g'(x) dx = \frac{g(x)^{r+1}}{r+1} + c, \quad (8.5a)$$

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \ln(|g(x)|) + c, \quad (8.5b)$$

$$\int \sin(g(x))g'(x) dx = -\cos(g(x)) + c, \quad (8.5c)$$

$$\int \cos(g(x))g'(x) dx = \sin(g(x)) + c, \quad (8.5d)$$

$$\int \frac{g'(x)}{\cos^2(g(x))} dx = \int g'(x) (1 + \tan^2(g(x))) dx = \tan(g(x)) + c, \quad (8.5e)$$

$$\int g'(x)e^{g(x)} dx = e^{g(x)} + c, \quad (8.5f)$$

$$\int \frac{g'(x)}{1+g(x)^2} dx = \arctan(g(x)) + c. \quad (8.5g)$$

Osservazione 8.19. Il problema del calcolo delle primitive di una funzione sembra a priori indipendente dalla teoria dell'integrazione e dal problema del calcolo degli integrali. I due problemi, invece, sono strettamente collegati e il legame è fornito dal primo teorema fondamentale del calcolo degli integrali che illustreremo nella prossima sezione.

8.6.2 Il primo teorema fondamentale del calcolo

Per formulare i teoremi fondamentali del calcolo, abbiamo bisogno della seguente convenzione sui segni. Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è integrabile e se $\alpha, \beta \in [a, b]$ con $\alpha < \beta$, poniamo

$$\int_{\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 0 \quad \text{e} \quad \int_{\beta}^{\alpha} f(x) dx := -\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx.$$

Anche con questa convenzione abbiamo che per ogni $\alpha, \beta, \gamma \in [a, b]$ si ha

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx,$$

cioè vale ancora una formula di suddivisione per l'integrale.

Possiamo enunciare ora il primo teorema fondamentale del calcolo: grazie ad esso vediamo che il procedimento di integrazione fornisce l'esistenza di una primitiva per funzioni continue.

Teorema 8.20 (Primo Teorema Fondamentale del Calcolo). *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Sia $A : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da*

$$A(x) := \int_a^x f(t) dt.$$

Allora A è derivabile per ogni $x \in]a, b[$ e si ha

$$A'(x) = f(x) \quad \forall x \in]a, b[.$$

Dimostrazione. La derivata di A in $x \in]a, b[$ è data dal limite del rapporto incrementale

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h}.$$

Esso è ben definito perchè per h piccolo si ha sicuramente $x+h \in]a, b[$. Inoltre abbiamo che

$$\begin{aligned} A(x+h) - A(x) &= \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \\ &= \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \\ &= \int_x^{x+h} f(t) dt. \end{aligned}$$

Se $h > 0$, per il teorema della media esiste $\xi_h \in [x, x+h]$ tale che

$$\int_x^{x+h} f(t) dt = f(\xi_h)h.$$

Se $h < 0$, per la convenzione sui segni si ha

$$\int_x^{x+h} f(t) dt = - \int_{x+h}^x f(t) dt$$

così che per il teorema della media esiste $\xi_h \in [x+h, x]$ tale che

$$\int_x^{x+h} f(t) dt = -f(\xi_h)(-h) = f(\xi_h)h.$$

Concludiamo che per ogni h positivo o negativo esiste ξ_h appartenente all'intervallo determinato da x e $x+h$ tale che

$$A(x+h) - A(x) = f(\xi_h)h$$

e cioè

$$\frac{A(x+h) - A(x)}{h} = f(\xi_h).$$

Facciamo ora tendere $h \rightarrow 0$: si ha $\xi_h \rightarrow x$, ed essendo f continua $f(\xi_h) \rightarrow f(x)$. Dunque si ha

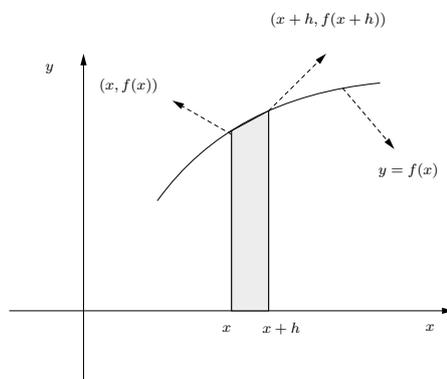
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = f(x)$$

e la tesi è dimostrata. □

Osservazione 8.21. Il risultato del primo teorema fondamentale del calcolo può essere compreso tramite il seguente ragionamento geometrico: la quantità

$$A(x+h) - A(x)$$

rappresenta l'area della regione R_h determinata da f sull'intervallo $[x, x + h]$.



