Esercizi sugli integrali impropri

Esercizio 1. Studiare

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}\,dx.$$

Svolgimento: è un integrale improprio, in quanto

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^4-1}},\ x \in (1,2] \text{ ha una singolarità in } 1:$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\sqrt{x^4-1}} = +\infty.$$

Osserviamo che f è positiva, quindi è possibile applicare i criteri. Inoltre

$$\frac{1}{\sqrt{x^4-1}} = \frac{1}{\sqrt{(x^2-1)(x^2+1)}} = \frac{1}{\sqrt{(x-1)(x+1)}\sqrt{x^2+1}}$$

Siccome $\lim_{x\to 1^+} \sqrt{x+1} = \sqrt{2}$ e

$\lim_{x\to 1^+} \sqrt{x^2+1} = \sqrt{2}$, si ha

$$\frac{1}{\sqrt{x^4-1}} \sim \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x-1}} \quad \text{per } x \to 1^+.$$

Per il criterio del confronto asintotico, $\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}\,dx$ converge se e solo se converge

$$I := \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x-1}}\,dx.$$

Con il cambiamento di variabile $z = x - 1$, abbiamo

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{z}}\,dz$$

che è del tipo $\int_0^1 \frac{1}{z^\alpha}\,dz$, con $\alpha = \frac{1}{2}$.

$$\alpha = \frac{1}{2} < 1 \;\Rightarrow\; \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{z}}\,dz \text{ converge.}$$

Quindi

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x^4-1}}\,dx \text{ CONVERGE.}$$

Esercizio 2. Studiare

$$\int_0^1 \frac{1}{x\sin(x)}\,dx.$$

Svolgimento: è un integrale improprio su $(0,1]$, con una singolarità in 0, poiché

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x\sin(x)} = +\infty.$$

La funzione $x \mapsto \frac{1}{x\sin(x)}$ è positiva, quindi possiamo applicare i criteri. Ricordando che $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, abbiamo

$$\frac{1}{x\sin(x)} \sim \frac{1}{x^2} \quad \text{per } x \to 0^+,$$

quindi per il criterio del confronto $\int_0^1 \frac{1}{x\sin(x)}\,dx$ converge se e solo se converge

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx.$$

Ma

$$\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx.$$

DIVERGE. Allora

$$\int_0^1 \frac{1}{x\sin(x)}\,dx \text{ DIVERGE.}$$

Esercizio 3. Studiare

$$I = \int_0^2 \frac{\cos(x)}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx.$$

Svolgimento: la funzione integranda ha una singolarità in $x = 1$: si ha

$$\lim_{x\to 1} \frac{\cos(x)}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} = +\infty.$$

Siccome 1 è un punto interno a $(0, 2)$, spezzo l'integrale:

$$I = \int_0^2 \frac{\cos(x)}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\, dx =$$
$$= \int_0^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\, dx + \int_1^2 \frac{\cos(x)}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\, dx = I_1 + I_2.$$

Dunque I converge se e solo se I_1 e I_2 convergono.

Osservo che:

$f(x) = \frac{\cos(x)}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}$ è positiva per $x \in (0, \pi/2) \setminus \{1\}$, quindi in un intorno di 1, si possono usare i criteri per studiare gli integrali di cui sopra. Si ha

$$\frac{\cos(x)}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} \sim \frac{\cos(1)}{(x-1)^{2/3}} \quad \text{per } x \to 1,$$

quindi

- $I_1 = \int_0^1 \frac{\cos(x)}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\, dx$ converge se e solo se converge

$$\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\, dx.$$

Ponendo $z = (1 - x)$, si ha

$$\int_0^1 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,dx = \int_1^0 \frac{1}{(z^2)^{1/3}} \cdot (-1)\,dz$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{z^{2/3}}\,dz \quad \text{CONVERGENTE.}$$

