Analisi Matematica 1

Ingegneria Civile, per l'Ambiente e il Territorio

Paola Trebeschi
Anno accademico: 2015/2016

Indice

Capitolo 1

Preliminari

1.1 Logica-cenni

1.1.1 Quantificatori

I quantificatori sono gli elementi fondamentali del linguaggio matematico.
$\forall$ quantificatore universale: si legge "per ogni";
$\exists$ quantificatore esistenziale: si legge "esiste".
$\exists!$ si legge "esiste uno e uno solo".

1.1.2 Proposizioni, connettivi e predicati

Introduciamo il vocabolario per una corretta interpretazione logica delle dimostrazioni.

Definizione 1.1. *Chiamiamo* **proposizione** *ogni frase di senso compiuto che dà delle informazioni.*

Esempio 1.2. 1) domani, se domani pioverà, quanti anni hai?: NON sono proposizioni;
2) oggi piove, la circonferenza è una figura piana: SONO proposizioni.

Indichiamo le proposizioni con le lettere $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \cdots$.
Una proposizione può essere VERA o FALSA (ma NON, contemporaneamente, vera e falsa) e quando si considerano più proposizioni contemporaneamente è utile scrivere la loro TABELLA DI VERITÀ.

Definizione 1.3. *Una* **tabella di verità** *è una tabella nella quale su ogni riga si ha una diversa proposizione e nelle cui colonne compaiono tutte le combinazioni di vero/falso che si possono verificare.*

Tabella di verità di $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$.

$$\begin{array}{lcllll} \mathcal{A} & : & V & V & F & F \\ \mathcal{B} & : & V & F & V & F. \end{array}$$

Tabella di verità di $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$

$$\begin{array}{llllllllll}
\mathcal{A} & : & V & V & V & V & F & F & F & F \\
\mathcal{B} & : & V & V & F & F & V & V & F & F \\
\mathcal{C} & : & V & F & V & F & V & F & V & F.
\end{array}$$

Definizione 1.4. *Due proposizioni si dicono* **equivalenti** *se hanno lo stesso valore di verità, cioè sono tali che nella tabella di verità le due righe ad esse corrispondenti sono uguali.*

I **connettivi** sono operatori che trasformano una o più proposizione in altre proposizioni, i cui valori di verità sono determinati da quelli delle proposizioni di partenza. Essi sono espressi tramite i simboli **non**, **o**, **e**, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$.

Definizione 1.5. *Date due proposizioni $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, si definiscono* **non** *$\mathcal{A}$, $\mathcal{A}\,\mathbf{e}\,\mathcal{B}$, $\mathcal{A}\,\mathbf{o}\,\mathcal{B}$, $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ mediante la tabella di verità*

$$\begin{array}{llllll}
\mathcal{A} & : & V & V & F & F \\
\mathcal{B} & : & V & F & V & F \\
\mathbf{non}\mathcal{A} & : & F & F & V & V \\
\mathcal{A}\,\mathbf{e}\,\mathcal{B} & : & V & F & F & F \\
\mathcal{A}\,\mathbf{o}\,\mathcal{B} & : & V & V & V & F \\
\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B} & : & V & F & V & V \\
\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B} & : & V & F & F & V.
\end{array}$$

Dalla definizione sopra segue che:

- La proposizione $\mathbf{non}\mathcal{A}$ è VERA quando $\mathcal{A}$ è FALSA e viceversa.
  L'operatore di negazione, applicato due volte, si cancella, ossia:
  $\mathbf{non}\,\mathbf{non}\,\mathcal{A} = \mathcal{A}$.

- La proposizione $\mathcal{A}\,\mathbf{e}\mathcal{B}$ è VERA esclusivamente quando sono VERE sia $\mathcal{A}$ che $\mathcal{B}$, in tutti gli altri casi è FALSA.

- La proposizione $\mathcal{A}\,\mathbf{o}\mathcal{B}$ è VERA quando almeno una fra $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ è VERA (non è escluso che possano essere tutte e due vere), si ottiene così che risulta sempre VERA, tranne il caso in cui sia $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ sono FALSE.

- Il simbolo di implicazione $\Rightarrow$ crea una nuova proposizione. $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ significa che se $\mathcal{A}$ è VERA, necessariamente anche $\mathcal{B}$ deve essere VERA, mentre se $\mathcal{A}$ è FALSA allora $\mathcal{B}$ può essere indifferentemente vera o falsa. Si legge " $\mathcal{A}$ implica $\mathcal{B}$", oppure " se $\mathcal{A}$ allora $\mathcal{B}$".

- Il simbolo $\Leftrightarrow$ dà una proposizione che è vera esclusivamente quando $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ hanno lo stesso valore di verità (cioè sono entrambe vere o false). La proposizione $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ è equivalente a $[(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})]\mathbf{e}[(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})]$.

Valgono le seguenti relazioni:

- L'operatore **e** è commutativo, ossia
$$[\mathcal{A}\,\mathbf{e}\,\mathcal{B}] \;\Leftrightarrow\; [\mathcal{B}\,\mathbf{e}\,\mathcal{A}];$$
- L'operatore **e** è associativo, ossia
$$[(\mathcal{A}\,\mathbf{e}\,\mathcal{B})\,\mathbf{e}\,\mathcal{C}] \;\Leftrightarrow\; [\mathcal{A}\,\mathbf{e}\,(\mathcal{B}\,\mathbf{e}\,\mathcal{C})];$$
- L'operatore **o** è commutativo e associativo,
- Vale una proprietà distributiva:
$$[(\mathcal{A}\,\mathbf{e}\,\mathcal{B})\,\mathbf{o}\,\mathcal{C}] \;\Leftrightarrow [(\mathcal{A}\mathbf{o}\,\mathcal{C})\,\mathbf{e}\,(\mathcal{B}\,\mathbf{o}\,\mathcal{C})],$$
$$[(\mathcal{A}\,\mathbf{o}\,\mathcal{B})\,\mathbf{e}\,\mathcal{C}] \;\Leftrightarrow [(\mathcal{A}\,\mathbf{e}\,\mathcal{C})\,\mathbf{o}\,(\mathcal{B}\,\mathbf{e}\,\mathcal{C})],$$
$$[\mathbf{non}\,(\mathcal{A}\,\mathbf{e}\,\mathcal{B})] \Leftrightarrow [(\mathbf{non}\,\mathcal{A})\,\mathbf{o}\,(\mathbf{non}\,\mathcal{B})],$$
$$[\mathbf{non}\,(\mathcal{A}\,\mathbf{o}\,\mathcal{B})] \Leftrightarrow [(\mathbf{non}\,\mathcal{A})\,\mathbf{e}\,(\mathbf{non}\,\mathcal{B})].$$

Dalle proprietà sopra scritte seguono le seguenti importanti relazioni:
$$[\mathbf{non}\,(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})] \;\Leftrightarrow\; [\mathcal{A}\,\mathbf{e}\,(\mathbf{non}\,\mathcal{B})]$$
e
$$[(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B})] \;\Leftrightarrow [(\mathbf{non}\,\mathcal{B}) \;\Rightarrow (\mathbf{non}\,\mathcal{A})].$$

Definizione 1.6. *Chiamiamo predicato ogni frase contenente una o più variabili, che diviene una proposizione quando viene specificato il valore delle variabili.*

Un predicato non ha un valore di verità intrinseco: il valore di verità dipenderà dai valori assegnati, volta per volta, alle variabili.

Esempio 1.7. 1) $\mathcal{L}(x) =$ nel luogo x sta piovendo,
2) $\mathcal{P}(x, y) =$ il giorno y nel luogo x sta piovendo.

Un predicato può essere trasformato in una proposizione, oltre che dando un valore alle variabili, anche usando uno dei quantificatori.

Esempio 1.8. 1) $\forall x$, $\mathcal{L}(x) =$ sta piovendo in ogni luogo,
2) $\exists x\,:\,\mathcal{L}(x) =$ esiste un luogo in cui sta piovendo.

Quando un predicato dipende da più variabili, i quantificatori possono essere combinati ed anche le indicazioni sul valore delle variabili.

Esempio 1.9. 1) $\exists y\,:\,\mathcal{P}(Italia, y) =$ esiste (almeno) un giorno in cui in Italia piove,
2) $\forall x$, $\exists y\,:\,\mathcal{P}(x, y) =$ in ogni luogo esiste un giorno in cui piove.

L'ordine dei quantificatori è **IMPORTANTISSIMO**: cambiare l'ordine fa cambiare il senso del predicato.

Esempio 1.10. Scambiando l'ordine nell'esempio 1.9 punto 2) si ha:
$\exists y\,:\,\forall x,\,\mathcal{P}(x,y)$ = esiste (almeno) un giorno in cui piove in ogni luogo.

Costruzione della negazione di proposizioni contenenti quantificatori.

- $[\mathbf{non}(\forall\, x,\, \mathcal{A})] \Leftrightarrow [\exists\, x\,:\,\mathbf{non}\,\mathcal{A}]$,
- $[\mathbf{non}(\exists\, x : \mathcal{A})] \Leftrightarrow [\forall\, x\,,\,\mathbf{non}\,\mathcal{A}]$,
- $[\mathbf{non}(\exists\, x\,:\,\forall\, y,\, \mathcal{A}(x,y)] \Leftrightarrow [\forall\, x,\, \exists\, y\,:\,\mathbf{non}\,\mathcal{A}(x,y)]$.

La matematica è un insieme di proposizioni di cui si vuole la verità usando delle regole logiche. Fra esse ce ne sono tre fondamentali

I) $\forall\,\mathcal{A}$, ($\mathcal{A}$ **o non** $\mathcal{A}$) (principio del terzo escluso),

II) $\forall\,\mathcal{A}$, **non** ($\mathcal{A}$ **e non**$\mathcal{A}$), (principio di non contraddizione),

III) $\forall\,\mathcal{A},\mathcal{B},\mathcal{C}\,[(\mathcal{A} \Rightarrow\ \mathcal{B})\,\mathbf{e}\,(\mathcal{B} \Rightarrow\ \mathcal{C}) \Rightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow\ \mathcal{C})]$, (principio di transitività).

Abbiamo usato I) e II) per costruire le tabelle di verità e dedurre i connettivi logici: abbiamo infatti scritto sempre V o F, niente di diverso da questo e mai contemporaneamente. Tali regole però non consentono di dimostrare la verità di alcuna proposizione utile. Le prime due ci dicono cose abbastanza ovvie su una qualunque proposizione (una proposizione non può essere contemporaneamente vera e falsa) e la terza ci dice che per dimostrare l'ultima implicazione occorre sapere che le prime due implicazioni sono vere. Per dimostrare qualcosa occorre decidere che alcune proposizioni (dette ASSIOMI) sono vere, e da queste dedurre poi la verità o meno di altre.

1.1.3 Teoremi

Un teorema è costituito da un enunciato e da una dimostrazione.

L'enunciato ha
una IPOTESI ($\mathcal{P}$, il punto di partenza) ed
una TESI ($\mathcal{Q}$ l'obiettivo da dimostrare)
e si sintetizza con

$$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$$

Si osservino i seguenti importanti fatti (espressi, nella seconda colonna, tramite i connettivi):

1.	$\mathcal{P}$ **implica** $\mathcal{Q}$	$(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$
	equivale a	$\Updownarrow$
2.	**non** $\mathcal{Q}$ **implica non** $\mathcal{P}$	**non** $\mathcal{Q} \Rightarrow$ **non** $\mathcal{P})$
	equivale a	$\Updownarrow$
3.	$\mathcal{P}$ **e non** $\mathcal{Q}$ **implicano non** $\mathcal{P}$	$(\mathcal{P}$ **e non** $\mathcal{Q} \Rightarrow$ **non** $\mathcal{P})$
	equivale a	$\Updownarrow$
4.	$\mathcal{P}$ **e non** $\mathcal{Q}$ **implicano** $\mathcal{R}$ **e non** $\mathcal{R}$	$(\mathcal{P}$ **e non** $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{R}$ **e non** $\mathcal{R})$

Le 2., 3. e 4. sono utilizzate nelle DIMOSTRAZIONI PER ASSURDO.

1.2 Insiemi e sottoinsiemi

Definizione 1.11. *Un insieme è una collezione di oggetti, detti* elementi.

Gli insiemi si denotano in due diversi modi:

$$E = \{\cdots \text{lista di elementi di E, separati da virgole} \cdots\} = \{a, x, i, h\}$$

oppure mediante una proprietà

$$E = \{x \in U \,:\, \mathcal{P}(x)\}$$

dove U indica un insieme ambiente.
NOTAZIONI:
$x \in E$ significa: x appartiene ad E;
$x \notin E$ significa: x non appartiene ad E;
$\emptyset$ indica l'insieme vuoto, ossia l'insieme che non ha alcun elemento.

Definizione 1.12. *Un insieme F si dice sottoinsieme di E se ogni elemento di F è un elemento anche di E, cioè se $\forall x \in F, x \in E$. Scriveremo $F \subseteq E$.*

Vale

$$E = F \Leftrightarrow E \subseteq F \,\mathbf{e}\, F \subseteq E.$$

Con $F \subset E$ intendiamo l'inclusione di insieme stretta, ossia

$$F \subseteq E, \qquad \text{e} \quad F \neq E.$$

Denotiamo con $\mathcal{P}(E) = \{F \subseteq E\}$. Tale insieme si chiama INSIEME delle PARTI di E.

Definizione 1.13. *Chiamiamo unione e intersezione di due insiemi E e F gli insiemi*

$$E \cup F = \{x : \, x \in E \textbf{ o } x \in F\}, \quad E \cap F = \{x : \, x \in E \textbf{ e } x \in F\}.$$

Due insiemi che hanno intersezione vuota, i.e $E \cap F = \emptyset$ si dicono DISGIUNTI.

Definizione 1.14. *Chiamiamo complementare di E (in U) (e scriviamo E^c) l'insieme dei punti di U che non stanno in E*

$$E^c = \{x : x \in U, x \notin E\}.$$

Vale $(E^c)^c = E$.

Proposizione 1.15 (Leggi di De Morgan). *Valgono*

$$(E \cup F)^c = E^c \cap F^c \quad (E \cap F)^c = E^c \cup F^c.$$

Definizione 1.16. *Chiamiamo differenza di E e F l'insieme*

$$E \setminus F = \{x \in E : x \notin F\}.$$

Chiamiamo prodotto cartesiano di E e F l'insieme

$$E \times F = \{(x, y) : x \in E, \ y \in F\}.$$

Gli elementi (x, y) sono dette coppie (ordinate) e hanno la proprietà che

$$(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow x = x' \text{ e } y = y'.$$

1.3 Funzioni

Definizione 1.17. *Una funzione è una terna (A, B, f) dove A, B sono due insiemi e f è una legge che ad ogni elemento di A associa uno e un solo elemento di B. In simboli, scriviamo $f : A \to B$. Affinché f sia una funzione, deve essere*

$$\forall\, x \in A, \quad \exists! y \in B : y = f(x).$$

L'insieme A si chiama DOMINIO di f e si denota con $\operatorname{dom} f$ *e B è il CODOMINIO di f.*

Notiamo che, dalla definizione, a diversi x può corrispondere lo stesso y.
Il ruolo del codominio non sembra tanto chiaro a prima vista: sembra una specie di contenitore dei valori assunti da f (cioè i punti di B che si possono scrivere come $y = f(x)$). L'insieme dei punti assunti da f è detta immagine di f e si denota con $\operatorname{im} f$, ossia

$$\operatorname{im} f = f(A) = \{y \in B : \exists\, x \in A, \quad y = f(x)\} \subseteq B.$$

Da notare che in generale B contiene più punti di quelli assunti da f (cioè B contiene strettamente l'insieme immagine $\operatorname{im} f$), e quindi sembra che ingrandendo tale insieme la funzione non cambi. Il ruolo del codominio sarà chiaro quando introdurremo il concetto di funzione inversa.

Esempio 1.18. 1) Un normale impianto elettrico è una funzione che ad ogni interruttore fa corrispondere un lampadario.
2) la somma di due numeri reali è una funzione:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\to x + y \end{aligned}$$

La funzione sopra scritta è un esempio di funzione di due variabili.

In questo corso ci occuperemo di funzioni di una sola variabile. Studieremo le **funzioni reali ($B \subseteq \mathbb{R}$) di variabile reale ($A \subseteq \mathbb{R}$)**, ossia di funzioni

$$f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}.$$

Definizione 1.19. *Si dice grafico di $f : A \to B$ l'insieme*

$$\mathcal{G}_f = \{(x, y) \in A \times B \, : \, y = f(x)\} \subseteq A \times B.$$

Il grafico è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$, dunque è un insieme di coppie ordinate. La proprietà di cui godono i punti del grafico è la seguente

$$\forall\, x \in A, \quad \exists!\, y \in B \, : \, (x, y) \in \mathcal{G}_f. \tag{1.1}$$

Segue che un insieme del prodotto cartesiano di A e B che non gode di questa proprietà NON può essere il grafico di una funzione.