R_h è un poligono con un lato curvilineo, quello relativo al grafico di f che congiunge i punti $(x, f(x))$ e $(x + h, f(x + h))$: essendo f continua, per h piccolo il lato curvilineo differisce poco da quello orizzontale ad altezza $f(x)$. L'area di R_h è dunque approssimativamente quella del rettangolo di base $[x, x + h]$ e altezza $f(x)$, e tale approssimazione è sempre migliore al tendere di h a zero. Ricaviamo

$$A(x + h) - A(x) \sim f(x)h$$

da cui

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{A(x + h) - A(x)}{h} = A'(x) = f(x).$$

Questo ragionamento intuitivo mostra che il risultato del teorema è valido nella sola ipotesi della continuità di f in x .

Osservazione 8.22. Come conseguenza del Primo Teorema Fondamentale del Calcolo deduciamo che le funzioni continue $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ammettono sempre una primitiva, data dalla funzione integrale $A(x) = \int_a^x f(t) dt$. Una qualunque altra primitiva F di f si ottiene così aggiungendo una costante arbitraria alla funzione

$$A(x) = \int_a^x f(t) dt$$

ossia

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt + c$$

dove c è una costante arbitraria. Dunque le primitive di una funzione continua si costruiscono facendo uso del procedimento di integrazione.

8.6.3 IL secondo teorema fondamentale del calcolo

Guardiamo ora il legame tra primitiva ed integrazione osservato al punto precedente nel senso opposto. Di questo si occupa il Secondo Teorema Fondamentale del Calcolo.

Teorema 8.23 (Secondo Teorema Fondamentale del Calcolo). *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, e sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora per ogni $a, b \in I$ si ha*

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

dove F è una qualsiasi primitiva di f .

Dimostrazione. Sappiamo che f ammette primitive su I , ed, anzi, una primitiva di f è data ad esempio da

$$A(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Poiché due primitive di f differiscono per una costante su I , si ha che esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $x \in I$

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) + c.$$

Se scegliamo $x = a$, si ottiene

$$0 = \int_a^a f(t) dt = F(a) + c$$

e cioè $c = -F(a)$. Si ha dunque

$$\int_a^x f(t) dt = F(x) - F(a).$$

Sostituendo $x = b$ si ha

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

che è la tesi. □

Si scrive spesso $F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$, così che la conclusione del teorema si scrive

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b.$$

Dunque concludiamo che il procedimento di integrazione di una funzione continua f , anziché compiersi secondo definizione analizzando somme inferiori e superiori (che è laborioso), può svolgersi trovando una primitiva F e calcolando la differenza $F(b) - F(a)$. Vediamo alcuni esempi.

1. Calcolare $\int_1^5 x^3 dx$. Una primitiva su \mathbb{R} di $f(x) = x^3$ è $F(x) = \frac{x^4}{4}$ poiché

$$\left(\frac{x^4}{4}\right)' = \frac{1}{4}(x^4)' = \frac{1}{4}4x^3 = x^3.$$

Dunque

$$\int_1^5 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^5 = \frac{5^4 - 1}{4}.$$

2. Calcolare

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) dx.$$

Una primitiva di $\sin(2x)$ è $-\frac{\cos 2x}{2}$. Dunque

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) dx = \left[-\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\pi/2} = -\frac{\cos \pi}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Il Secondo Teorema Fondamentale del Calcolo sposta l'attenzione dalle somme inferiori e superiori al problema di trovare una primitiva. A partire dalle regole di derivazione, bisogna dunque capire cosa succede andando all'“indietro”. Il teorema è dunque efficace per risolvere gli integrali se disponiamo di un bagaglio sufficientemente ampio di funzioni di cui sappiamo calcolare la primitiva.

8.7 Formule di integrazione

In questa sezione vediamo due procedimenti di integrazione molto utili nelle applicazioni: l'integrazione per parti e l'integrazione per sostituzione.

8.7.1 Integrazione per parti

L'integrazione per parti riguarda essenzialmente l'integrazione di funzioni che si presentano sotto forma di prodotto.