- $I_2 = \int_1^2 \frac{\cos(x)}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx$ converge se e solo se converge

$$\int_1^2 \frac{1}{(x-1)^{2/3}}\,dx.$$

Ponendo $z = (x - 1)$, si ha

$$\int_0^1 \frac{1}{z^{2/3}}\,dz \quad \text{CONVERGENTE}$$

Quindi

$$\int_0^2 \frac{\cos(x)}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}\,dx \quad \text{CONVERGE.}$$

Esercizio 4. Studiare al variare di $\boxed{\alpha \in \mathbb{R}}$

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x^7)}{x^\alpha \ln(1+x^3)}\, dx.$$

Svolgimento: è integrale improprio sull'intervallo aperto $(0, +\infty)$ (infatti la funzione integranda non è definita in $x = 0$). L'integrale converge se e solo se

$$\int_0^1 \frac{\arctan(x^7)}{x^\alpha \ln(1+x^3)}\, dx \text{ converge } \textbf{e}$$
$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan(x^7)}{x^\alpha \ln(1+x^3)}\, dx \text{ converge.}$$

Notare che la funzione integranda è positiva $\Rightarrow$ OK i criteri.

1. Per $x \to 0^+$: Ricordiamo gli sviluppi per $y \to 0$:

$$\arctan(y) = y + o(y), \quad \ln(1+y) = y + o(y).$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan(x^7)}{x^\alpha \ln(1+x^3)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^7}{x^\alpha \cdot x^3} = \lim_{x\to 0^+} x^{4-\alpha}.$$

Allora, se $4-\alpha \geq 0$, cioè $\boxed{\alpha \leq 4}$, la funzione non ha una singolarità in $x=0$, e si ha integrabilità.
Per $\boxed{\alpha > 4}$ la funzione ha una singolarità in $x=0$, e si ha

$$\frac{\arctan(x^7)}{x^\alpha \ln(1+x^3)} \sim \frac{1}{x^{\alpha-4}} \quad \text{per } x \to 0^+,$$

quindi $\int_0^1 \frac{\arctan(x^7)}{x^\alpha \ln(1+x^3)}\,dx$ converge se e solo se converge

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha-4}}\,dx \quad \rightsquigarrow \quad \text{converge se e solo se } \boxed{\alpha - 4 < 1}.$$

Quindi

$$\int_0^1 \frac{\arctan(x^7)}{x^\alpha \ln(1+x^3)}\,dx \text{ converge se e solo se } \boxed{\alpha < 5}.$$

2. Per $x \to +\infty$: Siccome $\lim_{y\to+\infty} \arctan(y) = \frac{\pi}{2}$ e $\ln(1+y) \sim \ln(y)$ per $y \to +\infty$, si ha

$$\frac{\arctan(x^7)}{x^\alpha \ln(1+x^3)} \sim \frac{\pi}{2}\frac{1}{x^\alpha \cdot \ln(x^3)} = \frac{\pi}{6}\frac{1}{x^\alpha \ln(x)}$$

e

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \ln(x)}\, dx \text{ converge se e solo se } \alpha > 1.$$

Allora

$$\int_0^{+\infty} \frac{\arctan(x^7)}{x^\alpha \ln(1+x^3)}\, dx \text{ converge se e solo se } \boxed{\alpha \in (1,5)}.$$

Esercizio 5. Studiare al variare di $\boxed{\alpha \in \mathbb{R}}$

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{(\sinh(x))^\alpha}{e^{3x}-1}\,dx.$$

Svolgimento: è integrale improprio sull'intervallo aperto $(0, +\infty)$ (infatti la funzione integranda non è definita in $x = 0$). L'integrale converge se e solo se

$$\int_0^1 \frac{(\sinh(x))^\alpha}{e^{3x}-1}\,dx \text{ converge } \textbf{e}$$
$$\int_1^{+\infty} \frac{(\sinh(x))^\alpha}{e^{3x}-1}\,dx \text{ converge.}$$

Notare che la funzione integranda è positiva $\Rightarrow$ OK i criteri.