Esempio 1.20. Consideriamo $A \times B = \{x \in \mathbb{R} - 1 \leq x \leq 1\} \times \mathbb{R}$ e consideriamo il sottoinsieme dato dalla circonferenza

$$\gamma = \{(x, y) \, : \, -1 \leq x \leq 1 \;\; x^2 + y^2 = 1\}.$$

Allora γ non è il grafico di una funzione da A in B perchè γ non soddisfa la proprietà (1.1). Infatti al punto $x = 0$ corrispondono due y (precisamente: $y_1 = 1$ e $y_2 = -1$) per i quali $(x, y) \in \gamma$. Invece $\gamma \cap \{(x, y) \, : \, x \in A \;\; y \geq 0\}$ è un grafico.

1.3.1 Funzioni iniettive, suriettive, biunivoche

Sia $f : A \to B$.

Definizione 1.21. *Si dice che f è una funzione iniettiva se*

$$\begin{gathered} \forall\, x_1, x_2 \in A, \;\; [(x_1 \neq x_2) \Rightarrow (f(x_1) \neq f(x_2))] \\ \Updownarrow \\ \forall\, x_1, x_2 \in A, \;\; [(f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow (x_1 = x_2)]. \end{gathered}$$

Attenzione a non confondere l'ordine in cui è scritta la formula: infatti la proposizione

$$\forall\, x_1, x_2 \in A,\ [(x_1 = x_2) \Rightarrow (f(x_1) = f(x_2)]$$

è verificata da ogni funzione.

Esempio 1.22. 1) la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x$ è iniettiva.
2) la funzione $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ (di dominio naturale $\mathbb{R} \setminus \{1\}$) è iniettiva perchè

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{2x_1+1}{x_1-1} = \frac{2x_2+1}{x_2-1} \Rightarrow 2x_1x_2 - 2x_1 + x_2 - 1 = 2x_1x_2 - 2x_2 + x_1 - 1 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

3) $f(x) = x^2$ non è iniettiva perchè $f(1) = f(-1)$.

Le funzioni iniettive hanno così la caratteristica che se un certo y è immagine di qualche punto del dominio di f, allora è immagine di un solo punto.

Definizione 1.23. *Una funzione $f : A \to B$ si dice suriettiva, o surgettiva, se*

$$\forall y \in B, \quad \exists\, x \in A\ :\ y = f(x).$$

Dalla definizione segue che una funzione f è suriettiva se $\operatorname{im} f = B$.

Esempio 1.24. 1) la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x$ è suriettiva.
2) la funzione $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$ non è suriettiva da $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ in $\mathbb{R}$ perchè, per esempio, $y = 2$ non si può scrivere come $f(x)$ per qualche $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Infatti l'equazione

$$\frac{2x+1}{x-1} = 2$$

non ha soluzione, dunque la funzione NON assume mai il valore 2.
3) $f(x) = x^2$ non è suriettiva da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$, perchè $y = -1$ non è mai assunto da f. Notiamo che

$$\operatorname{im} f = \{y \in \mathbb{R}\ :\ y \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}.$$

Osserviamo ancora che se una funzione f non è suriettiva, si può passare ad una nuova funzione che differisce non troppo da f e che risulta essere suriettiva considerando

$$\tilde{f} : A \to f(A) \quad \text{con } \tilde{f}(x) = f(x).$$

Questo significa considerare la stessa legge f sullo stesso dominio, ma prendere come codominio esattamente $\operatorname{im} f = f(A)$.

Le due nozioni di iniettività e suriettività sono indipendenti: vi sono funzioni che possono essere iniettive ma non suriettive e viceversa e invece funzioni che possono essere sia iniettive che suriettive.

Definizione 1.25. *Una funzione iniettiva e suriettiva si dice biunivoca (o biettiva o bigettiva).*

Osserviamo che se $f : A \to B$ è biettiva, allora

1. f è suriettiva, i.e., $\forall\, y \in B, \quad \exists\, x \in A \,:\, y = f(x)$;
2. f è iniettiva, i.e l'elemento $x \in A$ al punto 1. è unico.

Dunque f è biettiva se e solo se

$$\forall\, y \in B,\ \exists! x \in A \,:\, y = f(x).$$

Osserviamo che la relazione sopra definisce una funzione da B in A, perchè ad ogni $y \in B$ associa uno e un solo elemento $x \in A$; l'elemento x è quell'unico elemento tale che $f(x) = y$.

1.3.2 Funzione inversa, restrizione e composizione

Definizione 1.26. *Sia $f : A \to B$ una funzione biunivoca. Si dice inversa di f e si denota con f^{-1} la funzione $f^{-1} : B \to A$ che associa ad $y \in B$ l'unico elemento $x \in A$ tale che $y = f(x)$.*

Esempio 1.27. 1) Data $f(x) = 2x - 1$ la funzione inversa $f^{-1}(y)$ è la funzione che si ottiene così: da

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = 2x - 1 \Leftrightarrow x = \frac{y+1}{2}$$

si ottiene che $f^{-1}(y) = \frac{y+1}{2}$.
2) Data $f(x) = e^x$ la funzione inversa è $f^{-1}(y) = \log y$. Infatti da

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = e^x \Leftrightarrow x = \log y$$

si ottiene che $f^{-1}(y) = \log y$.

Se una funzione f è biunivoca allora il grafico di f^{-1} è:

$$\mathcal{G}_{f^{-1}} = \{(y, x) \in B \times A \,:\, x = f^{-1}(y)\} = \{(y, x) \in B \times A \,:\, (x, y) \in \mathcal{G}_f\}.$$

Si ha allora che il grafico di f^{-1} è il *simmetrico* di quello di f, perchè si ottiene scambiando A con B (nel caso di funzioni reali a valori reali il grafico della funzione inversa è il simmetrico rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante di quello di f.)

Definizione 1.28. *Se $f : A \to B$ ed $E \subseteq A$, si dice restrizione di f ad E la funzione $f|_E : E \to B$ definita da $f|_E(x) = f(x)$ per ogni $x \in E$.*

Esempio 1.29. Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \to \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$ definita da $f(x) = x^2$. Essa non è iniettiva e non è invertibile, ma se consideriamo la funzione $f|_{\mathbb{R}^+}$ dove $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$ essa risulta iniettiva. La sua inversa si costruice così: parto da $y = x^2 \Leftrightarrow x = \sqrt{y}$, da cui $(f|_{\mathbb{R}^+})^{-1}(y) = \sqrt{y}$.

Dall'esempio sopra si capisce che una funzione che non è iniettiva si può rendere iniettiva semplicemente considerando opportune restrizioni della funzione stessa.

Definizione 1.30. *Siano $f : A \to B$, $g : B' \to C$, con $f(A) \subseteq B'$; si dice composizione di f e g la funzione $g \circ f : A \to C$ definita dalla legge $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.*

Esempio 1.31. 1) Se $f(x) = |x^3|$ con $x \neq 0$ e $g(x) = \log x$ allora $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \log(f(x)) = \log(|x^3|)$.

Valgono le seguenti proprietà:

. la composizione di funzioni è associativa: $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$;

. la composizione di funzioni non è commutativa: $f \circ g \neq g \circ f$;

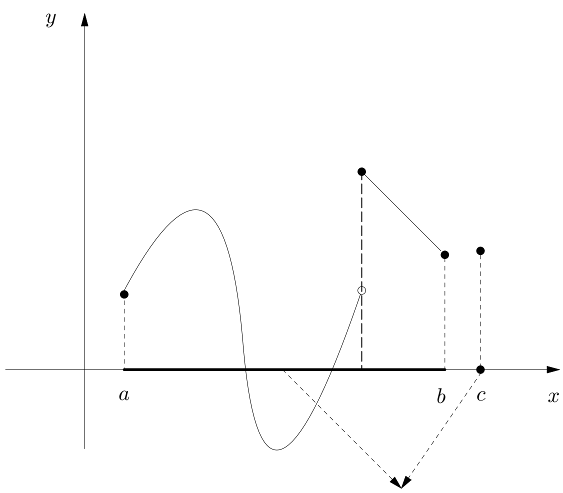
. $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

1.3.3 Funzioni elementari di variabile reale

Nel corso ci occuperemo dello studio delle funzioni reali di variabile reale, cioè studieremo funzioni $f : A \to B \subseteq \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}$. Esse si presentano in modo naturale nello studio di alcune questioni di geometria analitica e di fisica.

Da un punto di vista geometrico, una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ può rappresentarsi attraverso il suo grafico $y = f(x)$: si tratta dei punti del piano della forma $(x, f(x))$ con $x \in A$. Formalmente scriviamo

$$\mathcal{G}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in A, y = f(x)\}.$$



$A = [a, b] \cup \{c\}$

$\mathcal{G}(f)$ è in generale una *(linea) curva* nel piano con la proprietà che ogni retta verticale $x = x_0$ con $x_0 \in A$ interseca $\mathcal{G}(f)$ in un solo punto, il punto $(x_0, f(x_0))$. È dunque chiaro che non tutte le linee curve nel piano sono il grafico di una funzione di variabile reale (vedi esempio 1.20). I concetti del calcolo infinitesimale che introdurremo si potranno interpretare in termini di proprietà geometriche dei grafici delle funzioni di variabile reale e potranno utilizzarsi per capirne le proprietà qualitative e quantitative.

Spesso le funzioni di variabile reale vengono assegnate tramite una legge $x \mapsto f(x)$ che coinvolge le operazioni tra numeri reali sopra introdotte, senza specificare esplicitamente il dominio A su cui sono definite: si intende in tal caso che A è il massimo insieme su cui le operazioni scritte si possono svolgere. Ad esempio, scrivendo

$$f(x) = \frac{2x+7}{x-3}$$

si intende che il dominio A di f è dato da $A = \mathbb{R} \setminus \{3\}$.

Un modo per generare nuove funzioni a partire da alcune date è quello di utilizzare le operazioni introdotte per i numeri reali.

(a) Date due funzioni $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : A \to \mathbb{R}$, si dice **funzione somma** di f e g la funzione

$$\begin{aligned} f+g : A &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) + g(x); \end{aligned}$$

(b) si dice **funzione prodotto** di f e g la funzione

$$\begin{aligned} fg : A &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x)g(x). \end{aligned}$$

Così ad esempio le funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ date da $f(x) = x$ e $g(x) = 7$ danno luogo alla funzione somma $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $h(x) = x + 7$ e alla funzione prodotto $t : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ data da $t(x) = 7x$.

(c) La **funzione differenza** di f e g si definisce in modo simile.

(d) Si può parlare di **funzione quoziente** delle funzioni $f : A \to \mathbb{R}$ e $g : A \to \mathbb{R}$ se $g(x) \neq 0$ per ogni $x \in A$: in tal caso si pone

$$\begin{aligned} f/g : A &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{f(x)}{g(x)}. \end{aligned}$$

(e) Si può infine parlare si **funzione potenza** se $f(x) > 0$ per ogni $x \in A$: in tal caso si pone

$$\begin{aligned} f^g : A &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x)^{g(x)}. \end{aligned}$$

Una classe importante di funzioni è data dalle **funzioni elementari** che di seguito ricordiamo.

1. **Polinomi**. Si tratta delle funzioni $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ della forma

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

dove $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$. Il numero n si dice il grado del polinomio così che f è detto **polinomio di grado n nella variabile** x. I polinomi sono le più semplici funzioni che si possono costruire a partire dalla somma e dal prodotto di numeri reali; pertanto essi sono molto studiati in algebra e svolgono un ruolo di rilievo anche in geometria.

2. **Funzioni razionali fratte**. Si tratta delle funzioni del tipo

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} \setminus C & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0} \end{array}$$

dove C è l'insieme delle radici del polinomio che appare a denominatore. Tali funzioni nascono dunque come quozienti di polinomi. Sono esempi di funzioni razionali fratte le funzioni

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x^3 + 3x + 2}{x(x-1)} \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x}{x^2 + 1}. \end{array}$$

Diremo che una funzione razionale fratta è propria se il polinomio a numeratore ha grado strettamente minore di quello che compare a denominatore. In base alla divisibilità tra polinomi, si ha che ogni funzione razionale fratta può vedersi come somma di un polinomio e di una funzione razionale fratta propria. Ad esempio si ha

$$\frac{x^3}{x^2 + 1} = x - \frac{x}{x^2 + 1}.$$

3. **Potenze e radici**. Dalla teoria delle potenze per i numeri reali si ha che risulta ben definita la funzione

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & x^\alpha \end{array}$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Se $\alpha = 0$, si tratta della funzione costantemente uguale a 1. Nel caso in cui $\alpha = \frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}^+$, otteniamo la funzione radice n-esima: distinguendo tra indice pari e indice dispari, si tratta delle funzioni

$$\begin{aligned} \sqrt[2m]{\cdot} : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto \sqrt[2m]{x} \end{aligned}$$

e (potendosi senza problemi allargare il dominio)

$$\begin{aligned} \sqrt[2m+1]{\cdot} : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt[2m+1]{x}. \end{aligned}$$

4. **La funzione modulo**: È la funzione:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \\ x &\mapsto |x|. \end{aligned}$$

Per la definizione del modulo $|x|$, detto anche valore assoluto, si veda la sezione 3.2.

5. **La funzione esponenziale**. Dato $a > 0$, dalla teoria dei numeri reali si ha che risulta ben definita la funzione

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto a^x. \end{aligned}$$

Tale funzione è detta **funzione esponenziale di base** a. Se $a = 1$, la funzione si riduce alla funzione costante pari a 1. Nel caso in cui la base dell'esponenziale sia il *numero di Nepero e* (che incontreremo più avanti nella teoria dei limiti), si parla semplicemente di **funzione esponenziale**: si tratta della funzione

$$\begin{aligned} exp : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^+ \\ x &\mapsto e^x. \end{aligned}$$

Questa particolare scelta della base si rivela utile in analisi matematica, poiché molte formule del calcolo differenziale e integrale risultano semplificate.

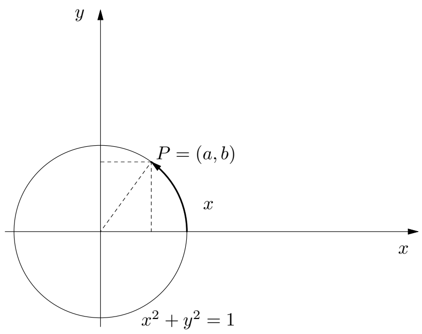
6. **La funzione logaritmica**. Grazie alle proprietà di iniettività e suriettività della funzione esponenziale $x \mapsto a^x$ con $a \neq 1$, è possibile definire la funzione inversa

$$\begin{aligned} \log_a : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \log_a x \end{aligned}$$

dove $\log_a x$ è l'unica soluzione dell'equazione $a^y = x$. Tale numero si dice il **logaritmo in base** a di x. Se la base è uguale al numero di Nepero e, si parla di **logaritmo naturale** o semplicemente **logaritmo** e si scrive $\ln x$. La funzione associata si dice la **funzione logaritmica**

$$\begin{aligned} \ln : \mathbb{R}^+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln x. \end{aligned}$$

7. **Le funzioni circolari**. Nel piano $\mathbb{R}^2$ consideriamo la circonferenza di centro l'origine e raggio unitario. Percorriamo la circonferenza in senso antiorario a partire dal punto $D = (1, 0)$ muovendoci lungo un arco di lunghezza x fino ad arrivare nel punto $P = (a, b)$.



Poniamo

$$\cos x = a \qquad \text{e} \qquad \sin x = b.$$

Se x è negativo, conveniamo di percorrere la circonferenza in senso orario e di porre ancora $P = (\cos x, \sin x)$.