Proposizione 8.24 (Calcolo dell'integrale per parti). *Sia I un intervallo in \mathbb{R} e siano $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni derivabili con derivata continua. Allora per ogni $a, b \in I$ abbiamo che*

$$\int_a^b f(x)g'(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx.$$

Dimostrazione. Dalla derivazione di un prodotto si ha $(fg)' = f'g + fg'$ da cui

$$fg' = (fg)' - f'g.$$

Per l'ipotesi su f e g , le funzioni che compaiono nella formula sono continue e dunque integrabili. Se integriamo tra a e b , applicando le proprietà dell'integrale ed il Secondo Teorema Fondamentale del Calcolo si ha

$$\int_a^b fg' dx = \int_a^b [(fg)' - f'g] dx = \int_a^b (fg)' dx - \int_a^b f'g dx = [fg]_a^b - \int_a^b f'g dx$$

che è la tesi. □

Per applicare l'integrazione per parti occorre decidere quale funzione considerare come f e quale come g : la scelta è dettata dall'esperienza. La formula sottintende che il problema del calcolo di una primitiva di $f'g$ debba essere più semplice di quello di partenza fg' .

Esempio 8.25. Consideriamo

$$\int_0^1 xe^x dx.$$

Scegliendo $f(x) = x$ e $g'(x) = e^x$ si ha $g(x) = e^x$ da cui

$$\int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - [e^x]_0^1 = 1.$$

8.7.2 Integrazione per sostituzione

L'integrazione per sostituzione consiste essenzialmente in un cambio di variabile, cioè nel passaggio dalla variabile $x \in [a, b]$ ad una nuova variabile, chiamiamola t , legata ad x dalla relazione

$$x = \varphi(t).$$

La funzione φ deve essere invertibile così da potersi scrivere

$$t = \varphi^{-1}(x),$$

cioè trovare t in funzione di x .

Proposizione 8.26 (Calcolo dell'integrale per sostituzione). *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $x = \varphi(t)$ un cambiamento di variabile tale che φ sia derivabile con derivata continua. Allora si ha*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt.$$

Dimostrazione. Basta tenere presente che per il Secondo Teorema Fondamentale del Calcolo si ha che se F è una primitiva di f allora

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

D'altro canto la funzione $F(\varphi(t))$ è derivabile con

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

da cui

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)).$$

La tesi è dunque dimostrata scegliendo $\alpha = \varphi^{-1}(a)$ e $\beta = \varphi^{-1}(b)$. □

Osservazione 8.27. Notiamo che nell'integrazione per sostituzione, passando da x a t occorre cambiare ovviamente gli estremi di integrazione, ma soprattutto la nuova funzione da integrare non è solo $f(\varphi(t))$ ma $f(\varphi(t))\varphi'(t)$.

Fare un cambiamento di variabile presuppone che il calcolo della primitiva di $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ sia più semplice di quello di $f(x)$.

Esempio 8.28. Calcoliamo l'integrale

$$\int_{\ln 2}^7 \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x - 1}} dx.$$

Se poniamo $e^x = t$, si ha $x = \ln t$. Scegliamo allora come funzione φ nella formula d'integrazione per sostituzione l'applicazione $\varphi(t) = \ln t$, che è invertibile. Si ha

$$\begin{aligned} x = \ln 2 &\implies t = e^{\ln 2} = 2 \\ x = 7 &\implies t = e^7 \end{aligned}$$

e

$$\varphi'(t) = \frac{1}{t}.$$

Otteniamo

$$\int_{\ln 2}^7 \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x - 1}} dx = \int_2^{e^7} \frac{t^2}{\sqrt{t-1}} \left(\frac{1}{t} dt \right) = \int_2^{e^7} \frac{t}{\sqrt{t-1}} dt.$$

Il secondo membro è più facile da integrare. Una primitiva su $]0, +\infty[$ è data da

$$\int \frac{t}{\sqrt{t-1}} dt = \int \left(\sqrt{t-1} + \frac{1}{\sqrt{t-1}} \right) dt = \frac{2}{3}(t-1)^{3/2} + 2(t-1)^{1/2}.$$

Dunque si ottiene

$$\int_2^{e^7} \frac{t}{\sqrt{t-1}} dt = \left[\frac{2}{3}(t-1)^{3/2} + 2(t-1)^{1/2} \right]_2^{e^7} = \frac{2}{3}(e^7 - 1)^{3/2} + 2(e^7 - 1)^{1/2} - \frac{2}{3} - 2.$$

Capitolo 9

Equazioni differenziali ordinarie

9.1 Formulazione del problema

In questa sezione formuleremo matematicamente il problema delle equazioni differenziali ordinarie e faremo alcune osservazioni elementari introduttive.