1. Per $x \to 0^+$: Ricordiamo gli sviluppi per $y \to 0$:

$$\sinh(y) = y + o(y), \quad e^y = 1 + y + o(y).$$

Quindi

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{(\sinh(x))^\alpha}{e^{3x}-1} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^\alpha}{3x} = \frac{1}{3}\lim_{x\to 0^+} x^{\alpha-1}.$$

Allora, se $\alpha - 1 \geq 0$, cioè $\boxed{\alpha \geq 1}$, la funzione non ha una singolarità in $x = 0$ e si ha integrabilità.

Per $\boxed{\alpha < 1}$ la funzione ha una singolarità in $x = 0$, e si ha

$$\frac{(\sinh(x))^\alpha}{e^{3x}-1} \sim \frac{1}{3}\frac{1}{x^{1-\alpha}} \quad \text{per } x \to 0^+,$$

quindi $\int_0^1 \frac{(\sinh(x))^\alpha}{e^{3x}-1}\,dx$ converge se e solo se converge

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{1-\alpha}}\,dx \quad \rightsquigarrow \quad \text{converge se e solo se } 1-\alpha < 1.$$

Quindi

$$\int_0^1 \frac{(\sinh(x))^\alpha}{e^{3x}-1}\,dx \text{ converge se e solo se } \boxed{\alpha > 0}.$$

2. Per $x \to +\infty$:

   Siccome $\sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2 \sim e^x/2$, si ha

$$\frac{(\sinh(x))^\alpha}{e^{3x}-1} \sim \frac{1}{2^\alpha}\frac{e^{\alpha x}}{e^{3x}} \quad \text{per } x \to +\infty,$$

   e

$$\int_1^{+\infty} e^{(\alpha-3)x}\,dx \text{ converge se e solo se } \alpha - 3 < 0.$$

Allora

$$\int_0^{+\infty} \frac{(\sinh(x))^\alpha}{e^{3x}-1}\,dx \text{ converge se e solo se } \boxed{\alpha \in (0,3)}.$$

Esercizio 6. Studiare al variare di $\boxed{\beta \in \mathbb{R}}$

$$I = \int_0^{1/2} \frac{(\sin(x))^{x+2}|\ln(x)|^\beta}{\ln(1+x^3)}\,dx.$$

Svolgimento: è una funz. positiva: ok i criteri. Osserviamo che

$$\begin{aligned}(\sin(x))^{x+2} &= (\sin(x))^2 \sin(x)^x \\ &= (\sin(x))^2 e^{x\ln(\sin(x))} \quad \forall\, x \in \left(0, \frac{1}{2}\right].\end{aligned}$$

1. Per $x \to 0^+$: Ricordando che $\sin(x) \sim x$ e

   $\ln(1+x^3) \sim x^3$ per $x \to 0^+$, si ha

$$\begin{aligned}\frac{(\sin(x))^{x+2}|\ln(x)|^\beta}{\ln(1+x^3)} &= (\sin(x))^2 \frac{e^{x\ln(\sin(x))}|\ln(x)|^\beta}{\ln(1+x^3)} \\ &\sim x^2 \frac{e^{x\ln(x)}|\ln(x)|^\beta}{x^3} \\ &\sim \frac{1}{x|\ln(x)|^{-\beta}}\end{aligned}$$

dove abbiamo usato che

$$\lim_{x\to 0^+} e^{x\ln(x)} = e^0 = 1 \text{ perché } \lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0.$$

Allora $\int_0^{1/2} \frac{(\sin(x))^{x+2}|\ln(x)|^\beta}{\ln(1+x^3)}\, dx$ converge se e solo se

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{x|\ln(x)|^{-\beta}}\, dx \text{ converge}$$

e questo è vero se $-\beta > 1$, cioè $\boxed{\beta < -1}$.