Le funzioni

$$\begin{aligned} \sin : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sin x \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \cos : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \cos x \end{aligned}$$

si dicono le funzioni **seno** e **coseno**. Si parla anche di **funzioni trigonometriche** o **circolari**, dal momento che il generico punto del cerchio unitario viene parametrizzato tramite esse: vale così la relazione fondamentale

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}.$$

Chiamiamo funzione **tangente** l'applicazione

$$\begin{aligned} \tan : \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{\sin x}{\cos x}. \end{aligned}$$

Le restrizioni di seno e coseno su $[-\pi/2, \pi/2]$ e $[0, \pi]$ sono biettive a valori su $[-1, 1]$: è possibile dunque definire le funzioni inverse **arcoseno** e **arcocoseno**

$$\begin{aligned} \arcsin : [-1,1] &\to [-\pi/2, \pi/2] \\ \arccos : [-1,1] &\to [0, \pi] \end{aligned}$$

determinate dalle relazioni

$$y = \arcsin x \Leftrightarrow x = \sin y$$

e

$$y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y.$$

Similmente, la funzione tangente è biettiva tra $]-\pi/2, \pi/2[$ a valori in $\mathbb{R}$: è possibile pertanto definire la funzione inversa **arcotangente**

$$\arctan : \mathbb{R} \to]-\pi/2, \pi/2[$$

definita dalla proprietà

$$y = \arctan x \Leftrightarrow x = \tan y.$$

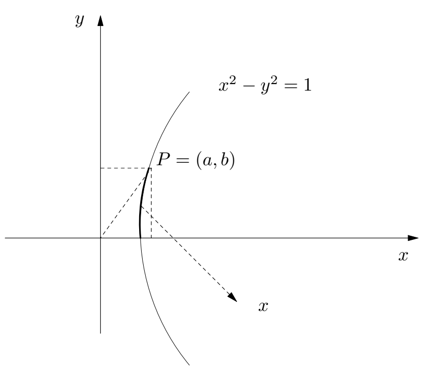
8. **Le funzioni iperboliche**. Definiamo le funzioni **seno iperbolico** e **coseno iperbolico** tramite le formule

$$\begin{aligned} \sinh : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \cosh : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \end{aligned}$$

Si parla di funzioni iperboliche poiché il generico punto P del ramo d'iperbole $x^2 - y^2 = 1$ che giace nel primo quadrante ha coordinate $(\cosh s, \sinh s)$ dove s misura la lunghezza dell'arco PD con $D = (1, 0)$ misurato positivamente salendo nel primo quadrante. Si ha dunque un perfetto parallelismo con le funzioni circolari.



Vale la relazione fondamentale

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1.$$

1.4 Relazioni

Gli insiemi prodotto permettono di definire alcuni importanti oggetti matematici.

Definizione 1.32. *Una "relazione" $\mathcal{R}$ di A in B è un qualsiasi sottoinsieme di $A \times B$.*
Se $A = B$ diremo che essa è una relazione in A.
Diremo che $a \in A$ è in relazione con $b \in B$ tramite $\mathcal{R}$ se $(a, b) \in \mathcal{R}$.
A volte si scriverà $a\,\mathcal{R}\,b$.

Esempio 1.33. 1) il sottoinsieme

$$\mathcal{D} = \{(a, a) : a \in A\} \text{ (la "diagonale" di } A)$$

dà luogo alla relazione di *uguaglianza* in A. Infatti $(a, b) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow a = b$.
2) Le usuali relazioni $<$ e $\leq$ tra numeri reali si identificano con gli insiemi

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x < y\} \qquad \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \leq y\}.$$

Definizione 1.34. *Si dice relazione d'ordine su un insieme non vuoto A una relazione $\mathcal{R}$ che gode delle seguenti proprietà:*

1. *riflessiva:* $\forall x \in A, \qquad x\mathcal{R}x;$
2. *antisimmetrica:* $\forall x, y \in A, \qquad (x\mathcal{R}y \text{ e } y\mathcal{R}x) \Leftrightarrow x = y;$
3. *transitiva:* $\forall x, y, z \in A, \qquad (x\mathcal{R}y \text{ e } y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z.$

Definizione 1.35. *Una relazione d'ordine su un insieme A si dice totale se vale anche la seguente proprietà:*

4. *dicotomia:* $\forall\, x, y \in A, \qquad x\mathcal{R}y \text{ oppure } y\mathcal{R}x;$

A, in questo caso, munito della relazione $\mathcal{R}$ è detto insieme totalmente ordinato.

Esempio 1.36. 1) $\leq$ su $\mathbb{R}$ è una relazione d'ordine totale.
2) Alla relazione $<$ manca la riflessività.
3) Esempio di relazione d'ordine non totale è l'inclusione $\subseteq$ per gli insiemi.

Definizione 1.37. *Si chiama relazione di equivalenza $\mathcal{R}$ in un insieme non vuoto A una relazione che gode delle seguenti proprietà:*

1. *riflessiva:* $\forall x \in A, \qquad x\mathcal{R}x;$
2. *simmetrica:* $\forall x, y \in A, \qquad x\mathcal{R}y \Leftrightarrow y\mathcal{R}x;$

3. *transitiva:* $\forall x, y, z \in A, \qquad (x\mathcal{R}y \text{ e } y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z.$

Esempio 1.38. L'uguaglianza in $\mathbb{R}$ è una relazione di equivalenza. Infatti:

$$\begin{array}{l}
\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad x = x; \\
\forall\, x, y \in \mathbb{R}, \quad x = y \;\Leftrightarrow y = x; \\
\forall\, x, y, z \in \mathbb{R}, \quad x = y \quad \mathbf{e} \quad y = z \quad \Rightarrow \quad x = z.
\end{array}$$

Capitolo 2

I numeri naturali, interi e razionali

Introduciamo in questo capitolo gli insiemi numerici dei numeri naturali, interi e razionali, analizzando per essi solo alcune proprietà. La loro definizione rigorosa discende da quella dei numeri reali (che introdurremo in modo assiomatico nel prossimo capitolo): essi, infatti, costituiscono un sottoinsieme dei numeri reali.
Prima di introdurre i numeri interi introduciamo il concetto di sommatoria che renderà più veloce molte scritture.

Definizione 2.1. *Dato un insieme finito di indici I, con la scrittura*

$$\sum_{i \in I} a_i$$

indichiamo la somma di tutti i numeri a_i, dove l'indice i assume tutti i valori compresi nell'insieme I.

Esempio 2.2. Se $I = 0, 1, 2, 3, 4$ e sono dati i numeri a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, allora

$$\sum_{i \in I} a_i = \sum_{i=0}^{4} a_i = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \sum_{p=0}^{4} a_p,$$

cioè l'indice della somma è muto.

Non è necessario che l'indice della somma parta da zero, perchè si può cambiare facilmente:

$$a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = \sum_{i=5}^{8} a_i = \sum_{h=0}^{3} a_{5+h} = \sum_{j=1}^{4} a_{4+j} = \cdots .$$

Gli elementi nell'argomento della sommatoria possono dipendere anche da due indici

$$\sum_{i=0}^{2} a_{i,j} = a_{0,j} + a_{1,j} + a_{2,j}.$$

Proposizione 2.3. *Se I e J indicano due insiemi finiti di indici e se $(a_i)_{i\in I}$ e $(a_j)_{j\in J}$ sono due famiglie di numeri, tutti reali, allora valgono le seguenti proprietà:*

1. *se $I \cap J = \emptyset$ allora $\sum_{i\in I\cup J} a_i = \sum_{i\in I} a_i + \sum_{j\in J} a_j$;*
2. $\sum_{i\in I}(a_i + b_i) = \sum_{i\in I} a_i + \sum_{i\in I} b_i$;
3. $\sum_{i\in I} ca_i = c\sum_{i\in I} a_i$;
4. $\sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} a_{i,j}\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} a_{i,j}\right)$.

Notazioni analoghe si possono usare per prodotto finito di numeri. Il simbolo $\prod_{i\in I} a_i$ (produttoria) si usa per indicare il prodotto di tutti i numeri a_i, al variare dell'indice i nell'insieme I. Ad esempio:

$$\prod_{i=1}^{3} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3.$$

2.1 I Numeri naturali

Indichiamo con $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \cdots\}$ l'insieme dei numeri naturali.

$\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \cdots\}$ è l'insieme dei numeri naturali strettamente positivi.
La somma e il prodotto di numeri naturali sono *operazioni interne ad* $\mathbb{N}$ (cioè il risultato dell'operazione è ancora un elemento dell'insieme); inoltre esse godono delle seguenti proprietà:

commutativa	$n_1 + n_2 = n_2 + n_1$	$n_1 \cdot n_2 = n_2 \cdot n_1$
associativa	$(n_1 + n_2) + n_3 = n_1 + (n_2 + n_3)$	$(n_1 \cdot n_2) \cdot n_3 = n_1 \cdot (n_2 \cdot n_3)$
distributiva	$n_1 \cdot (n_2 + n_3) = n_1 \cdot n_2 + n_1 \cdot n_3$	

In $\mathbb{N}$, dato un qualsiasi numero naturale n, esiste il suo *successore*, ossia il primo (il più piccolo) numero naturale maggiore di n. L'idea è che a partire da 1 si ottengono via via tutti i numeri naturali con somme successive;

$$2 = 1 + 1; \quad 3 = 2 + 1 = 1 + 1 + 1; \cdots$$

e così via. Per formalizzare in maniera corretta dal punto di vista matematico la frase "e così via" si considera come assioma (cioè si assume VERA) la seguente proposizione detta appunto PRINCIPIO di INDUZIONE.

Assioma: Principio di induzione
Sia $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{N}$ un insieme che verifica le seguenti proprietà:

1. $0 \in \mathcal{S}$;
2. $\forall\, n \in \mathcal{S} \Rightarrow n + 1 \in \mathcal{S}$.

Allora $\mathcal{S} = \mathbb{N}$.

Esistono altre forme equivalenti del principio di induzione. In particolare vale

Proposizione 2.4. *Per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *sia* $\mathcal{P}(n)$ *un predicato. Supponiamo che valgano le seguenti proprietà:*

1. $\mathcal{P}(0)$ *è vera;*
2. $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$.

Allora $\mathcal{P}(n)$ *è vera per ogni* $n \in \mathbb{N}$.

Esempio 2.5.

$\mathcal{P}(n) :\ 2^n > n$.
Verifichiamo 1.: $\mathcal{P}(0)$ è vera, cioè $2^0 = 1 > 0$ (vera).
Verifichiamo 2.: $\mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$. Per ipotesi sappiamo che $2^n > n$. Verificare 2., significa che a partire da questa ipotesi bisogna verificare che vale $2^{n+1} > n+1$. Ora

$$2^{n+1} = 2 \cdot 2^n = 2^n + 2^n > 2^n + n \geq n + 1.$$

Abbiamo quindi dimostrato che $2^n > n,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

La Proposizione 2.4 può essere formulata, in generale, partendo da un $n_0 > 0$ al posto di 0 e $\{n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0\}$ al posto di $\mathbb{N}$: in questo caso il principio di induzione varrà nella forma:
Se

1. $\mathcal{P}(n_0)$ è vera;
2. $\forall n \geq n_0,\ \mathcal{P}(n) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$,

allora $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni $n \geq n_0$.

Esempio 2.6.

$$\mathcal{P}(n) :\quad 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}. \tag{2.1}$$

Qui $n_0 = 1$.
Verifichiamo 1.: $\mathcal{P}(1) : 1 = \frac{1(1+1)}{2}$ (vera).
Verifichiamo 2.: Supponiamo allora che $\mathcal{P}(n)$ sia vera. Abbiamo

$$\begin{aligned}&\mathcal{P}(n+1) = \textstyle\sum_{i=1}^{n+1} i = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)\ +\ (n+1) = \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} i\ +\ (n+1) = \frac{n(n+1)}{2}\ +\ (n+1) = \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}.\end{aligned}$$

Perciò $\mathcal{P}(n+1)$ è vera, e quindi, dal principio di induzione, $\mathcal{P}(n)$ è vera $\forall n \geq 1$.

Esempio 2.7 (Disuguaglianza di Bernoulli)**.** Usiamo la convenzione che $0^0 = 1$. Dimostriamo che vale la seguente disuguaglianza:

$$\forall h \geq -1, \forall n \in \mathbb{N}, \ \ (1+h)^n \geq 1 + nh. \tag{2.2}$$

Consideriamo $\mathcal{P}(n) : (1+h)^n \geq 1 + nh$.
È evidente che $\mathcal{P}(1)$ è vera. Mostriamo adesso che $\mathcal{P}(n)$ implica $\mathcal{P}(n+1)$. Si ha

$$(1+h)^{n+1} = (1+h)(1+h)^n,$$

da cui usando $\mathcal{P}(n)$ e il fatto che $h \geq -1$ (e quindi $(1+h) \geq 0$), si ha

$$(1+h)^{n+1} = (1+h)(1+h)^n \geq (1+h)(1+nh) = 1+h+nh+nh^2 = 1+(n+1)h+nh^2 \geq 1+(n+1)h$$

ossia vale $\mathcal{P}(n+1)$. Per il principio di induzione $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni n, dunque (2.2) è dimostrata.

Come conseguenza del principio di induzione, si può dimostrare un'altra importante proprietà dei numeri naturali; essi sono BEN ORDINATI, ossia ogni sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{N}$ ammette *minimo* (il concetto di minimo rigoroso verrà dato più avanti). Vale infatti

Proposizione 2.8 (Principio del minimo intero)**.** *Ogni sottoinsieme non vuoto di* $\mathbb{N}$ *ha minimo.*

Osservazione 2.9. Questa proprietà non è soddisfatta dai numeri reali: ogni insieme non vuoto in generale ha estremo inferiore ma non minimo.

2.1.1 Calcolo combinatorio

Introduciamo in questa sezione alcuni oggetti che si definiscono a partire dai numeri naturali.

- *Fattoriale di n*: $\quad 0! = 1, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (n+1)! = (n+1) \cdot n!.$

  Per esempio: $1! = 1$, $2! = 2 \cdot 1 = 2$, $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1$,..

- *Coefficienti binomiali*: Siano $k, n \in \mathbb{N}$, $0 \leq k \leq n$. Allora:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

  Per esempio: $\binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{0}{0} = 1$, ..

  Se $k > n$ si pone, per definizione, $\binom{n}{k} = 0$. Valgono le seguenti relazioni:

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

La motivazione per l'introduzione dei coefficienti binomiali sta nella prossima proposizione, nota con il nome di *Formula del Binomio di Newton.*

Proposizione 2.10. *Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ la potenza n-esima del binomio $(a+b)$ è data da*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Usiamo la convenzione che $0^0 = 1$.

2.2 I Numeri interi e razionali

Indichiamo con

$$\mathbb{Z} = \{\cdots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\}$$

l'insieme dei numeri *interi (relativi).*

La somma, il prodotto e la sottrazione sono operazioni interne a $\mathbb{Z}$.

Indichiamo con

$$\mathbb{Q} = \left\{ r = \frac{m}{n},\ m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0 \right\}$$

l'insieme dei numeri razionali.

Sono operazioni interne a $\mathbb{Q}$ la somma il prodotto, la sottrazione e la divisione per un numero razionale non nullo.
Un numero razionale ha

- una *rappresentazione decimale limitata.*

  Esempi:

$$-\frac{3}{4} = -0.75, \quad \frac{5}{4} = 1.25 \ .$$

oppure

- una *rappresentazione decimale illimitata periodica.*

  Esempi:

$$-\frac{1}{3} = -0.333333\cdots = -0.\overline{3},\ \frac{19}{7} = 2.714285714285714285\cdots = 2.\overline{714285}\ .$$

I numeri razionali sono totalmente ordinati (ossia due numeri razionali si possono sempre confrontare) ma non sono *ben ordinati* (ossia non è detto che ogni sottoinsieme non vuoto abbia minimo). Per esempio, non esiste il più piccolo numero razionale maggiore di zero. La relazione d'ordine di $\mathbb{Q}$ possiede però tutte le proprietà algebriche dell'ordine sui numeri reali (vedi la sezione 3).

I numeri razionali ci permettono di eseguire tutte le operazioni aritmetiche e rappresentano tutti i numeri che incontriamo ogni giorno; infatti le misure che possiamo prendere (lunghezze, aree, masse) sono necessariamente approssimate, perchè non è possibile eseguire misurazioni con precisione infinita.

Ci sono grandezze ideali che non possono essere espresse però tramite un numero razionale (per esempio, già i Pitagorici avevano osservato che la lunghezza della diagonale di un quadrato di lato 1 è $\sqrt{2}$, che non è un numero razionale).

Esistono poi anche equazioni molto semplici che non possono essere risolte in $\mathbb{Q}$: per esempio $x^2 - 2 = 0$.

Proposizione 2.11. *Se un numero x soddisfa $x^2 = 2$, allora x non è razionale.*

Dimostrazione. Supponiamo PER ASSURDO che x sia razionale:

$$\exists m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : \quad x = \frac{m}{n}$$

e che m ed n NON abbiano FATTORI COMUNI. Eleviamo al quadrato la precedente espressione:

$$x^2 = \frac{m^2}{n^2} = 2 \quad \Rightarrow \quad m^2 = \boxed{2n^2} \quad \Rightarrow \quad m^2 \text{ numero PARI} \quad \Rightarrow \quad m \text{ numero PARI.}$$

Quindi $\exists k \in \mathbb{N}$: $m = 2k$. Pertanto

$$4k^2 = 2n^2 \quad \Rightarrow \quad n^2 = \boxed{2k^2} \quad \Rightarrow \quad n^2 \text{ numero PARI} \quad \Rightarrow \quad n \text{ numero PARI.}$$

Allora m ed n sono PARI. ASSURDO poichè si supposto che m ed n NON avessero FATTORI COMUNI. Otteniamo che x NON è RAZIONALE. □

In un certo senso, questa proposizione ci dice che l'insieme dei numeri razionali è un insieme "bucherellato".