1. Un'equazione differenziale ordinaria è un'equazione in cui l'incognita è una funzione di una variabile reale: essa stabilisce un legame tra tale funzione incognita e le sue derivate. Equazioni differenziali ordinarie sono ad esempio

$$y'(x) = x + \arctan(y(x))$$

e

$$z''(t) + 2z'(t) + z(t) = \sin t.$$

Nella prima, l'incognita è una funzione $y(x)$ tale che la sua derivata nel punto x generico del suo dominio sia uguale a x sommato all'arcotangente del valore $y(x)$ stesso. Si dice che essa è un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, perchè la funzione incognita vi compare derivata una volta. Essendo chiaro che la variabile indipendente è x , si usa indicare l'equazione anche nella forma

$$y' = x + \arctan y.$$

Nella seconda equazione, l'incognita è una funzione $z(t)$ tale che derivata due volte, sommata a due volte la sua derivata prima e sommata a lei stessa dà come risultato $\sin t$. È un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine che si può scrivere nella forma

$$z'' + 2z' + z = \sin t$$

omettendo la dipendenza da t .

2. Il problema della ricerca della primitiva di una data funzione f può essere visto come una particolare equazione differenziale: infatti trovare la primitiva di f equivale proprio a risolvere l'equazione differenziale

$$y'(x) = f(x).$$

Essendo la primitiva (su un intervallo) definita a meno di una costante, vediamo che in generale un'equazione differenziale del primo ordine ammette infinite soluzioni: dunque per determinare una precisa soluzione occorre assegnare una condizione ulteriore, ad esempio il valore della funzione in un punto. Similmente per un'equazione del secondo ordine sono necessarie in generale due condizioni per determinarne una soluzione precisa. In generale, per un'equazione di ordine n sono necessarie n condizioni.

3. Concludendo, un'equazione differenziale ordinaria è una equazione del tipo

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0.$$

Si dice che essa ha ordine n poichè la derivata massima che vi compare è quella n -esima. Per determinare una fra le funzioni che soddisfano all'equazione, si richiede che la funzione e le sue derivate fino all'ordine $n - 1$ in un punto x_0 assumano alcuni valori assegnati. Dunque nelle applicazioni si incontra il problema

$$\begin{cases} F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \\ y(x_0) = a_0 \\ y'(x_0) = a_1 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1} \end{cases}$$

che si dice **problema di Cauchy associato all'equazione differenziale**. Non ci occuperemo dello studio del problema dell'esistenza e dell'unicità della soluzione di un problema di Cauchy generale, poichè esso richiede strumenti avanzati. Il risultato è che, sotto condizioni generali su f , problemi del tipo

$$\begin{cases} y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

ammettono una ed una sola soluzione $y(x)$ definita in un intervallo sufficientemente piccolo contenente x_0 . L'equazione precedente si dice **equazione differenziale ordinaria di ordine n in forma normale**. Nel seguito ci limiteremo allo studio e alla risoluzione di alcuni tipi di equazioni che ricorrono spesso nelle applicazioni.

9.2 Equazioni a variabili separabili

Si tratta di equazioni del tipo

$$y' = f(y)g(x) \tag{9.1}$$

dove f, g sono funzioni continue definite su due intervalli I e J . Il problema di Cauchy associato è

$$\begin{cases} y' = f(y)g(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{9.2}$$

con $x_0 \in J$ e $y_0 \in I$.

1. Per risolvere il problema di Cauchy (9.2), seguiamo un *procedimento formale* molto usato nelle applicazioni (esso può giustificarsi pienamente anche da un punto di vista teorico, ma non ce ne occuperemo): ponendo $y' = dy/dx$

$$\frac{dy}{dx} = f(y)g(x)$$

possiamo scrivere

$$\frac{dy}{f(y)} = g(x) dx.$$

Integrando ambo i membri, tenendo conto della condizione iniziale si ha

$$\int_{y_0}^y \frac{1}{f(z)} dz = \int_{x_0}^x g(s) ds. \quad (9.3)$$

Questa relazione definisce in forma implicita la soluzione y in funzione di x . Il procedimento di risoluzione giustifica il nome di *equazioni a variabili separabili*: esse si risolvono tramite due integrazioni nelle variabili y e x separatamente.