Esercizio 7. Studiare al variare di $\boxed{\alpha \in \mathbb{R}}$

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sinh(x^2)}{e^{\alpha(x^2+x)}x^{\alpha/2}}\, dx.$$

Svolgimento: è integrale improprio sull'intervallo <u>aperto</u> $(0, +\infty)$ (infatti la funzione integranda non è definita in $x = 0$). L'integrale converge se e solo se

$$\int_0^1 \frac{\sinh(x^2)}{e^{\alpha(x^2+x)}x^{\alpha/2}}\, dx \text{ converge } \textbf{e}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sinh(x^2)}{e^{\alpha(x^2+x)}x^{\alpha/2}}\, dx \text{ converge.}$$

La funzione integranda è positiva $\Rightarrow$ OK i criteri.

1. Per $x \to 0^+$ si ha $e^{\alpha(x^2+x)} \to 1$. Ricordando $\sinh(y) \sim y$ per $y \to 0$, concludiamo che

$$\frac{\sinh(x^2)}{e^{\alpha(x^2+x)}x^{\alpha/2}} \sim \frac{x^2}{x^{\alpha/2}} = \frac{1}{x^{\alpha/2-2}}$$

   quindi per il criterio del confronto $\int_0^1 \frac{\sinh(x^2)}{e^{\alpha(x^2+x)}x^{\alpha/2}}\,dx$ converge se e solo se

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{\alpha/2-2}}\,dx \text{ converge}$$

   quindi se e solo se $\frac{\alpha}{2} - 2 < 1$, cioè $\boxed{\alpha < 6}$.

2. Per $x \to +\infty$: Ricordo che $\sinh(y) \sim e^y/2$ per

$y \to +\infty$, dunque $\sinh(x^2) \sim \frac{1}{2}e^{x^2}$, quindi

$$\frac{\sinh(x^2)}{e^{\alpha(x^2+x)}x^{\alpha/2}} \sim \frac{e^{x^2}}{2e^{\alpha(x^2+x)}x^{\alpha/2}} \sim \frac{1}{2e^{\alpha(x^2+x)-x^2}x^{\alpha/2}} =$$

$$= \frac{1}{2e^{(\alpha-1)x^2+\alpha x}x^{\alpha/2}}$$

Per lo studio di

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{e^{(\alpha-1)x^2+\alpha x}x^{\alpha/2}}\,dx$$

distinguiamo i casi $\alpha < 1$, $\alpha = 1$, $\alpha > 1$:

(a) $\alpha > 1$: nel denominatore ho

$$e^{(\alpha-1)x^2+\alpha x}x^{\alpha/2} \sim e^{(\alpha-1)x^2}x^{\alpha/2} \sim e^{(\alpha-1)x^2}$$

e

$$e^{(\alpha-1)x^2} > x^{\beta} \quad \forall\, \beta \in \mathbb{R}$$

da cui

$$\frac{1}{e^{(\alpha-1)x^2}} < \frac{1}{x^\beta} \quad \boxed{\forall\, \beta \in \mathbb{R}}$$

In particolare (poichè vale $\forall\, \beta \in \mathbb{R}$)

$$\frac{1}{e^{(\alpha-1)x^2}} < \frac{1}{x^2}$$

e

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx \quad \text{CONVERGE.}$$

Quindi, per il criterio del confronto si ha convergenza per $\boxed{\alpha > 1}$.

(b) $\alpha = 1$: l'integrale diventa

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{e^x x^{1/2}}\, dx$$

che converge perché su $(1, +\infty)$ si ha $e^x > x^\beta$ per ogni $\beta \in \mathbb{R}$, quindi

$$\frac{1}{e^x x^{1/2}} < \frac{1}{x^\beta x^{1/2}} = \frac{1}{x^{\beta+1/2}} \quad \forall\, \beta \in \mathbb{R}$$

e dunque, in particolare per $\beta = 2$ si ha

$$\frac{1}{e^x x^{1/2}} < \frac{1}{x^{2+1/2}} = \frac{1}{x^{3/2}}$$

e

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{3/2}}\,dx \quad \text{CONVERGE.}$$

Quindi si ha convergenza per $\boxed{\alpha = 1}$.