Capitolo 3

I Numeri Reali

3.1 Struttura algebrica

L'insieme dei numeri reali è un insieme che gode delle seguenti proprietà algebriche:

- $\mathbb{R}$ è un *campo* rispetto alla somma e al prodotto, che godono delle seguenti proprietà.

  Operazione di SOMMA $= + : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\forall a, b \in \mathbb{R}$	$a + b = b + a$	$+$ è commutativa
$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$+$ è associativa
$\exists 0 \in \mathbb{R}$, $\forall a \in \mathbb{R}$:	$a + 0 = 0 + a = a$	$0 =$ elemento neutro di $+$
$\forall a \in \mathbb{R}$, $\exists! - a \in \mathbb{R}$:	$a + (-a) = (-a) + a = 0$	$-a =$ opposto di a rispetto a $+$

  Operazione di PRODOTTO $= \cdot : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\forall a, b \in \mathbb{R}$	$a \cdot b = b \cdot a$	$\cdot$ è commutativa
$\forall a, b, c \in \mathbb{R}$	$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	$\cdot$ è associativa
$\exists 1 \in \mathbb{R}$, $\forall a \in \mathbb{R}$:	$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$	$1 =$ elemento neutro di $\cdot$
$\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\exists! a^{-1} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$:	$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$	$a^{-1} =$ reciproco di a rispetto a $\cdot$

  La somma e il prodotto godono della seguente proprietà:

  Proprietà distributiva:

  $$\begin{array}{ll} \forall a, b, c \in \mathbb{R} & a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \\ \forall a, b, c \in \mathbb{R} & (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c. \end{array}$$

- $\mathbb{R}$ ha **un ordinamento totale**. La relazione $\leq$ su $\mathbb{R}$:

  $$a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad a < b \text{ oppure } a = b$$

  è una relazione d'ordine TOTALE che gode della seguente proprietà:

$$\forall a,b,c\in\mathbb{R}\quad \text{se } a\le b \qquad\qquad \text{allora}\quad a+c\le b+c,$$

$$\forall a,b,c\in\mathbb{R}\quad \text{se } a\le b \text{ e} \begin{cases} c>0 \\ 0=c \\ c<0 \end{cases} \quad \text{allora} \quad \begin{cases} a\cdot c\le b\cdot c \\ a\cdot 0=0=b\cdot 0 \\ a\cdot c\ge b\cdot c. \end{cases}$$

Useremo le seguenti notazioni:

Insieme dei numeri reali positivi: $\mathbb{R}^+=\{a\in\mathbb{R}:\ a>0\}$.
Insieme dei numeri reali NON negativi: $\{0\}\cup\mathbb{R}^+=\{a\in\mathbb{R}:\ a\ge 0\}$.
Insieme dei numeri reali negativi: $\mathbb{R}^-=\{a\in\mathbb{R}:\ a<0\}$.
Insieme dei numeri reali NON positivi: $\{0\}\cup\mathbb{R}^-=\{a\in\mathbb{R}:\ a\le 0\}$.

3.2 Valore assoluto

Usando l'ordine su $\mathbb{R}$ possiamo definire il valore assoluto di un numero reale.

Definizione 3.1. *Sia $a\in\mathbb{R}$. Si definisce valore assoluto (o modulo) di a il numero*

$$|a|=\begin{cases} a & \textit{se}\ \ a\ge 0 \\ -a & \textit{se}\ \ a<0. \end{cases}$$

Si ha sempre:

- $|a|\ge 0$;
- $|a|=0\Leftrightarrow a=0$.

Inoltre, per ogni coppia di numeri reali $a,b\in\mathbb{R}$ sono verificate le seguenti disuguaglianze:

$$|a+b|\le|a|+|b| \qquad (\textit{disuguaglianza triangolare}); \tag{3.1}$$

$$|a-b|\ge|a|-|b|. \tag{3.2}$$

$$||a|-|b||\le|a-b|. \tag{3.3}$$

$$|a\cdot b|=|a|\cdot|b|. \tag{3.4}$$

A partire dalla nozione di valore assoluto si può definire il concetto di *distanza* fra due numeri reali. Precisamente:

Definizione 3.2. *Siano $x,y\in\mathbb{R}$. Si definisce distanza fra i due numeri x e y il numero reale non negativo*

$$d(x,y)=|x-y|.$$

Si verificano le seguenti proprietà:

1. $d(x,y)\ge 0$, $d(x,y)=0$ se e solo se $x=y$;
2. $d(x,y)=d(y,x)$.
3. Disuguaglianza triangolare: $\forall x,y,z\in\mathbb{R}$, $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$.

3.3 L'assioma di Dedekind: completezza dei numeri reali

Gli assiomi relativi alla struttura algebrica dei numeri reali sono ancora insufficienti a descrivere completamente l'insieme dei numeri reali. Quello che manca è l'assioma di Dedekind, che rende conto di una delle proprietà fondamentali dei numeri reali, ossia la continuità (o "completezza"). Questa proprietà li distingue dagli altri insiemi numerici (per esempio i numeri razionali ne sono privi) e rende $\mathbb{R}$ l'insieme più adatto all'analisi, non appena si passa dalle operazioni algebriche elementari (somma, prodotto, ecc) allo studio di relazioni più complesse.
Assioma di Dedekind: Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$, non vuoti, tali che

$$a \leq b \quad \forall a \in A, \quad \forall b \in B.$$

Allora

$$\exists c \in \mathbb{R} : \quad a \leq c \leq b \quad \forall a \in A, \quad \forall b \in B.$$

Chiamiamo c : *elemento separatore* di A e B.
A e B nelle condizioni precedenti si dicono classi *separate*.

Osservazione 3.3. Attenzione a non invertire l'ordine dei quantificatori. Scrivere

$$\forall a \in A, \forall b \in B \quad \exists c \in \mathbb{R} : \quad a \leq c \leq b.$$

è un errore grave. Infatti in questa scrittura sbagliata c si potrebbe scegliere in funzione di a e b (basterebbe prendere $c = a$). Invece nell'assioma di Dedekind c deve essere *indipendente da a e b* e deve *separare* i due insiemi.
Osserviamo ancora che l'elemento separatore non è unico: per esempio se

$$A = \{x \in \mathbb{R}\,;\, x < -2\} \qquad B = \{x \in \mathbb{R}\,;\, x > 2\}$$

allora tutti i numeri fra -2 e 2 sono separatori.
L'elemento separatore è unico se gli insiemi A e B sono *contigui*, ossia se in A e in B esistono elementi arbitrariamente vicini.

La proprietà espressa dall'assioma di Dedekind si può anche enunciare dicendo che i numeri reali sono continui, o l'insieme $\mathbb{R}$ non ha lacune. Un altro modo equivalente è dire che $\mathbb{R}$ è *completo*. Tale proprietà non è soddisfatta dai numeri razionali.

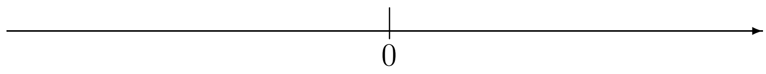
Osservazione 3.4. $\mathbb{Q}$ ***NON è completo***. Ad esempio, siano

$$A = \left\{a \in \mathbb{Q}^+ \cup \{0\} : \quad a^2 \leq 2\right\}, \quad B = \left\{b \in \mathbb{Q}^+ : \quad b^2 \geq 2\right\}.$$

Si ha $a \leq b$ $\forall a \in A$, $\forall b \in B$. MA NON ESISTE $c \in \mathbb{Q}$*: $a \leq c \leq b$, $\forall a \in A$, $\forall b \in B$. Un tale c dovrebbe essere necessariamente $c = \sqrt{2}$, ma $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.*

Osservazione 3.5. $\mathbb{R}$ COMPLETO equivale, geometricamente, al fatto che ogni punto di una retta può essere univocamente associato ad un numero reale e, viceversa, a ogni numero reale corrisponde uno e un solo punto di una retta.

Si può quindi rappresentare geometricamente $\mathbb{R}$ con la
Retta reale:



3.4 Estremo inferiore e superiore di un insieme

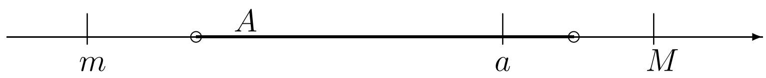
L'assioma di Dedekind consente di introdurre un concetto molto importante, quello dell'*estremo superiore e inferiore di un insieme*, concetti che formalizzano l'idea di dove "inizia" e dove "finisce" un insieme.

3.4.1 Maggioranti e minoranti

Cominciamo con l'introdurre la nozione di *maggioranti* e *minoranti*.

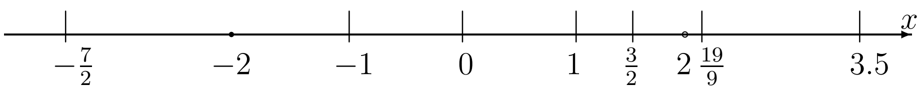
Definizione 3.6. *Siano $A \subseteq \mathbb{R}$, $M, m \in \mathbb{R}$.*

- *M è un maggiorante per A se $\forall a \in A,\ \ a \leq M$.*
- *m è un minorante per A se $\forall a \in A,\ \ m \leq a$.*



Esempio 3.7. Sia $A = \{x \in \mathbb{R} :\ -2 \leq x < 2\}$. Allora

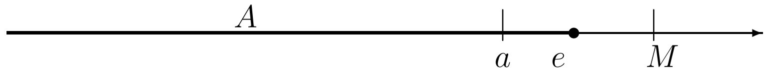
- $2, \dfrac{19}{9}, 3.5, \sqrt{26}, 150$ sono maggioranti per A.
- $-\sqrt{41}, -\dfrac{7}{2}$ sono minoranti per A.
- $-1,\ 0,\ 1,\ \dfrac{3}{2}$ non sono nè maggioranti nè minoranti per A.



- L'insieme dei maggioranti per A è $\{x \in \mathbb{R} :\ x \geq 2\}$.

- L'insieme dei minoranti per A è $\{x \in \mathbb{R} : \ x \leq -2\}$.

Esempio 3.8. Sia $A = \{x \in \mathbb{R} : \ x \leq e\}$.



- L'insieme dei maggioranti per A è $\{x \in \mathbb{R} : \ x \geq e\}$.
- L'insieme dei minoranti per A è $\emptyset$.

3.4.2 Massimi e minimi

Definizione 3.9. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Si chiama massimo di A un maggiorante M di A tale che $M \in A$. Si chiama minimo di A un minorante m di A tale che $m \in A$.*

Il massimo di A è quindi quel numero $M \in A$ che gode delle seguenti proprietá:

1. per ogni $a \in A$ si ha $a \leq M$, ossia M è maggiornate di A;
2. $M \in A$, quindi in particolare non esistono maggioranti di A che siano più piccoli di M.

In altre parole il *massimo di A*, se esiste, *è il più piccolo dei maggioranti di A* ed è denotato con $\max A$.
Analogamente, il *minimo di A*, se esiste, *è il più grande dei minoranti di A* ed è denotato con $\min A$.

Esempio 3.10. $A = \{x \in \mathbb{R} :, -1 \leq x \leq 2\}$ ha massimo $\max A = 2$ e minimo $\min A = -1$.

Esempio 3.11. $A = \{x \in \mathbb{R} :, -1 \leq x < 2\}$ ha minimo $\min A = -1$ e non ha massimo.

Esempio 3.12. $A = \{x \in \mathbb{R} :, -1 < x \leq 2\}$ ha massimo $\max A = 2$ e non ha minimo.

3.4.3 Insiemi limitati

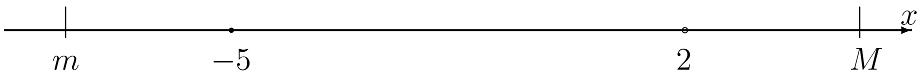
Introduciamo ora il concetto di *insieme superiormente e/o inferiormente limitato.*

Definizione 3.13. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Si dice che*

- *A è superiormente limitato se* <u>esiste almeno un</u> maggiorante *M per A, cioè*
$$\exists M \in \mathbb{R} : \quad \forall a \in A \quad a \leq M.$$
- *A è inferiormente limitato se* <u>esiste almeno un</u> minorante *m per A, cioè*
$$\exists m \in \mathbb{R} : \quad \forall a \in A \quad a \geq m.$$

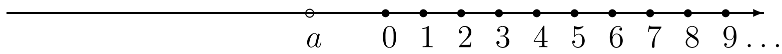
Esempio 3.14. Sia $A = \{x \in \mathbb{R} : \ -5 \leq x < 2\}$. Allora

- Qualunque $M \geq 2$ è maggiorante di A. A è superiormente limitato.
- Qualunque $m \leq -5$ è minorante di A. A è inferiormente limitato.



Esempio 3.15. $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ è inferiormente limitato. Infatti

$$\forall a \in \mathbb{R}^- \cup \{0\} \quad a \leq n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

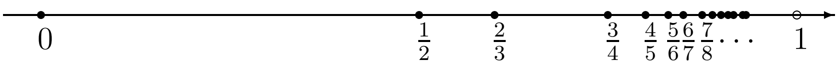


Esempio 3.16. L'insieme

$$A = \left\{ \frac{n}{n+1} : \ n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots \right\}$$

è sia inferiormente limitato e sia superiormente limitato. Infatti

$$0 \leq \frac{n}{n+1} < 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$



Definizione 3.17. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Diciamo che A è limitato se A è sia inferiormente limitato sia superiormente limitato, cioè*

$$\exists m, M \in \mathbb{R} : \quad \forall a \in A \quad m \leq a \leq M.$$

Per gli insiemi limitati superiormente e inferiormente vale la seguente proprietà:

Proposizione 3.18. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme non vuoto e limitato superiormente. L'insieme dei maggioranti di A, $M(A)$, ha minimo.*

Dimostrazione. Consideriamo $M(A) := \{M \in \mathbb{R} : \ a \leq M, \forall a \in A\}$ e il suo complementare, che indichiamo con M'. Vale che

$$M(A) \cup M' = \mathbb{R}, \quad M(A) \cap M' = \emptyset, \quad m' \leq m, \quad \forall m' \in M', \forall\, m \in M(A).$$

Per l'assioma di Dedekind (M' e $M(A)$ sono due classi separate) esiste L elemento separatore, che per definizione verifica

$$m' \leq L \leq m, \quad \forall m' \in M', \forall\, m \in M(A).$$

È immediato verificare che L è l'unico elemento separatore per le classi M' e $M(A)$ (cioè che gli insiemi M' e $M(A)$ sono contigui). Chiaramente, L è un minorante per l'insieme $M(A)$. Dimostriamo ora che $L \in M(A)$. Se, per assurdo, fosse $L \in M'$ (cioè L non fosse un maggiorante di A), esisterebbe $a \in A$ tale che $L < a$. Allora si avrebbe

$$L < \frac{L+a}{2} < a \in A \quad \text{e} \quad \frac{L+a}{2} \in M'.$$

Ma questo è assurdo, perchè si otterrebbe che anche $\frac{L+a}{2}$ è elemento separatore per $M(A)$ e M', cosa che non può essere data l'unicità dell'elemento separatore. Quindi L è il minimo di $M(A)$. □

3.4.4 Estremo inferiore e superiore di un insieme

Possiamo allora dare la seguente definizione.

Definizione 3.19. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme limitato superiormente. Diremo estremo superiore di A il minimo dei maggioranti di A e lo indicheremo con* $\sup A$. *Analogamente, per $A \subseteq \mathbb{R}$ insieme limitato inferiormente, diremo estremo inferiore di A il massimo dei minoranti di A e lo indicheremo con* $\inf A$.

Dalla definizione, segue che per ogni insieme non vuoto A, vale

$$\inf A \leq \sup A, \tag{3.5}$$

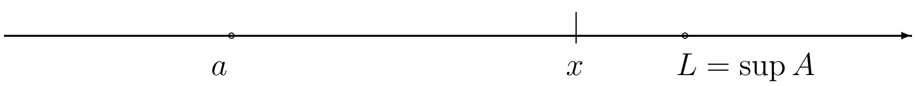
dato che, $\forall x \in A$ si ha $\inf A \leq x \leq \sup A$.
Il sup e l'inf di un insieme sono caratterizzati dalle seguenti proprietà.