2. Il metodo pone qualche difficoltà se $f(y_0) = 0$, perchè la formula prevederebbe di integrare una funzione con un asintoto verticale: ma in tal caso si vede subito che il problema di Cauchy è banale, perchè la soluzione è data dalla funzione costante $y(x) = y_0$.
3. Se lasciamo y_0 generico in (9.3), cioè lo poniamo uguale ad una costante c , al variare di c si ottengono chiaramente tutte le soluzioni dell'equazione differenziale (9.1).
4. Vediamo alcuni esempi.

Esempio 9.1. Risolviamo il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = e^y \\ y(2) = 7. \end{cases}$$

L'incognita è una funzione $y(x)$.

Si ha $y' = \frac{dy}{dx} = e^y$

$$\frac{dy}{e^y} = dx$$

da cui

$$\int_7^y \frac{1}{e^z} dz = \int_2^x ds$$

da cui

$$\begin{aligned} [-e^{-z}]_7^y &= x - 2 \\ -e^{-y} + e^{-7} &= x - 2 \\ e^{-y} &= e^{-7} + 2 - x \end{aligned}$$

ed infine

$$y = -\ln(e^{-7} + 2 - x).$$

Esempio 9.2. Risolviamo il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y \sin x \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

L'incognita è una funzione $y(x)$. Ponendo $y' = dy/dx$ si ha

$$\frac{dy}{y} = \sin x \, dx$$

da cui

$$\int \frac{1}{y} \, dy = \int \sin x \, dx$$

e quindi

$$\ln y = -\cos x + c.$$

Poiché $y(0) = 1$ si ha

$$\log y(0) = \ln 1 = -1 + c$$

da cui $c = 1$. Otteniamo dunque

$$\ln y = 1 - \cos x$$

da cui

$$y(x) = e^{1-\cos x}.$$

9.3 Equazioni lineari del primo ordine a coefficienti continui

Si tratta di equazioni del tipo

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \tag{9.4}$$

dove $a, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ sono funzioni continue definite su un intervallo I . Il problema di Cauchy associato è

$$\begin{cases} y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \tag{9.5}$$

con $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}$.

1. Vediamo come risolvere il problema di Cauchy (9.5). Sia A una primitiva di a su I . Allora

$$e^{A(x)} [y'(x) + a(x)y(x)] = e^{A(x)} b(x).$$

Ma si ha

$$e^{A(x)} [y'(x) + a(x)y(x)] = \left[e^{A(x)} y(x) \right]'$$

per cui

$$\left[e^{A(x)} y(x) \right]' = e^{A(x)} b(x).$$

Integrando da x_0 a x si ottiene

$$e^{A(x)} y(x) - e^{A(x_0)} y(x_0) = \int_{x_0}^x e^{A(s)} b(s) \, ds,$$

da cui, tenendo conto che $y(x_0) = y_0$, si ottiene

$$y(x) = e^{-A(x)} \left[e^{A(x_0)} y_0 + \int_{x_0}^x e^{A(s)} b(s) ds \right].$$

Se supponiamo che $A(x_0) = 0$, cioè scegliamo come A la primitiva di a che vale 0 in x_0 , otteniamo la formula

$$y(x) = e^{-A(x)} \left[y_0 + \int_{x_0}^x e^{A(s)} b(s) ds \right]. \quad (9.6)$$

2. Riassumendo, la **formula risolutiva per il problema di Cauchy** (9.5) è data da

$$y(x) = e^{-A(x)} \left[y_0 + \int_{x_0}^x e^{A(s)} b(s) ds \right]$$

dove A è la primitiva di a su I che vale 0 in x_0 , cioè

$$A(x) = \int_{x_0}^x a(s) ds.$$

3. Se poniamo $y_0 = c$ nella formula (9.6), al variare di $c \in \mathbb{R}$ otteniamo chiaramente tutte le soluzioni dell'equazione differenziale (9.4) (in questo caso $A(x)$ può essere una *qualunque* primitiva di $a(x)$).