(c) $\alpha < 1$: si ha

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{e^{(\alpha-1)x^2+\alpha x} x^{\alpha/2}}\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{e^{(1-\alpha)x^2}}{e^{\alpha x} x^{\alpha/2}}\,dx$$

con $(1 - \alpha > 0)$. Vale

$$\frac{e^{(1-\alpha)x^2}}{e^{\alpha x} x^{\alpha/2}} \sim e^{(1-\alpha)x^2} \geq e^{(1-\alpha)x}$$

e

$$\int_1^{+\infty} e^{(1-\alpha)x}\,dx \qquad \text{DIVERGE}$$

da cui concludiamo con il criterio del confronto che si ha divergenza per $\boxed{\alpha < 1}$.

Allora

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sinh(x^2)}{e^{\alpha(x^2+x)} x^{\alpha/2}}\, dx \text{ converge se e solo se } \alpha \geq 1.$$

Dunque:

per $x \to 0^+$ si ha convergenza per $\alpha < 6$

per $x \to +\infty$ si ha convergenza per $\alpha \geq 1$

Concludiamo che su $(0, +\infty)$

si ha convergenza per $1 \leq \alpha < 6$.

Esercizio 8. Calcolare

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\cosh(2x)}\,dx.$$

Svolgimento:

1. verifichiamo l'integrabilità in senso improprio:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\cosh(2x)}\,dx \text{ e } \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\cosh(2x)}\,dx \text{ convergono.}$$

- $\cosh(2x) = (e^{2x} + e^{-2x})/2$,
  per $x \to +\infty$: $\cosh(2x) \sim e^{2x}/2$ da cui

$$\frac{1}{\cosh(2x)} \sim \frac{2}{e^{2x}}.$$

Siccome su $(0, +\infty)$ si ha $e^{2x} > x^{\beta}$ per ogni $\beta \in \mathbb{R}$, si ha

$$\frac{2}{e^{2x}} < \frac{2}{x^{\beta}} \quad \forall\, x \in (0, +\infty)\ \forall\, \beta \in \mathbb{R}.$$

Quindi
$$\int_0^{+\infty} \frac{2}{e^{2x}}\, dx \text{ converge.}$$
Quindi
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\cosh(2x)}\, dx \text{ converge.}$$

- Siccome $\cosh(2x)$ è pari, si ha
$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\cosh(2x)}\, dx &= \lim_{c\to+\infty} \int_{-c}^{0} \frac{1}{\cosh(2x)}\, dx \\ &= \lim_{c\to+\infty} \int_{0}^{c} \frac{1}{\cosh(2x)}\, dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\cosh(2x)}\, dx < +\infty\end{aligned}$$
quindi anche l'integrale su $(-\infty, 0)$ converge.

2. Usando
$$\cosh(2x) = (e^{2x} + e^{-2x})/2 = \frac{e^{4x}+1}{2e^{2x}}$$

abbiamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\cosh(2x)}\,dx = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\cosh(2x)}\,dx =$$
$$= 2\lim_{c\to+\infty}\int_{0}^{c} \frac{1}{\cosh(2x)}\,dx.$$

Calcolo

$$\lim_{c\to+\infty}\int_{0}^{c} \frac{1}{\cosh(2x)}\,dx$$
$$= \lim_{c\to+\infty}\int_{0}^{c} \frac{2e^{2x}}{e^{4x}+1}\,dx$$

$$= \lim_{c\to+\infty}\int_{1}^{e^{2c}} \frac{1}{t^2+1}\,dt$$
$$= \lim_{c\to+\infty}\left[\arctan(t)\right]_1^{e^{2c}}$$
$$= \lim_{c\to+\infty}(\arctan(e^{2c}) - \arctan(1)) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Allora

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\cosh(2x)}\,dx = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\cosh(2x)}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Esercizio 9. Studiare al variare di $\boxed{\gamma \in \mathbb{R}}$

$$I = \int_0^{1/2} \frac{|\log(x)|^{\gamma}}{x^{5\gamma}}\,dx.$$

Svolgimento: f è positiva e ha una possibile singolarità in $x = 0$. Osservo che

$$f(x) = \frac{1}{x^{5\gamma}|\log(x)|^{-\gamma}}$$

e ricordo il carattere dell'integrale $\int_0^{1/2} \frac{1}{x^{\alpha}|\log(x)|^{\beta}}$: converge se

$$\alpha < 1, \forall\,\beta \in \mathbb{R} \;\text{ o }\; \alpha = 1, \forall\,\beta > 1.$$