Proposizione 3.20 (Caratterizzazione del sup)**.** *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ limitato superiormente. Il numero $L = \sup A \in \mathbb{R}$ è caratterizzzato dalle seguenti proprietà.*

1. *$\forall x \in A$, $x \leq L$*
2. *$\forall m \in \mathbb{R}$, con $m < L$, $\exists x \in A$: $x > m$.*

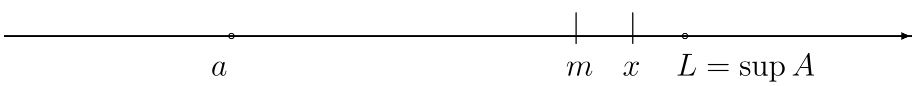
Ciò significa:

1. L è un maggiorante di A.



2. Ogni numero reale m minore di L NON è maggiorante per A.

   Quindi L è il *più piccolo dei maggioranti.*



Osservazione 3.21 (Caratterizzazione del sup con ε)**.** La Proposizione 3.20 può essere formulata anche nel seguente modo. $L = \sup A$ se e solo se

1. $\forall x \in A$, $x \leq L$
2. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, x \in A \,:\, L - \varepsilon < x$.

Analogamente vale la seguente proposizione

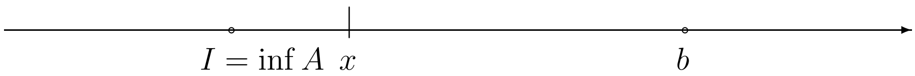
Proposizione 3.22 (Caratterizzazione dell'inf)**.** *Sia* $A \subseteq \mathbb{R}$ *inferiormente limitato.* $I = \inf A \in \mathbb{R}$ *se e solo se*

1. $\forall x \in A$, $x \geq I$

2. $\forall m \in \mathbb{R}$, *con* $m > I$, $\exists x \in A$*:* $x < m$.

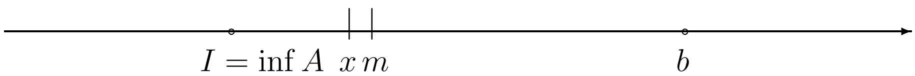
Ciò significa:

1. I è un minorante di A.



2. Ogni numero reale m maggiore di I NON è minorante per A.

   Quindi I è il *più grande dei minoranti.*



Osservazione 3.23 (Caratterizzazione dell' inf con ε)**.** La Proposizione 3.22 può essere formulata così: $I = \inf A$ se e solo se

1. $\forall x \in A$, $x \geq I$
2. $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, x \in A \,:\, x < I + \varepsilon$.

Osserviamo che dalla Definizione 3.19 **non** segue, in generale, sup e inf di un insieme appartengano all'insieme.

Esempio 3.24. L'insieme
$$A = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x < b\}$$
è tale che $a = \inf A \notin A$ e $b = \sup A \notin A$.

L'estremo superiore e inferiore di un insieme hanno un comportamento particolare rispetto all'inclusione di insiemi. Dalla Definizione 3.19, discende la seguente proprietà.

Proposizione 3.25. *Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$ sottoinsiemi non vuoti, tali che $A \subseteq B$. Allora*

$$\sup A \leq \sup B; \qquad \inf A \geq \inf B.$$

Quando l'estremo superiore e inferiore appartengono all'insieme si diranno massimo e minimo. Vale infatti la seguente proposizione.

Proposizione 3.26. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ un insieme superiormente limitato e sia $L = \sup A \in \mathbb{R}$. Se $L \in A$, allora L è il massimo di A.*
Analogamente, se A è inferiormente limitato, sia $I = \inf A \in \mathbb{R}$. Se $I \in A$, allora I è il minimo di A.

Osservazione 3.27. Mentre il sup e l'inf di un insieme esistono sempre, il massimo e il minimo di un insieme possono non esistere. Nell'esempio sopra, l'insieme

$$A = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x < b\}$$

non ha massimo nè minimo.

Osservazione 3.28. È comodo parlare di estremo superiore e inferiore anche di insiemi non limitati superiormente e inferiormente. Se A *non è limitato superiormente*, cioè:

$$\forall M \in \mathbb{R},\ \exists x \in A \,:\, x > M,$$

allora porremo, per definizione, $\sup A = +\infty$.

Analogamente, se A *non è limitato inferiormente*, cioè:

$$\forall m \in \mathbb{R},\ \exists x \in A \,:\, x < m$$

allora porremo, per definizione, $\inf A = -\infty$.

Esempio 3.29. Gli insiemi $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ non sono superiormente limitati. Poichè

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q},$$

Basta dimostrare che $\sup \mathbb{N} = +\infty$. Questo discende dalla *proprietà di Archimede*:

Proposizione 3.30 (*Proprietà di Archimede*)**.** *Per ogni $a, b \in \mathbb{R}^+$, allora esiste $n \in \mathbb{N}^+$ tale che $na > b$.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esistano due numeri reali positivi a, b tali che

$$na \leq b, \quad \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

Allora l'insieme dei multipli di a:

$$A = \{na, n \in \mathbb{N}^+\}$$

(chiaramente A è non vuoto, perche $a \in A$) è limitato superiormente, dato che ammette b come maggiorante. Sia $L = \sup A \in \mathbb{R}$. Allora, per ogni $m \in \mathbb{N}^+$

$$(m+1)a \leq L$$

da cui

$$ma \leq L - a, \quad \forall m \in \mathbb{N}^+.$$

Ma allora $L - a$ sarebbe un maggiorante di A e questo assurdo perchè $L - a < L$ e L, per definizione, è il più piccolo dei maggioranti. $\square$

Il fatto che $\sup \mathbb{N} = +\infty$ discende facilmente dalla proprietà di Archimede prendendo $a = 1$: per ogni $b \in \mathbb{R}^+$, esiste $n \in \mathbb{N}^+$ tale che $n > b$.

Un altro risultato importante che segue dalla proprietà di Archimede è la proprietà che dice che $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$.

Proposizione 3.31. *Dati comunque due numeri reali a, b tali che $a < b$, esiste sempre un numero razionale q tale che $a \leq q \leq b$.*

Dimostrazione. Possiamo supporre che a e b siano positivi. Sia N un intero maggiore di $\dfrac{1}{(b-a)}$ (la cui esistenza è garantita dalla proposizione precedente) e consideriamo la successione di numeri razionali $\dfrac{1}{N}, \dfrac{2}{N}, \cdots, \dfrac{i}{N}$, ... Di questi solo un numero finito è minore o uguale ad a. Sia $\dfrac{k}{N}$ il più grande di essi; allora il numero $r = \dfrac{(k+1)}{N}$ è compreso fra a e b. Infatti, per costruzione si ha $r > a$. Dimostriamo procedendo per assurdo che $r < b$. Infatti, se fosse $r \geq b$ risulterebbe

$$\frac{1}{N} = r - \frac{k}{N} \geq b - \frac{k}{N} \geq b - a$$

e dunque

$$N \leq \frac{1}{b-a},$$

mentre per N si ha la disuguaglianza opposta. Abbiamo allora trovato che il numero razionale $r = \dfrac{(k+1)}{N}$ verifica $a < r < b$. $\square$

Notazioni: Poniamo per definizione $\sup \emptyset = -\infty$ e $\inf \emptyset = +\infty$.

3.5 Retta reale estesa

Introduciamo una convenzione che dà una sistemazione teorica alle scritture $\sup A = +\infty$ e $\inf A = -\infty$.

Definizione 3.32. *Chiamiamo insieme dei numeri reali estesi (denotato con il simbolo $\overline{\mathbb{R}}$) l'insieme costituito dai numeri reali e dai due simboli $+\infty$ e $-\infty$ (che non sono numeri reali) (cioè $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$).*

Su $\overline{\mathbb{R}}$ introduciamo una relazione d'ordine, estendendo quella su $\mathbb{R}$ e ponendo

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad -\infty \leq x \leq +\infty;$$

inoltre estendiamo in maniera naturale la somma e il prodotto di $\mathbb{R}$, ponendo

$$\begin{array}{ll}\forall\, x < +\infty,\ x + (-\infty) = -\infty, & \forall\, x > -\infty,\ x + (+\infty) = +\infty,\\ \forall\, x > 0,\ x \cdot (+\infty) = +\infty, & \forall\, x < 0,\ x \cdot (+\infty) = -\infty,\\ \forall\, x > 0,\ x \cdot (-\infty) = -\infty, & \forall\, x < 0,\ x \cdot (-\infty) = +\infty.\end{array}$$

<u>Non sono definite</u> (e quindi non hanno senso) le operazioni

$$(+\infty) + (-\infty) \qquad\qquad (\pm\infty) \cdot 0.$$

Con queste convenzioni, $\overline{\mathbb{R}}$ è un insieme

- totalmente ordinato;
- ogni sottoinsieme non vuoto di $\overline{\mathbb{R}}$ ha dei maggioranti (almeno $+\infty$),
- ogni sottoinsieme non vuoto di $\overline{\mathbb{R}}$ ha estremo superiore e inferiore;
- delle caratterizzazioni dell'estremo inferiore e superiore, non valgono più quelle con ε (cf. le Osservazioni 3.21 e 3.23), che invece valgono solo se sup e inf sono numeri reali.

Introduciamo ora dei simboli molto comodi per indicare alcuni sottoinsiemi di $\overline{\mathbb{R}}$.

Definizione 3.33. *Un sottoinsieme $I \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ è un intervallo se e solo se*

$$\forall x, y \in I \quad x < z < y \quad \Rightarrow \quad z \in I.$$

Dunque un insieme è un intervallo se, presi comunque due suoi punti, contiene tutti i punti intermedi: la nozione di intervallo traduce l'idea di un insieme senza "buchi".

Definizione 3.34. *Siano $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ e tali che $a \leq b$. Definiamo intervallo chiuso di estremi a e b l'insieme*

$$[a, b] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : \quad a \leq x \leq b\}.$$

Definizione 3.35. *Siano $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ e tali che $a < b$. Definiamo intervallo aperto di estremi a e b l'insieme*

$$(a, b) =]a, b[= \{x \in \overline{\mathbb{R}} : \quad a < x < b\}.$$

Definizione 3.36. *Siano $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ e tali che $a < b$. Definiamo intervallo SEMI-APERTO A DESTRA di estremi a e b l'insieme*

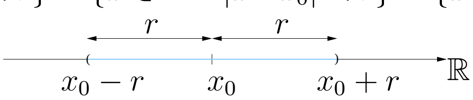
$$[a, b) = [a, b[= \{x \in \overline{\mathbb{R}} : \quad a \leq x < b\}.$$

Definizione 3.37. *Siano $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ e tali che $a < b$. Definiamo intervallo SEMI-APERTO A SINISTRA di estremi a e b l'insieme*

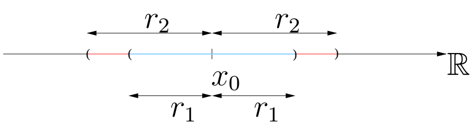
$$(a, b] =]a, b] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} : \quad a < x \leq b\}.$$

Definizione 3.38. *Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e $r > 0$. Chiamiamo intorno sferico di centro x_0 e raggio r l'insieme dei numeri reali che distano da x_0 meno di r. In simboli,*

$$I_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, d(x, x_0) < r\} = \{x \in \mathbb{R} \,:\, |x - x_0| < r\} = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x_0 - r < x < x_0 + r\}.$$



Osservazione 3.39. Se, fissato $x_0 \in \mathbb{R}$, facciamo variare il raggio r in $\in \mathbb{R}^+$, otteniamo la famiglia di tutti gli intorni di centro x_0.
In particolare, se $r_1 < r_2$ si ha $I_{r_1}(x_0) \subseteq I_{r_2}(x_0)$.



Definizione 3.40. *Per ogni $M \in \mathbb{R}^+$, chiamiamo intorno di $+\infty$ di estremo inferiore M, l'intervallo aperto e superiormente illimitato*

$$\boxed{I_M(+\infty) = (M, +\infty) =]M, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x > M\}}.$$

Analogamente, l'intorno di $-\infty$ di estremo superiore $-M$ è l'insieme

$$\boxed{I_M(-\infty) = (-\infty, -M) =] - \infty, -M[= \{x \in \mathbb{R} : x < -M\}}.$$

Nelle definizioni precedenti, se le disuguaglianze non sono strette (ossia valgono con $\leq$ al posto di $<$), allora si parla di intorni chiusi, chiusi a destra e sinistra. Con un abuso di notazione indicheremo con lo stesso simbolo intorni chiusi e aperti: il problema specifico che si sta studiando chiarificherà, di volta in volta, quale intorno viene preso in esame.

Capitolo 4

I numeri complessi

4.1 Motivazioni

- I numeri complessi vengono introdotti perché tutte le equazioni algebriche abbiamo soluzione: per esempio l'equazione $x^2 + 1 = 0$ non ha soluzione in campo reale, lo ha invece nell'insieme dei numeri complessi.

- I numeri complessi servono per calcolare le radici quadrate di numeri negativi: tale problema si manifesta per la prima volta nel sedicesimo secolo, quando si voleva risolvere il problema della determinazione delle soluzioni di un'equazione di terzo grado. Consideriamo l'equazione

$$x^3 - 3px - 2q = 0, \tag{4.1}$$

che ha sempre almeno una radice reale. Se si pone

$$\begin{aligned} x &= u + v \\ p &= uv \end{aligned}$$

l'equazione (4.1) diventa

$$u^3 + v^3 - 2q = 0, \tag{4.2}$$

e dunque, poiché $v = \frac{p}{u}$,

$$u^6 - 2qu^3 + p^3 = 0.$$

Quest'ultima equazione ha come soluzioni

$$u^3 = q \pm \sqrt{q^2 - p^3},$$

e dalla (4.2) si ottiene

$$v^3 = q \mp \sqrt{q^2 - p^3}.$$

Cosicché si ha che l'equazione di partenza (4.1) ha come soluzione

$$x = u + v = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}.$$

Si noti che questi calcoli formali sono corretti se $q^2 - p^3 \geq 0$, ma quando $q^2 - p^3 < 0$ la formula risolutiva sopra trovata per x perde senso, contenendo la radice quadrata di un numero negativo.

4.2 Definizioni generali

Definizione 4.1. *Chiamiamo unità immaginaria i quel numero tale che*

$$i^2 = -1.$$

Definizione 4.2. *Un numero complesso z è un numero che si può scrivere nella forma*

$$z = a + ib, \quad \text{con } a, b \in \mathbb{R}.$$

Il numero a è detto "parte reale " di z e si denota con $\Re z$,
Il numero b è detto "parte immaginaria " di z e si denota con $\Im z$.
L'espressione $z = a + ib$ è detta "Forma algebrica" del numero complesso z.
L'insieme dei numeri complessi si denota con $\mathbb{C}$.

Notiamo che un numero $z \in \mathbb{C}$ è reale se e solo se $b = 0$.
Dalla definizione si ha che due numeri complessi z_1 e z_2 sono uguali se e solo se hanno stessa parte reale e stessa parte immaginaria, ossia se e solo se

$$\begin{cases} \Re z_1 = \Re z_2 \\ \Im z_1 = \Im z_2. \end{cases}$$

Osserviamo che un numero complesso $z = a + ib$ può essere "identificato" con la coppia $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Si può quindi "identificare" $\mathbb{C}$ con $\mathbb{R}^2$: scriveremo

$$\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2.$$

A livello geometrico, si rappresenta nel piano di Gauss un numero complesso $z = a + ib$ come punto P di coordinate (a, b): in un sistema di riferimento cartesiano tali coppie sono le coordinate del punto P del piano che indicheremo con $z = P = (a, b)$, dove a e b rappresentano l'ascissa e l'ordinata del punto z.
Sull'insieme dei numeri complessi si può definire una somma e un prodotto, che derivano formalmente dalle analoghe operazioni in $\mathbb{R}$, in questo modo:

somma: $\quad (a + ib) + (c + id) := (a + c) + i(b + d)$

prodotto: $\quad (a+ib)\cdot(c+id) = ac + iad + ibc + i^2bd := (ac-bd) + i(ad+bc).$

Nel ricavare le relazioni precedenti, sono state usate le proprietà della somma e del prodotto in $\mathbb{R}$ e la relazione $i^2 = -1$.

La somma ha elemento neutro : $z = 0 = 0 + i0$ e per ogni $z = a + ib$, l'opposto è l'elemento $-z = (-a) + i(-b)$.
Il prodotto ha elemento neutro : $z = 1 = 1 + i0$.
Ogni numero complesso diverso da $z = 0$ ha inverso rispetto al prodotto dato da

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}.$$

La somma e il prodotto godono delle proprietà commutativa e associativa, e vale la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma.