4. Vediamo un esempio.

Esempio 9.3. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + 2y = e^x \\ y(1) = 3. \end{cases}$$

Si ha $a(x) = 2$ e $b(x) = e^x$. Dunque

$$A(x) = \int_1^x 2 ds = [2s]_1^x = 2(x-1).$$

Si ottiene

$$y(x) = e^{-2(x-1)} \left[3 + \int_1^x e^{2(s-1)} e^s ds \right].$$

Dunque

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{-2(x-1)} \left[3 + \int_1^x e^{3s-2} ds \right] = e^{-2(x-1)} \left[3 + \left[\frac{e^{3s-2}}{3} \right]_1^x \right] \\ &= e^{-2(x-1)} \left[3 + \frac{e^{3x-2}}{3} - \frac{e}{3} \right]. \end{aligned}$$

9.4 Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti

Sono le equazioni della forma

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x) \quad (9.7)$$

dove $a, b \in \mathbb{R}$ e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione continua. L'equazione

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0 \quad (9.8)$$

si dice l'equazione omogenea associata alla precedente. Il problema di Cauchy associato è della forma

$$\begin{cases} y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1, \end{cases} \quad (9.9)$$

dove $x_0 \in I$, $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$.

1. Per risolvere le equazioni (9.7), facciamo la seguente osservazione fondamentale: se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono soluzioni dell'equazione, allora la differenza $v(x) = y_1(x) - y_2(x)$ è soluzione dell'equazione omogenea associata (9.8). Infatti si ha

$$\begin{aligned} & v''(x) + av'(x) + bv(x) \\ &= (y_1(x) - y_2(x))'' + a(y_1(x) - y_2(x))' + b(y_1(x) - y_2(x)) \\ &= [y_1''(x) + ay_1'(x) + by_1(x)] - [y_2''(x) + ay_2'(x) + by_2(x)] = f(x) - f(x) = 0. \end{aligned}$$

Dunque la generica soluzione dell'equazione può esprimersi nella forma

$$y(x) = \tilde{y}(x) + (\text{soluzione generica dell'omogenea associata}),$$

dove $\tilde{y}(x)$ è una soluzione particolare dell'equazione. Dunque la **strategia** per risolvere il problema di Cauchy (9.9) per equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti è la seguente.

- (a) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata.
- (b) Determinare una soluzione particolare \tilde{y} dell'equazione di partenza.
- (c) Determinare le costanti generiche che compaiono utilizzando le condizioni iniziali.

2. Consideriamo l'**equazione omogenea**

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0.$$

Per trovarne tutte le soluzioni, si considera il **polinomio caratteristico**

$$P(z) = z^2 + az + b$$

e si pongono diverse alternative.

- (a) **Se P ammette due radici reali e distinte λ_1 e λ_2** (caso $a^2 - 4b > 0$), la soluzione generica dell'equazione omogenea è della forma

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

dove $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

- (b) **Se P ammette una sola radice reale λ di molteplicità due** (caso $a^2 - 4b = 0$), la soluzione generica dell'equazione è della forma

$$y(x) = (c_1 + c_2 x) e^{\lambda x}$$

dove $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

- (c) **Se P ammette due radici complesse coniugate $\alpha + i\beta$ e $\alpha - i\beta$** con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (caso $a^2 - 4b < 0$), la soluzione generica dell'equazione è della forma

$$y(x) = e^{\alpha x} (c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x))$$

dove $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Esempio 9.4. Data l'equazione

$$y'' - 4y = 0,$$

il polinomio caratteristico $P(z) = z^2 - 4$ ammette le soluzioni $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -2$. Dunque la generica soluzione è

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}.$$

Esempio 9.5. Data l'equazione

$$y'' - 2y' + y = 0,$$

il polinomio caratteristico $P(z) = z^2 - 2z + 1$ ammette come soluzione doppia $\lambda = 1$. Dunque la generica soluzione è

$$y(x) = (c_1 + c_2 x) e^x.$$

Esempio 9.6. Data l'equazione

$$y'' + y' + y = 0$$

il polinomio caratteristico $P(z) = z^2 + z + 1$ ammette come soluzioni $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\lambda_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Dunque la generica soluzione è

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \left[c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right].$$

3. La **determinazione di una soluzione particolare \tilde{y}** dell'equazione (9.7) è in generale un problema difficile. Esso può semplificarsi se il termine forzante $f(x)$ è della forma

$$f(x) = R_k(x) e^{\alpha x} \cos(\beta x) \tag{9.10}$$

o

$$f(x) = R_k(x) e^{\alpha x} \sin(\beta x) \tag{9.11}$$

dove R_k è un polinomio di grado k . Esempi di termini forzanti f di questo tipo sono

$$f(x) = x^2 e^x, \quad f(x) = x, \quad f(x) = \sin(2x)$$

oppure

$$f(x) = x^3 e^{2x} \cos(3x).$$

Per trovare una soluzione particolare, si considera il numero complesso

$$\tilde{z} = \alpha + i\beta$$

e si pongono due alternative.