Allora I converge se e solo se

$$5\gamma < 1 \quad \text{o} \quad 5\gamma = 1, -\gamma > 1$$

Osservo che il sistema

$$5\gamma = 1, -\gamma > 1$$

non ha soluzione, dunque

$$I \text{ converge se e solo se } \boxed{\gamma < \frac{1}{5}}.$$

Esercizio 10. Studiare

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\log(3+\sin(x))}{\sqrt[4]{x^5+x^3+\log(x)}}\,dx.$$

Svolgimento: f è positiva perché $3+\sin(x) \geq 3-1 = 2$, e $\log(2) > 0$; f non ha "singolarità al finito". Si ha per $x \to +\infty$

$$\frac{\log(3+\sin(x))}{\sqrt[4]{x^5+x^3+\log(x)}} \sim \frac{\log(3+\sin(x))}{x^{5/4}}.$$

Quindi studio il carattere di $\int_1^{+\infty} \frac{\log(3+\sin(x))}{x^{5/4}}\,dx$: si ha

$$\log(3+\sin(x)) \leq \log(4) \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

e

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log(4)}{x^{5/4}}\,dx \ \ \text{CONVERGENTE.}$$

Quindi l'integrale converge.

Esercizio 11. Studiare

$$I = \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{\left(\cos(x)-\frac{1}{x}\right)} - e^{\cos(x)}}\, dx.$$

Svolgimento: Si ha

$$\begin{aligned}
&\frac{\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{\left(\cos(x)-\frac{1}{x}\right)} - e^{\cos(x)}} \\
&= \frac{\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{\cos(x)}e^{-\frac{1}{x}} - e^{\cos(x)}} \\
&= \frac{\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{\cos(x)}(e^{-\frac{1}{x}} - 1)}.
\end{aligned}$$

Poiché $x > 1$, si ha $-\frac{1}{x} < 0$ quindi $e^{-\frac{1}{x}} < 1$. Allora f è negativa. Studio la convergenza di

$$\int_1^{+\infty} |f(x)|\, dx = \int_1^{+\infty} (-f(x))\, dx = \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{\cos(x)}(1 - e^{-\frac{1}{x}})}\, dx.$$

e applico criteri per funzioni positive. Non ci sono singolarità "al finito", e si ha

$$\sin^2\left(\frac{1}{x}\right) \sim \left(\frac{1}{x}\right)^2 \quad \text{per } x \to +\infty,$$

$$1 - e^{-\frac{1}{x}} \sim -(-\frac{1}{x}) = \frac{1}{x} \quad \text{per } x \to +\infty,$$

(cambiamento di variabile $z = \frac{1}{x}$ e sviluppi per $z \to 0$).
Quindi per $x \to +\infty$

$$|f(x)| = \frac{\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{\cos(x)}(1 - e^{-\frac{1}{x}})} \sim \frac{\left(\frac{1}{x}\right)^2}{e^{\cos(x)}\frac{1}{x}}$$
$$= \frac{1}{xe^{\cos(x)}}$$

e

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{xe^{\cos(x)}}\,dx \quad \text{diverge}$$

Infatti

$$\cos x \leq 1 \Longrightarrow e^{\cos x} \leq e^1$$

da cui

$$\frac{1}{xe^{\cos(x)}} \geq \frac{1}{xe^1}$$

e

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx \quad \text{DIVERGE.}$$

Allora $\int_1^{+\infty} |f(x)|\, dx$ diverge a $+\infty$, quindi

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{\left(\cos(x)-\frac{1}{x}\right)} - e^{\cos(x)}}\, dx = -\int_1^{+\infty} |f(x)| dx = -\infty.$$