Definizione 4.3. *Sia $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Il complesso coniugato di z è il numero*

$$\overline{z} = x - iy = \Re z - i\Im z.$$

Operazioni con il coniugato

$$\begin{aligned}
&z + \overline{z} = (a+ib) + (a-ib) = 2a = 2\Re z,\\
&z - \overline{z} = (a+ib) - (a-ib) = 2ib = 2i\Im z,\\
&\overline{(z_1+z_2)} = \overline{z_1} + \overline{z_2},\\
&\overline{(z_1-z_2)} = \overline{z_1} - \overline{z_2},\\
&\overline{(z_1\cdot z_2)} = \overline{z_1}\cdot\overline{z_2},\\
&\overline{(z^{-1})} = \overline{z}^{-1},\\
&z\cdot\overline{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 - i^2b^2 = a^2+b^2 = (\Re z)^2 + (\Im z)^2 \geq 0,\\
&\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{(a+ib)}} = \overline{(a-ib)} = a+ib = z,\\
&\overline{z} = z \quad \Leftrightarrow \quad z\in\mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Definizione 4.4. *Si dice modulo di un numero complesso $z = a + ib$ il numero reale*

$$|z| = \sqrt{z\cdot\overline{z}} = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Valgono le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned}
&|z| \geq 0, \quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0,\\
&|\Re z| \leq |z|, \quad |\Im z| \leq |z|,\\
&|z| \leq |\Re z| + |\Im z|,\\
&|z_1z_2| = |z_1||z_2|,\\
&|\overline{z}| = |z|,\\
&|z_1+z_2| \leq |z_1| + |z_2|.
\end{aligned}$$

Osserviamo che per ogni $z \neq 0$ si ha

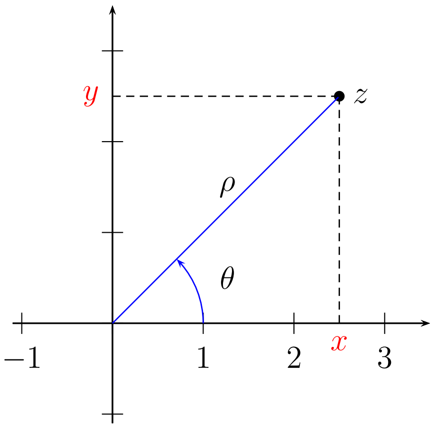
$$z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}.$$

4.3 Coordinate polari e rappresentazione trigonometrica

Abbiamo osservato che un numero complesso $z = x + iy$ può essere identificato con la coppia (x, y) di numeri reali: x e y rappresentano l'ascissa e l'ordinata del punto z.

Il punto z nel piano cartesiano può essere però rappresentato anche in *coordinate polari*, ossia $z = (\rho, \theta)$ dove

- ρ rappresenta la distanza del punto z dall'origine O del sistema di riferimento cartesiano:
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|;$$
- θ è l'angolo compreso fra l'asse delle x e la retta congiungente O con z ed è detto *argomento* di z e si indica con $\arg z$.



Allora, vale che:

$$x = \rho\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\theta. \tag{4.3}$$

Allora usando (4.3) si passa dalla forma algebrica del numero complesso $z = x + iy$ alla seguente *forma trigonometrica*

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) \tag{4.4}$$

del numero complesso.

Data la coppia (ρ, θ), il numero complesso $z = x + iy$ risulta univocamente determinato (ossia individuo univocamente la sua parte reale x e la sua parte immaginaria y) usando le formule di trasformazione (4.3) di passaggio dalle coordinate polari a quelle cartesiane.

Viceversa, dato il numero $z = x + iy$, determino (ρ, θ) nel modo seguente:

- $\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$;
- θ è l'angolo che verifica le relazioni

$$\cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{\rho}, \qquad \sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{\rho}. \tag{4.5}$$

Osserviamo che le equazioni (4.5) non sono sufficienti a determinare univocamente l'angolo θ: infatti, poichè le funzioni cos, sin sono periodiche di periodo 2π, se θ verifica le (4.5), anche $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, le verifica. Per questo motivo, si definisce più precisamente

$$\arg z = \{\theta \in \mathbb{R} : \ z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)\}.$$

Esempio 4.5. $\arg(0) = \{\theta \in \mathbb{R} : \ 0 = |0|(\cos\theta + i\sin\theta)\} = \mathbb{R}$.

Esempio 4.6. $\arg(2i) = \left\{\theta \in \mathbb{R} : \ 2i = 2\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)\right], \ k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi : \ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

4.4 Formule di De Moivre

Siano $z_1 = \rho_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ e $z_2 = \rho_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \in \mathbb{C}$.

Il prodotto risulta

$$\begin{aligned} \boxed{z_1 \cdot z_2} &= \rho_1\rho_2\left[\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2 + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)\right] \\ &= \boxed{\rho_1\rho_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)\right]}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Se $z_2 \neq 0$, la divisione è

$$\begin{aligned} \boxed{\frac{z_1}{z_2}} &= \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)}\frac{(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)} \\ &= \boxed{\frac{\rho_1}{\rho_2}\left[\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2)\right]}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Quindi

$$\boxed{\begin{array}{ll} |z_1 \cdot z_2| = |z_1|\,|z_2|, & \arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2, \\ \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}, & \arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2. \end{array}} \tag{4.8}$$

Possiamo generalizzare la (4.6):

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n = \rho_1\rho_2\ldots\rho_n\left[\cos(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_n) + i\sin(\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_n)\right]}.$$

In particolare, **se tutti i fattori sono uguali**:

$$\boxed{z^n = \rho^n\left[\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\right]}.$$

Esempio 4.7. Scriviamo in forma algebrica $(1+i)^7$. Si ha $|1+i| = \sqrt{2}$ e $\arg(1+i) = \dfrac{\pi}{4}$. Pertanto

$$(1+i)^7 = (\sqrt{2})^7 \left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi\right) = 8 - 8i.$$

4.5 Esponenziale complesso

Problema: Definire $e^z \in \mathbb{C}$, con $z \in \mathbb{C}$, in modo coerente con le proprietà delle potenze.

Definizione 4.8. *Per $z = x + i\,y \in \mathbb{C}$, si pone*

$$\boxed{e^z = e^{\Re z}\,[\cos(\Im z) + i\sin(\Im z)] = e^x\,[\cos y + i\sin y]}. \tag{4.9}$$

Esempio 4.9.

$$\begin{aligned}
&e^{(3-i)} = e^3\,[\cos(-1) + i\sin(-1)] = e^3(\cos 1 - i\sin 1),\\
&\boxed{e^{2i\pi}} = e^0\,[\cos(2\pi) + i\sin(2\pi)] = \boxed{1},\\
&e^{i\pi} = e^0(\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = -1, \quad \textit{pertanto} \quad \boxed{e^{i\pi} + 1 = 0}.
\end{aligned}$$

Dalla definizione di esponenziale complesso (si pone $x = 0$ in (4.9)) segue la FORMULA di EULERO, valida per ogni $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}. \tag{4.10}$$

Dalla formula di Eulero segue che:

$$\boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}; \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}.$$

Osservazione 4.10 (Le funzioni sin e cos in campo complesso)**.** Le precedenti formule date per ogni $\theta \in \mathbb{R}$ possono essere estese ad un qualsiasi $z \in \mathbb{C}$. Si pone quindi, per definizione,

$$\boxed{\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}}.$$

Si può dimostrare che

Teorema 4.11. $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}$, $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

Inoltre risulta

- $e^z e^{-z} = 1$;
- $|e^z| = e^{\Re z} = \rho$;

- $\boxed{|e^{i\theta}| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = 1}$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$;
- se $n \in \mathbb{N}$ vale $(e^z)^n = e^{nz}$,
- $e^{z_1} = e^{z_2} \Leftrightarrow z_1 - z_2 \in 2\pi i\mathbb{Z}$, cioè $\boxed{e^{z+2k\pi i} = e^z,\ \forall z \in \mathbb{C},\ \forall k \in \mathbb{Z}}$.
  In altre parole, *l'esponenziale complesso è una funzione (a valori in $\mathbb{C}$) periodica, con periodo dato dal numero complesso $2\pi i$*;
- $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$, $\forall \theta \in \mathbb{R}$;
- $e^z \neq 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

4.6 Forma esponenziale

Dalla forma trigonometrica di $z \in \mathbb{C}$: $z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$ e dalla formula

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta \tag{4.11}$$

segue

$$\boxed{z = \rho e^{i\theta}} \quad \textit{Forma esponenziale} \text{ di } z \in \mathbb{C}.$$

Osservazione 4.12. La forma esponenziale è '*molto comoda*' per i conti:
se $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$ e $z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$, allora

$$\boxed{\begin{aligned} &z_1 z_2 = \rho_1\rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}, \\ &\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}, \\ &(z_1)^n = \rho_1^n e^{in\theta_1}. \end{aligned}}$$

Esempio 4.13. $(1+i)^6 = \left(\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}\right)^6 = \left(\sqrt{2}\right)^6 e^{\frac{3}{2}\pi i} = 8e^{\frac{3}{2}\pi i} = 8(-i) = -8i.$

4.7 Radice n-esima di un numero complesso

Definizione 4.14. *Il numero $w \in \mathbb{C}$ è una radice n-esima (complessa) di $z \in \mathbb{C}$ se risulta*

$$w^n = z.$$

Osservazione 4.15. Dato

$$z = \rho e^{i\theta},$$

allora, $\boxed{\text{al variare di } k = 0, \dots, n-1}$, gli $\underline{n \text{ numeri complessi } w_k}$ dati da

$$\boxed{w_k = re^{i\phi_k}, \qquad r = \sqrt[n]{\rho}, \qquad \phi_k = \frac{\theta + 2k\pi}{n}}$$

sono tutti *radici n-esime di z*. Infatti

$$w_k^n = \left[\sqrt[n]{\rho}\, e^{i(\theta+2k\pi)/n}\right]^n = \rho e^{i(\theta+2k\pi)} = \rho e^{i\theta} = z.$$

Teorema 4.16. *Ogni numero complesso $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, ha esattamente n radici n-esime distinte w_0, w_1,. . ., w_{n-1}.*

Osservazione 4.17 (Rappresentazione grafica delle radici n-esime). Nel piano complesso, le n radici sono i vertici di un poligono regolare di n lati inscritto nel cerchio di centro 0 e raggio r. Ogni radice si ottiene dalla precedente moltiplicando per $e^{2\pi i/n}$, cioè con una rotazione, in senso antiorario, di $2\pi/n$.

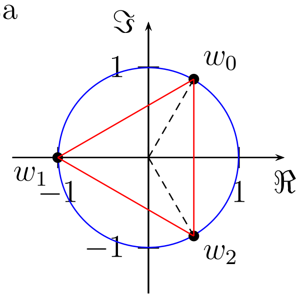
Esempio 4.18. Determiniamo le tre radici cubiche di -1. Si ha

$$w^3 = -1 \quad \Rightarrow \quad w^3 = 1\, e^{i\pi}.$$

Quindi

$$w_k = \sqrt[3]{1}\, e^{i\phi_k}, \quad \phi_k = \frac{\pi + 2k\pi}{3}, \quad k = 0, 1, 2,$$

da cui risulta



dove

$$\begin{aligned} w_0 &= \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}), \\ w_1 &= -1, \\ w_2 &= \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}). \end{aligned}$$

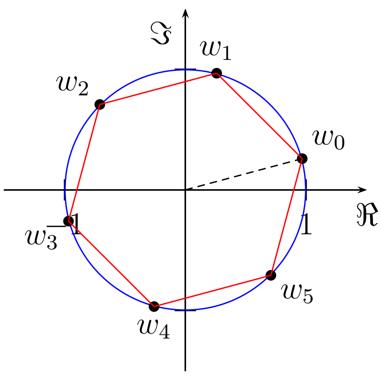
Esempio 4.19. Determiniamo le sei radici seste di i. Si ha

$$w^6 = i \quad \Rightarrow \quad w^6 = e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

Quindi

$$w_k = \sqrt[6]{1}\, e^{i\phi_k}, \quad \phi_k = \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{6} = \frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3}, \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$$

da cui risulta



4.8 Polinomi in campo complesso

Definizione 4.20. *Si dice polinomio in una variabile complessa la funzione* $\boxed{P : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}}$ *data da*

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \tag{4.12}$$

dove $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *sono* <u>*numeri complessi*</u> *assegnati, detti* coefficienti *del polinomio.*

Se $a_n \neq 0$*, allora si dice che il polinomio è di grado* n*.*

Si chiama radice di P *ogni numero complesso* w *tale che* $P(w) = 0$*.*

Proposizione 4.21 (Principio di identità dei polinomi)**.** *Siano* P *e* Q *due polinomi: essi sono uguali se e solo se sono uguali i coefficienti delle potenze omologhe dei due.*

Proposizione 4.22. *Sia* w *una radice del polinomio* P*, di grado* n*. Allora esiste un unico polinomio* Q *di grado* $n-1$ *tale che*

$$P(z) = (z-w)Q(z), \qquad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Teorema 4.23 (Teorema fondamentale dell'Algebra)**.** *Ogni polinomio ha in* $\mathbb{C}$ *almeno una radice.*

Corollario 4.24. *Sia* P *un polinomio in* $\mathbb{C}$ *di grado* n*. Allora* P *ha esattamente* n *radici* $w_1, w_2, \ldots, w_n$*, e si può fattorizzare come prodotto*

$$P(z) = a_n(z-w_1)(z-w_2)\ldots(z-w_n).$$

Dimostrazione. Sia P il polinomio, dato da (4.12). Per il teorema fondamentale, esiste almeno una radice $w_1 \in \mathbb{C}$; per il teorema precedente allora $P(z) = (z-w_1)Q_1(z)$, dove Q_1 è un polinomio di grado $n-1$ (unico). Applicando a Q_1 lo stesso ragionamento si trovano $w_2 \in \mathbb{C}$ e un (unico) polinomio Q_2 di grado $n-2$ tali che $Q_1(z) = (z-w_2)Q_2(z)$ da cui

$$P(z) = (z-w_1)(z-w_2)Q_2(z).$$

Procedendo così n volte si trovano n radici w_i, $i = 1, \ldots, n$, e un polinomio di grado 0 (costante) K, tali che

$$P(z) = K(z-w_1)(z-w_2)\ldots(z-w_n).$$

Per il principio di identità dei polinomi, $K = a_n$. □

Osservazione 4.25. Le radici di cui al Corollario 4.24 possono non essere tutte distinte. Se raggruppiamo le radici in modo da mettere in una stessa classe tutte quelle uguali fra loro e denotiamo con μ_j (*molteplicità*) il numero di elementi della classe contenente la radice r_j, troviamo che, se $r_1, r_2, \ldots, r_d$ sono le radici distinte, la somma $\mu_1 + \cdots + \mu_d$ delle relative molteplicità uguaglia n= grado di P.

Esempio 4.26. $z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$.
Radici: $z_1 = i$, $z_2 = -i$.

Esempio 4.27. $z^5 + z^3 = z^3(z^2 + 1) = z \cdot z \cdot z(z - i)(z + i)$.
Radici: $z_1 = z_2 = z_3 = 0$, $z_4 = i$, $z_5 = -i$. La radice 0 ha *molteplicità* 3.

Proposizione 4.28. *Si consideri un polinomio a coefficienti reali. Se w è una radice (non reale), anche $\overline{w}$ è una radice, con la stessa molteplicità. In particolare, se il grado del polinomio è dispari, vi è almeno una radice reale.*

Capitolo 5

Successioni numeriche

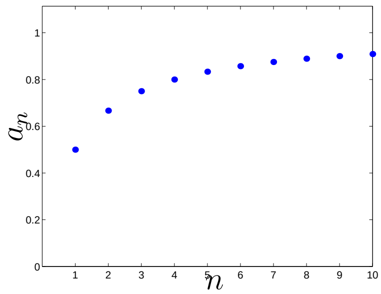
Definizione 5.1. *Una successione a valori reali è una funzione*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & n & \mapsto & a_n = f(n). \end{array}$$

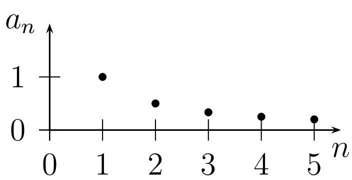
Una successione si indica con $\{a_n\}$ *o* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.
a_n *è l'elemento n-esimo della successione* $\{a_n\}$.
Fissato $n_0 \in \mathbb{N}$, *se* $\mathrm{domf} = \{\mathrm{n} \in \mathbb{N} \,:\, \mathrm{n} \geq \mathrm{n}_0\}$, *allora si scrive* $\{a_n\}_{n\geq n_0}$.