- (a) Se $\tilde{z} = \alpha + i\beta$ non è radice del polinomio caratteristico $P(z)$ dell'equazione omogenea associata, allora esiste una soluzione particolare della forma

$$e^{\alpha x} [Q_k(x) \cos(\beta x) + S_k(x) \sin(\beta x)],$$

dove Q_k e S_k sono polinomi di grado k .

- (b) Se $\tilde{z} = \alpha + i\beta$ è radice del polinomio caratteristico $P(z)$ con molteplicità h , allora esiste una soluzione particolare dell'equazione è della forma

$$x^h e^{\alpha x} [Q_k(x) \cos(\beta x) + S_k(x) \sin(\beta x)]$$

dove Q_k e S_k sono polinomi di grado k .

I polinomi generici Q_k e S_k si determinano sostituendo direttamente nell'equazione ed imponendo che essa sia verificata.

Esempio 9.7. Consideriamo l'equazione

$$y'' - 2y = 2e^x.$$

Il polinomio caratteristico è $P(z) = z^2 - 2$ che ammette come radici $z = \pm\sqrt{2}$. Il termine forzante $f(x) = 2e^x$ è della forma (9.10) con la scelta $k = 0$, $\alpha = 1$ e $\beta = 0$. Dunque $\tilde{z} = 1$, ed esso non è radice di $P(z)$. Dunque esiste una soluzione della forma

$$\tilde{y}(x) = ce^x.$$

Sostituendo nell'equazione si ha che deve essere

$$ce^x - 2ce^x = 2e^x,$$

da cui $c = -2$. Concludiamo che una soluzione particolare è $\tilde{y}(x) = -2e^x$.

Esempio 9.8. Consideriamo l'equazione

$$y'' + 4y = 2 + \sin 2x. \quad (9.12)$$

Il termine forzante $f(x) = 2 + \sin 2x$ è somma di due termini forzanti

$$f_1(x) = 2 \quad \text{e} \quad f_2(x) = \sin 2x.$$

Per trovare una soluzione particolare dell'equazione, grazie alla sua linearità basta trovare due soluzioni particolari relative a f_1 e f_2 e sommarle tra loro, cioè basta trovare $\tilde{y}_1(x)$ e $\tilde{y}_2(x)$ tali che

$$\tilde{y}_1''(x) + 4\tilde{y}_1(x) = 2 \quad (9.13)$$

e

$$\tilde{y}_2''(x) + 4\tilde{y}_2(x) = \sin(2x) \quad (9.14)$$

e considerare $\tilde{y}(x) = \tilde{y}_1(x) + \tilde{y}_2(x)$. Per quanto riguarda $f_1(x) = 2$, esso è del tipo (9.10) con $k = \alpha = \beta = 0$. Si ha $\tilde{z} = 0$, che non è radice del polinomio caratteristico $P(z) = z^2 + 4$. Dunque esiste una soluzione particolare $\tilde{y}_1(x)$ di (9.13) della forma

$$\tilde{y}_1(x) = c.$$

Sostituendo in (9.13) si ricava

$$4c = 2 \implies c = \frac{1}{2}$$

cioè $\tilde{y}_1(x) = \frac{1}{2}$. Per quanto riguarda $f_2(x) = \sin(2x)$, esso è della forma (9.11) con $k = \alpha = 0$ e $\beta = 2$. Dunque $\tilde{z} = 2i$, che è radice di molteplicità uno del polinomio caratteristico $P(z) = z^2 + 4$. Esiste allora una soluzione particolare \tilde{y}_2 di (9.14) della forma

$$\tilde{y}_2(x) = x [c \cos 2x + d \sin 2x].$$

Dunque

$$\tilde{y}_2'(x) = c \cos 2x + d \sin 2x + x [-2c \sin 2x + 2d \cos 2x].$$

e

$$\tilde{y}_2''(x) = -4c \sin 2x + 4d \cos 2x + x [-4c \cos 2x - 4d \sin 2x].$$

Sostituendo in (9.14) si ha

$$-4c \sin 2x + 4d \cos 2x = \sin 2x$$

da cui

$$c = -\frac{1}{4} \quad \text{e} \quad d = 0.$$

Si ha dunque

$$\tilde{y}_2(x) = -\frac{1}{4}x \cos 2x.$$

In conclusione, una soluzione particolare dell'equazione (9.12) è data da

$$\tilde{y}(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x \cos 2x.$$

4. Vediamo un esempio di risoluzione di un problema di Cauchy seguendo la strategia vista al punto 1. Consideriamo il problema

$$\begin{cases} y'' - 2y = 2 \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Il polinomio caratteristico è $P(z) = z^2 - 2$ e

$$z^2 - 2 = 0 \implies z = \pm\sqrt{2}.$$

Si hanno due radici reali distinte $z_1 = \sqrt{2}$ e $z_2 = -\sqrt{2}$. La soluzione generica dell'equazione omogenea associata è data da

$$c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x}.$$

Cerchiamo una soluzione particolare: il termine forzante $f(x) = 2$ è della forma particolare considerata al punto precedente, con la scelta $k = \alpha = \beta = 0$. Dunque $\tilde{z} = 0$, ed esso non è radice di $P(z)$. Dunque esiste una soluzione particolare \tilde{y} della forma

$$\tilde{y}(x) = c.$$

Sostituendo nell'equazione si ha che deve essere

$$-2c = 2,$$

cioè $c = -1$. Abbiamo dunque che la soluzione generica dell'equazione completa è

$$y(x) = -1 + c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x}.$$

Le costanti c_1, c_2 si determinano attraverso le condizioni iniziali. Poichè $y'(x) = \sqrt{2}c_1 e^{\sqrt{2}x} - \sqrt{2}c_2 e^{-\sqrt{2}x}$, otteniamo da $y(0) = -1$ e $y'(0) = 1$

$$\begin{cases} -1 + c_1 + c_2 = -1 \\ \sqrt{2}c_1 - \sqrt{2}c_2 = 1 \end{cases}$$

da cui

$$c_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \text{e} \quad c_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

La soluzione del problema è

$$y(x) = -1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[e^{\sqrt{2}x} - e^{-\sqrt{2}x} \right].$$

9.5 Appendice: Numeri complessi

I numeri complessi vengono introdotti perché tutte le equazioni algebriche abbiano soluzione: per esempio l'equazione $x^2 + 1 = 0$ non ha soluzione in campo reale, lo ha invece nell'insieme dei numeri complessi (i numeri complessi servono per calcolare le radici quadrate di numeri negativi).

Definizione 9.9. Chiamiamo *unità immaginaria* il quel numero tale che

$$i^2 = -1.$$

Definizione 9.10. Un numero complesso z è un numero che si può scrivere nella forma

$$z = a + ib, \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}.$$

Il numero a è detto "parte reale" di z e si denota con $\Re z$,

Il numero b è detto "parte immaginaria" di z e si denota con $\Im z$.

L'espressione $z = a + ib$ è detta "Forma algebrica" del numero complesso z .

L'insieme dei numeri complessi si denota con \mathbb{C} .

Notiamo che un numero $z \in \mathbb{C}$ è reale se e solo se $b = 0$.

Dalla definizione si ha che due numeri complessi z_1 e z_2 sono uguali se e solo se hanno stessa parte reale e stessa parte immaginaria, ossia se e solo se

$$\begin{cases} \Re z_1 = \Re z_2 \\ \Im z_1 = \Im z_2. \end{cases}$$

Osserviamo che un numero complesso $z = a + ib$ può essere “identificato” con la coppia $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Si può quindi “identificare” \mathbb{C} con \mathbb{R}^2 : scriveremo

$$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2.$$

A livello geometrico, si rappresenta nel piano di Gauss un numero complesso $z = a + ib$ come punto P di coordinate (a, b) : in un sistema di riferimento cartesiano tali coppie sono le coordinate del punto P del piano che indicheremo con $z = P = (a, b)$, dove a e b rappresentano l’ascissa e l’ordinata del punto z .

Definizione 9.11. *Sia $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Il complesso coniugato di z è il numero*

$$\bar{z} = x - iy = \Re z - i\Im z.$$

9.5.1 Risoluzione di un’equazione di secondo grado in \mathbb{C}

Data l’equazione

$$az^2 + bz + c = 0 \tag{9.15}$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$, sia

$$\Delta := b^2 - 4ac.$$

Si può verificare che la formula risolutiva delle equazioni di secondo grado in \mathbb{R} si generalizza anche al caso in cui $\Delta < 0$. Vale infatti che, se $\Delta < 0$, allora le radici dell’equazione (9.15) sono i due numeri complessi coniugati

$$z_1 := \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

e

$$z_2 := \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$