Esempio 5.2. $a_n = \dfrac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rcl} a_0 & = & \dfrac{0}{0+1} = 0 \\ a_1 & = & \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2} \\ a_2 & = & \dfrac{2}{2+1} = \dfrac{2}{3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{10} & = & \dfrac{10}{10+1} = \dfrac{10}{11} \end{array}$$



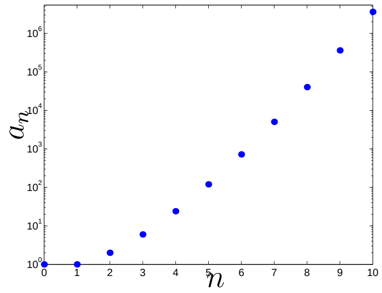
Osservazione 5.3. Il dominio della successione può non essere uguale a 'tutto' $\mathbb{N}$.
Ad esempio,
$a_n = \frac{1}{n}$, $\mathrm{dom}f = \mathbb{N}^+ \subseteq \mathbb{N}$:



n	a_n
1	1
2	$\frac{1}{2} = 0.5$
3	$\frac{1}{3} = 0.\overline{3}$
4	$\frac{1}{4} = 0.25$
5	$\frac{1}{5} = 0.2$
$\vdots$	$\vdots$

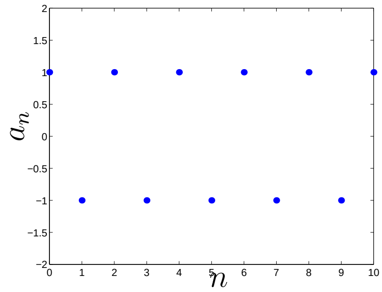
Esempio 5.4 (Il fattoriale di n)**.** $a_n = n!$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rcl} a_0 & = & 0! = 1 \\ a_1 & = & 1! = 1 \\ a_2 & = & 2! = 2 \\ a_3 & = & 3! = 6 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{10} & = & 10! = 3628800 \end{array}$$



Esempio 5.5. $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{array}{rcl} a_0 & = & +1 \\ a_1 & = & -1 \\ a_2 & = & +1 \\ a_3 & = & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{10} & = & +1 \end{array}$$



5.1 Limite di una successione

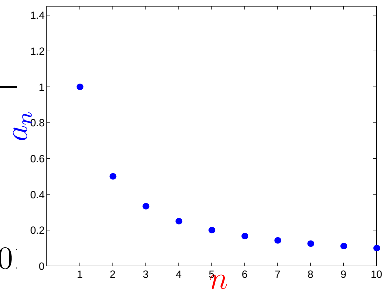
Il concetto di limite di una successione è alla base di tutta l'analisi matematica: esso riguarda il comportamento del generico elemento a_n quando n è molto grande.

5.1.1 Successioni convergenti

Allo scopo di chiarire tale concetto, consideriamo prima un certo numero di esempi; daremo poi la definizione rigorosa.

Esempio 5.6. Sia $\{a_n\}$ la successione definita da $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^+$. Si ha

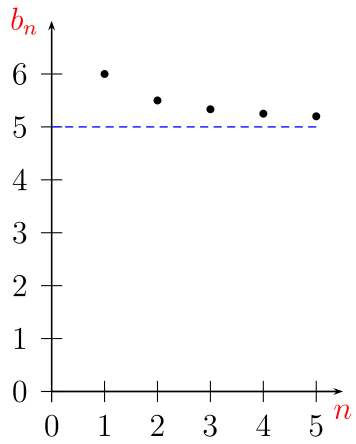
n	a_n
1	1
10	0.1
100	0.01
1000	0.001
10000000000	0.000000000



Si vede che all'aumentare di n, il termine a_n si avvicina sempre più a zero. Scriveremo

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0.$$

Esempio 5.7. Sia $\{b_n\}$ la successione definita da $b_n = 5 + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^+$. Si ha



n	b_n
1	6
10	5.1
100	5.01
1000	5.001
10000000000	5.0000000001

Si vede che all'aumentare di n, b_n tende ad avvicinarsi a 5. Scriveremo

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = 5.$$

Esempio 5.8. Sia $\{c_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, la successione definita da $c_n = (-1)^n$.
Abbiamo già osservato che c_n oscilla fra i valori -1 e $+1$: per n grande il termine c_n non si "avvicina" ad alcun valore. Diremo che la successione $\{c_n\}$ non ha limite.

Definizione 5.9. *Sia $L \in \mathbb{R}$. Si dice che la successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, converge a L quando*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq n_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |a_n - L| \leq \varepsilon,$$

e si scrive

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L.$$

Altre notazioni:

$$\lim_n a_n = L \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = L \qquad a_n \longrightarrow L \qquad a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L.$$

A parole, la definizione di limite si legge così: fisso $\varepsilon > 0$, *da un certo punto in poi* (per $n \geq n_\varepsilon$) tutti i valori della successione distano da L meno di ε ($|a_n - L| \leq \varepsilon$).

Nella definizione di limite ε è arbitrario, mentre n_ε dipende da ε: se cambio ε, cambia n_ε.

Osservazione 5.10. Con la terminologia degli intorni la Definizione 5.9 diventa:

$$\forall I_\varepsilon(L), \ \exists I_{n_\varepsilon}(+\infty) : \ \forall n \in I_{n_\varepsilon}(+\infty) \quad \Rightarrow \quad a_n \in I_\varepsilon(L).$$

Il concetto di limite è ben posto, nel senso che una successione non può ammettere due limiti diversi.

Teorema 5.11 (Unicità del limite)**.**

$$\left(a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L, \quad a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} L'\right) \quad \Rightarrow \quad L = L'.$$

Dimostrazione. Per la definizione di limite valgono entrambe le condizioni:

$$\begin{aligned} &\forall \epsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N}: \quad \forall n \geq m \quad |a_n - L| \leq \epsilon, \\ &\forall \epsilon > 0 \quad \exists m' \in \mathbb{N}: \quad \forall n \geq m' \quad |a_n - L'| \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Allora, $\forall n \geq \max\{m, m'\}$, si hanno $|a_n - L| \leq \epsilon$ e $|a_n - L'| \leq \epsilon$. Pertanto

$$|L - L'| = |L - a_n + a_n - L'| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{disuguaglianza triangolare} \\ |a+b| \leq |a| + |b|}}{\leq} |L - a_n| + |a_n - L'| \leq 2\epsilon.$$

Dimostriamo ora che $|L - L'| = 0$. Per assurdo sia $L - L' \neq 0$, allora $\exists C > 0 : |L - L'| = C > 0$. Prendendo $\epsilon < \frac{C}{2}$, si arriva a una contraddizione con la disuguaglianza di cui sopra, nella quale ϵ è arbitrario. Da $|L - L'| = 0$ segue che $L = L'$, cioè la tesi. □

Definizione 5.12. *La successione $\{a_n\}$, definita per $n \in \mathbb{N}$, si dice infinitesima quando converge a zero, i.e.*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}: \quad \forall n \geq n_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |a_n| \leq \varepsilon,$$

e si scrive

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Dalla definizione di successione infinitesima segue banalmente che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0. \tag{5.1}$$

Esempio 5.13. La successione $\{a_n\}$ con $a_n = \frac{1}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^+$ è infinitesima. Infatti, fissato $\varepsilon > 0$ si deve determinare $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq n_\varepsilon$ $|a_n| = \frac{1}{n} \leq \varepsilon$. Tale disuguaglianza vale se e solo se $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$. Si scelga pertanto $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$: $n_\varepsilon \geq \frac{1}{\varepsilon}$.

Esempio 5.14. Sia $q \in \mathbb{R}$ con $|q| < 1$, allora $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$.

Dato che $\frac{1}{n+1} \to 0$, sia $m \in \mathbb{N}:$ $\forall n \geq m$ si ha

$$\frac{1}{n+1} \leq 1 - |q|.$$

Quindi per $n \geq m$ si ha

$$|q| \leq 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Sia ora $C = m|q|^m$. Proviamo per induzione che

$$|q|^n \leq \frac{C}{n} \qquad \forall n \geq m. \tag{5.2}$$

Infatti per $n = m$ si ha un'identità. Supposto che $|q|^n \leq \frac{C}{n}$ valga per un assegnato $n \geq m$, si ha

$$|q|^{n+1} = |q|^n|q| \leq |q|\frac{C}{n} \leq \frac{n}{n+1} \cdot \frac{C}{n} = \frac{C}{n+1}.$$

Dunque, da (5.2), segue che $|q|^n$ è infinitesima.

5.1.2 Successioni divergenti o oscillanti

Definizione 5.15. *La successione $\{a_n\}$ tende a $+\infty$ (o diverge a $+\infty$) e si scrive*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty,$$

se

$$\forall M \in \mathbb{R}^+,\ \exists n_M \in \mathbb{N} :\ \forall n \geq n_M \quad \Rightarrow \quad a_n \geq M.$$

A parole la definizione si legge così: fisso $M > 0$ grande, *da un certo punto in poi* (per $n \geq n_M$) tutti i valori della successione sono maggiori di M ($a_n \geq M$).

Anche qui M è arbitrario, mentre n_M dipende da M.

Osservazione 5.16. Con la terminologia degli intorni diciamo che

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

se

$$\forall I_M(+\infty),\ \exists I_{n_M}(+\infty) :\ \forall n \in I_{n_M}(+\infty) \Rightarrow a_n \in I_M(+\infty)$$

Esempio 5.17. La successione $\{a_n\}$ con $a_n = n$ diverge positivamente. Dobbiamo verificare che

$$\forall M \in \mathbb{R}^+,\ \exists n_M \in \mathbb{N} :\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_M \quad \Rightarrow \quad a_n = n \geq M.$$

Affinchè sia soddisfatta l'implicazione sopra, fissato $M \in \mathbb{R}^+$ ad arbitrio, basta scegliere un intero $n_M \geq M$; infatti $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_M$ si ha

$$n \geq n_M \geq M,$$

ossia vale $a_n = n \geq M$.

Esempio 5.18. La successione $\{a_n\}$ con $a_n = n!$ diverge positivamente. Dobbiamo verificare che

$$\forall M \in \mathbb{R}^+,\ \exists n_M \in \mathbb{N} :\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_M \quad \Rightarrow \quad a_n = n! \geq M.$$

Si osservi che

$$a_n = n! \geq n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Allora, per ogni $M \in \mathbb{R}^+$, basta prendere un intero $n_M \geq M$; infatti, $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_M$ si ha

$$a_n = n! \geq n \geq n_M \geq M.$$

Esempio 5.19. La successione $\{a_n\}$ con $a_n = n^n$ diverge positivamente. Dobbiamo dimostrare che

$$\forall M \in \mathbb{R}^+,\ \exists n_M \in \mathbb{N} :\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_M \quad \Rightarrow \quad a_n = n^n \geq M.$$

Si osservi che

$$a_n = n^n \geq n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Per ogni $M \in \mathbb{R}^+$, basta allora prendere un intero $n_M \geq M$; infatti, $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_M$ vale la seguente catena di disuguaglianze:

$$a_n = n^n \geq n \geq n_M \geq M.$$

Esempio 5.20. La successione $\{a_n\}$ con $a_n = n^\alpha$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}^+$ diverge positivamente. Occorre trovare $n_M \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq n_M$ si abbia $a_n = n^\alpha \geq M$. Basta prendere un intero $n_M \geq M^{1/\alpha}$.

Analogamente, si definisce una successione divergente a $-\infty$:

Definizione 5.21. *La successione $\{a_n\}$ tende a $-\infty$ (o diverge a $-\infty$) e si scrive*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty,$$

se

$$\forall M \in \mathbb{R}^+,\ \exists n_M \in \mathbb{N} :\ \forall n \geq n_M \Rightarrow a_n \leq -M$$

Esempio 5.22. Sia $a_n = -n$. Allora $\lim\limits_{n\to\infty} (-n) = -\infty$.

Definizione 5.23. *La successione $\{a_n\}$ è detta indeterminata (o OSCILLANTE) se non è né convergente né divergente.*

Esempio 5.24. $a_n = (-1)^n$, $n \in \mathbb{N}$ è una successione oscillante.

Esempio 5.25. La successione $\{a_n\}$, con $a_n = (-n)^n$, $n \in \mathbb{N}$, non è né convergente né divergente. Infatti

$$a_n = (-n)^n = (-1)^n n^n = \begin{cases} n^n & \text{se } n \text{ è pari,} \\ -n^n & \text{se } n \text{ è dispari.} \end{cases}$$

La successione ha un comportamento diverso per n grande, a seconda che n sia pari o dispari: per n pari diverge positivamente, per n dispari diverge negativamente.

Possiamo quindi riassumere le varie nozioni introdotte e dare la seguente classificazione. Una successione può essere:

- CONVERGENTE se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ con $L \in \mathbb{R}$ finito;
- DIVERGENTE POSITIVAMENTE se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$;
- DIVERGENTE NEGATIVAMENTE se $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$;
- INDETERMINATA o OSCILLANTE se non è né convergente né divergente.

Osservazione 5.26. Sia $a_n \neq 0\,\forall n$, allora

1. se $a_n > 0$, $\{a_n\}$ diverge positivamente se e soltanto se $\frac{1}{a_n}$ è infinitesima;
2. se $a_n < 0$, $\{a_n\}$ diverge negativemente se e soltanto se $\frac{1}{a_n}$ è infinitesima.

Il seguente esempio riassume quasi tutti i comportamenti possibili per una successione.

Esempio 5.27 (Successione geometrica)**.** Consideriamo la successione $\{a_n\}$ con $a_n = q^n$. Si verifichi che

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} \text{non esiste} & \text{se } q \leq -1, \\ 0 & \text{se } |q| < 1, \\ 1 & \text{se } q = 1, \\ +\infty & \text{se } q > 1. \end{cases}$$

- $q = 1$: ovvio.
- $|q| < 1$: si veda l'Esempio 5.14.
- $q > 1$: si osservi che la successione $\left\{\left(\frac{1}{q}\right)^n\right\}$ è infinitesima poichè $0 < \frac{1}{q} < 1$ (e si utilizzi la proprietà che la reciproca di una successione infinitesima e positiva diverge a $+\infty$).
- $q = -1$: la successione $\{(-1)^n\}$ è indeterminata, perchè oscilla fra -1 e 1.
- $q < -1$: i termini q^n sono alternativamente < 0 e > 0, ed inoltre $|q^n| \to +\infty$. Quindi la successione $\{q^n\}$ è indeterminata.

5.2 Successioni limitate

Ogni successione convergente gode di un'importante proprietà: la limitatezza.

Definizione 5.28. *Una successione $\{a_n\}$ si dice superiormente limitata se*

$$\exists M \in \mathbb{R} : a_n \leq M, \ \forall n.$$

Una successione $\{a_n\}$ si dice definitivamente superiormente limitata se

$$\exists M \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} : a_n \leq M, \ \forall n \geq n_0.$$

Definizione 5.29. *Una successione $\{a_n\}$ si dice inferiormente limitata se*

$$\exists m \in \mathbb{R} : m \leq a_n, \ \forall n.$$

Una successione $\{a_n\}$ si dice definitivamente inferiormente limitata se

$$\exists m \in \mathbb{R}, \exists n_0 \in \mathbb{N} : m \leq a_n, \ \forall n \geq n_0.$$

Definizione 5.30. *Una successione $\{a_n\}$ si dice limitata (definitivamente) se è superiormente e inferiormente limitata (definitivamente), cioè se esiste $M > 0$, tale che*

$$|a_n| \leq M, \quad \forall n \quad (\forall n \geq n_0).$$

Esempio 5.31. Le successioni $\{a_n\}$ con

1. $a_n = (-1)^n$,
2. $a_n = \sin n$,

sono entrambe successioni limitate.

Teorema 5.32 (Limitatezza)**.** *$\{a_n\}$ convergente $\Rightarrow$ $\{a_n\}$ limitata.*

Dimostrazione. Sia $L = \lim_{n\to\infty} a_n$. Fissato $\varepsilon = 1$, tutti gli a_n a partire da un certo n_0 in poi, cadranno nell'intorno $I_1(L)$. Se si pone

$$M = |a_0| + |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{n_0}| + |L| + 1$$

si ha che

$$|a_n| \leq M, \forall n \in \mathbb{N}. \tag{5.3}$$

Infatti, se $n \leq n_0$, (5.3) é vera; mentre se $n > n_0$, poichè $a_n \in I_1(L)$ si ha $|a_n| \leq |L| + 1$, e quindi vale (5.3) per ogni n. □

Osservazione 5.33. In generale, NON vale il viceversa del Teorema 5.32. Ad esempio:

1. $a_n = (-1)^n$,
2. $a_n = \sin n$,

sono successioni limitate ma non convergenti (sono oscillanti). Attenzione quindi a non confondere i due concetti di limitatezza e convergenza.

5.3 Operazioni con i limiti

Dalla definizione di limite si deducono regole di calcolo per i limiti di successioni. Ricordiamo come si comportano le operazioni di somma, prodotto e divisione fra numeri reali e i simboli $\pm\infty$, dalle quali si dedurrà poi il calcolo dei limiti.

Definizione 5.34. *Definiamo*
per la somma:

$$x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty, \quad x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty, \quad (-\infty) + (-\infty) = -\infty,$$

per il prodotto:

$$x \cdot (+\infty) = +\infty, \quad x \cdot (-\infty) = -\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+,$$
$$x \cdot (+\infty) = -\infty, \quad x \cdot (-\infty) = +\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}^-,$$
$$(+\infty)(-\infty) = -\infty, \qquad (-\infty)(-\infty) = +\infty, \qquad (+\infty)(+\infty) = +\infty,$$

per la divisione:

$$\frac{x}{\pm\infty} = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{x}{0} = \infty, \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$
$$\frac{+\infty}{x} = +\infty, \quad \frac{-\infty}{x} = -\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+,$$
$$\frac{+\infty}{x} = -\infty, \quad \frac{-\infty}{x} = +\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}^-.$$

Riguardo all'ordine:

$$-\infty \le x \le +\infty, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

In generale non si può concludere nulla nei casi che non rientrano nella definizione sopra: tali casi sono le cosiddette *forme indeterminate*

$$(+\infty) + (-\infty), \quad 0 \cdot (\pm\infty), \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad \frac{0}{0}, \quad \infty^0, \quad 0^0, \quad 1^\infty.$$

Teorema 5.35. *Siano $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ successioni reali convergenti, cioè*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b, \quad \text{dove } a, b \in \mathbb{R}.$$

Allora

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n = a + b \tag{5.4}$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n = a - b \tag{5.5}$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n) \cdot (\lim_{n\to\infty} b_n) = a \cdot b \tag{5.6}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n} = \frac{a}{b}, \qquad \text{se } b \neq 0, \ \ b_n \neq 0, \quad \forall n \quad (\forall n \ge n_0) \tag{5.7}$$

Dimostrazione. Dimostiamo (5.6) e (5.7) (le altre due sono semplici). Siano $a = \lim_{n\to+\infty} a_n$ e $b = \lim_{n\to+\infty} b_n$. Si ha

$$a_nb_n - ab = a_n(b_n - b) + b(a_n - a)$$

e quindi, essendo $\{a_n\}$ successione limitata (perchè è convergente), esisterà M tale che $|a_n| \leq M$ per ogni n, da cui

$$\begin{aligned} |a_nb_n - ab| &= |a_n(b_n - b) + b(a_n - a)| \\ &\leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| \leq M|b_n - b| + |b||a_n - a|. \end{aligned}$$

Usiamo ora la definizione di limite per a_n e b_n. Sia $\varepsilon_1 > 0$: esisteranno n_1, n_2 tali che

$$|b_n - b| \leq \varepsilon_1, \quad \forall n \geq n_1;$$

$$|a_n - a| \leq \varepsilon_1, \quad \forall n \geq n_2.$$

Allora, per $\overline{n} \geq \max\{n_1, n_2\}$ si ha

$$|a_nb_n - ab| \leq (M + |b|)\varepsilon_1.$$

Ora, $\forall\, \varepsilon > 0$, se scegliamo $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{M+|b|}$ si ottiene

$$|a_nb_n - ab| \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq \overline{n}$$

ossia a_nb_n converge a ab.

Dimostriamo ora che vale (5.7). Cominciamo a fare vedere che nelle ipotesi assunte la successione $\{\frac{1}{b_n}\}$ è limitata. Infatti, ricordiamo che

$$b_n \to b \Leftrightarrow |b_n| \to |b|,$$

dunque, per n sufficientemente grande, i termini della successione $|b_n|$ apparteranno all'intorno del limite $|b|$ di raggio, per esempio, $\dfrac{|b|}{2}$, ossia

$$|b_n| \geq \frac{|b|}{2} \quad \forall n \geq n_0.$$

Allora

$$\frac{1}{|b_n|} \leq M := \max\{\frac{1}{|b_0|}, \cdots, \frac{1}{|b_{n_0}|}, \frac{2}{|b|}\}.$$

Ora

$$|\frac{a_n}{b_n} - \frac{a}{b}| = |\frac{a_nb - b_na}{bb_n}| = |\frac{b(a_n - a) + a(b - b_n)}{bb_n}| \leq M|a_n - a| + \frac{M|a|}{|b|}|b_n - b|$$

e si conclude come sopra. □

Esempio 5.36.
$$\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}2-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=2-0=2.$$

Risultati analoghi si hanno quando uno o ambedue i limiti sono <u>infiniti</u>. Usando le regole che coinvolgono somma e prodotto con $\pm\infty$ si dimostra in questo caso che:

1. se $a_n\to+\infty$ e b_n è limitata inferiormente, allora $a_n+b_n\to+\infty$,
2. se $a_n\to-\infty$ e b_n è limitata superiormente, allora $a_n+b_n\to-\infty$,
3. se $a_n\to+\infty$ e $b_n\to L>0$, allora $a_nb_n\to+\infty$,
4. se $a_n\to+\infty$ e $b_n\to L<0$, allora $a_nb_n\to-\infty$,
5. se $a_n\to-\infty$ e $b_n\to L>0$, allora $a_nb_n\to-\infty$,
6. se $a_n\to-\infty$ e $b_n\to L<0$, allora $a_nb_n\to+\infty$,
7. se $a_n\to+\infty$, allora $\frac{1}{a_n}\to 0$,
8. se $a_n\to 0$ e $a_n\neq 0$, allora $\frac{1}{|a_n|}\to+\infty$. In particolare, se $a_n\to 0$ e $a_n>0$ ($a_n<0$) per ogni n, allora $\frac{1}{a_n}\to+\infty$ ($-\infty$).

Osservazione 5.37. Attenzione che se $a_n\to 0$ e $a_n\neq 0$, allora la successione $\dfrac{1}{a_n}$ può non avere limite. Per esempio: $a_n=\dfrac{(-1)^n}{n}$ ha limite zero, ma $\dfrac{1}{a_n}$ non converge. Infatti, se n è pari, $\dfrac{1}{a_n}\to+\infty$, mentre se n è dispari, $\dfrac{1}{a_n}\to-\infty$. Dunque, la successione $\dfrac{1}{a_n}$ non ha limite.

Il teorema di cui sopra dà informazioni relative all'algebra dei limiti a patto che non si verifichino casi di forme indeterminate: in questo caso non si è in grado di ottenere una risposta veloce, ma bisogna operare per altre vie.

Il seguente esempio fa vedere come, nel caso si verifichi la forma indeterminata $(+\infty)-(+\infty)$ in corrispondenza a due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$, tali che $a_n\to-\infty$ e $b_n\to+\infty$, non sia possibile determinare a priori la natura della successione somma $\{a_n+b_n\}$.

Esempio 5.38.

1. $a_n=-n$, $b_n=n$.
   Allora $a_n+b_n=-n+n=0$. $\{a_n+b_n\}$ infinitesima.
2. $a_n=-n$, $b_n=n+(-1)^n$.
   Allora $a_n+b_n=-n+n+(-1)^n=(-1)^n$ e $\{a_n+b_n\}$ oscillante.
3. $a_n=-n$, $b_n=\sqrt{n}$.
   Allora $a_n+b_n=\sqrt{n}\,(-\sqrt{n}+1)$ e $\{a_n+b_n\}$ divergente negativamente.

4. $a_n = -n$, $b_n = n^2$.
   Allora $a_n + b_n = n(-1+n)$ e $\{a_n + b_n\}$ divergente positivamente.

Osservazione 5.39. Da $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$ e $\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ abbiamo ottenuto per la successione $\{a_n + b_n\}$ tutti i comportamenti possibili: la forma indeterminata $+\infty - \infty$ va studiata caso per caso.

Analogamente tutte le altre forme indeterminate vanno studiate caso per caso.

Esempio 5.40. Calcolare $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{2n}$.

Primo tentativo di risoluzione. Si ha

$$\lim_{n\to\infty} (n^2 - 1) = +\infty - 1 = +\infty,$$
$$\lim_{n\to\infty} 2n = 2 \cdot (+\infty) = +\infty.$$

Quindi

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{2n} = \frac{+\infty}{+\infty} \quad \text{FORMA INDETERMINATA.}$$

□

Siamo arrivati ad una forma indeterminata: ciò vuol dire che dobbiamo cercare un modo per togliere l'indeterminazione e capire se la successione converge o no. Come risolvere il problema?

Un metodo comodo è il confronto asintotico fra le successioni.

5.4 Confronto asintotico

Date due successioni $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, entrambe divergenti o infinitesime, vogliamo stabilire quale delle due tenda più rapidamente all'infinito o a zero.

Consideriamo il limite del loro rapporto, supponendo $b_n \neq 0$ da un certo indice in poi. Si possono verificare quattro casi:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} 0, & \boxed{\text{A}} \\ l \in \mathbb{R}, \quad l \neq 0, & \boxed{\text{B}} \\ \pm\infty, & \boxed{\text{C}} \\ \text{non esiste}, & \boxed{\text{D}} \end{cases}$$

Caso 1: $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = \pm\infty$.
Diciamo che:

1. $\{a_n\}$ è un infinito di ORDINE **INFERIORE** a $\{b_n\}$ se vale $\boxed{\text{A}}$;
2. $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono infinito dello **STESSO** ORDINE se vale $\boxed{\text{B}}$;
3. $\{a_n\}$ è un infinito di ORDINE **SUPERIORE** a $\{b_n\}$ se vale $\boxed{\text{C}}$;
4. $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ **NON** sono **CONFRONTABILI** se vale $\boxed{\text{D}}$.

Caso 2: $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$.
Diciamo che:

1. $\{a_n\}$ è un infinitesimo di ORDINE **SUPERIORE** a $\{b_n\}$ se vale $\boxed{\text{A}}$;
2. $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ sono infinitesimi dello **STESSO** ORDINE se vale $\boxed{\text{B}}$;
3. $\{a_n\}$ è un infinitesimo di ORDINE **INFERIORE** a $\{b_n\}$ se vale $\boxed{\text{C}}$;
4. $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ **NON** sono **CONFRONTABILI** se vale $\boxed{\text{D}}$.

Osservazione 5.41. Se
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$
allora $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ si dicono ASINTOTICHE e si scrive $a_n \sim b_n$.

Un primo esempio di "infiniti confrontabili" è dato dalle potenze.

Proposizione 5.42. *Per $n \to +\infty$, n^p cresce più velocemente di n^q se $p > q > 0$, ossia*
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^p}{n^q} = +\infty \qquad \forall p > q > 0.$$

Questa prima osservazione consente di riuscire facilmente a risolvere forme di indeterminazione che contengono polinomi.

Esempio 5.43. Calcolare $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{2n}$.

Risoluzione. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{2n} = \dfrac{+\infty}{+\infty}$ FORMA INDETERMINATA.

La forma di indeterminazione si chiarifica velocemente osservando che il grado del polinomio a numeratore è maggiore di quello del polinomio a denominatore e quindi, usando il confronto asintotico, tale limite vale $+\infty$.

Tale limite può essere risolto in modo preciso semplificando n a numeratore e a denominatore:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2} = +\infty.$$
$\square$

Esempio 5.44. Calcolare $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{2n}$.

Risoluzione. Anche in questo caso, usando il confronto asintotico, il limite vale $+\infty$.

Per calcolare tale limite si deve raccogliere n elevato alla massima potenza a cui compare, sia a numeratore che a denominatore:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2-1}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}{2n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}{2}.$$

Applicando ora l'algebra dei limiti, per $n\to\infty$ in ogni termine, si ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}{2} = \frac{+\infty\,(1-0)}{2} = \frac{+\infty}{2} = +\infty.$$

□

In generale, per quozienti di polinomi in n vale la seguente proposizione.

Proposizione 5.45. *Dati $P(n) = \alpha_p n^p + \alpha_{p-1} n^{p-1} + \cdots + \alpha_0$ e $Q(n) = \beta_q n^q + \beta_{q-1} n^{q-1} + \cdots + \beta_0$, con $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{R}$, $\alpha_p \neq 0, \beta_q \neq 0$ e $p, q \in \mathbb{N}^+$ si ha:*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{P(n)}{Q(n)} = \begin{cases} \frac{\alpha_p}{\beta_q} & \text{se } p = q \\ +\infty & \text{se } p > q \text{ e } \alpha_p\beta_q > 0 \\ -\infty & \text{se } p > q \text{ e } \alpha_p\beta_q < 0 \\ 0 & \text{se } p < q. \end{cases}$$

La proprietà seguente riassume il comportamento asintotico di alcune successioni importanti.

Proposizione 5.46. *Valgono i seguenti limiti:*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log^\beta n}{n^\alpha} = 0, \quad \forall\alpha \in \mathbb{R}^+, \quad \forall\beta \in \mathbb{R},$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0, \quad \forall\alpha \in \mathbb{R}^+, \quad \forall a > 1,$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \quad \forall a > 1,$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0.$$

Pertanto

n^n è un infinito di ordine **superiore** a $n!$,
$n!$ è un infinito di ordine **superiore** a a^n,$\forall a > 1$,
a^n è un infinito di ordine **superiore** a n^α, $\forall\alpha \in \mathbb{R}^+$,
n^α è un infinito di ordine **superiore** a $\log^\beta n$, $\forall\beta \in \mathbb{R}$.

Possiamo anche scrivere, per n sufficientemente grande, la serie di disuguaglianze

$$n^n \geq n! \geq a^n \geq n^\alpha \geq \log^\beta n \quad \forall a > 1, \forall\alpha \in \mathbb{R}^+, \forall\beta \in \mathbb{R}.$$

5.5 Limiti e ordine

Nei teoremi che seguono vediamo come si comporta l'operazione di passaggio al limite in relazione all'ordinamento dei numeri reali.

Teorema 5.47 (Permanenza del segno)**.** *Se* $\{a_n\}$ *è una successione reale e* $a_n \to L \in]0,+\infty]$ *(risp.* $a_n \to L \in [-\infty, 0[$*) allora*

$$\exists m \in \mathbb{N} : \ \forall n \geq m \quad a_n > 0 \quad (\textit{risp. } a_n < 0).$$

Dimostrazione. Consideriamo il caso $L > 0$ (il caso $L < 0$ è analogo e i casi $L = \pm\infty$ seguono subito dalla definizione). Occorre dimostrare che, da un certo indice m in poi, $a_n \in]0, +\infty[$.

Per definizione di limite si ha:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq m \quad L - \varepsilon \leq a_n \leq L + \varepsilon.$$

Scelgo $\varepsilon = \frac{L}{2}$. Allora

$$a_n \geq L - \varepsilon = L - \frac{L}{2} = \frac{L}{2} > 0, \quad \forall n \geq m.$$

□

Osservazione 5.48. Attenzione: nell'ipotesi del teorema della permanenza del segno, il limite L deve essere diverso da zero. Infatti se $L = 0$ il teorema non vale più:

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}$$

converge a zero ma non è né positiva, né negativa.

Teorema 5.49 (Confronto)**.** *Siano* $\{a_n\}$*,* $\{b_n\}$ *successioni reali non oscillanti (quindi convergenti o divergenti a* $\pm\infty$*). Se*

$$\exists m_0 : \ \forall n \geq m_0 \quad \textit{si ha} \quad a_n \leq b_n, \tag{5.8}$$

allora

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Dimostrazione.

- Se $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty$ la tesi diventa $+\infty \leq +\infty$ (che è vera).
- Analogamente se $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = -\infty$.

- Altrimenti, consideriamo la successione $\{b_n - a_n\}$. Escludendo i casi precedenti la successione $\{b_n - a_n\}$ non è una forma indeterminata per $n \to \infty$. Si ha quindi $b_n - a_n \geq 0$, ed esiste (vedi Teorema 5.35)

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Si ha $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) \geq 0$: altrimenti, per il Teorema della permanenza del segno dovrebbe esistere $m : \forall n \geq m,\ b_n - a_n < 0$, in CONTRADDIZIONE con l'ipotesi (5.8). Allora, $\lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n \geq 0$, e la tesi segue.

$\square$

Teorema 5.50 (Dei due carabinieri). *Siano $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ successioni reali tale che*

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_n = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

Se $\{c_n\}$ è una terza successione reale per cui

$$\exists m_0 \in \mathbb{N} : \ \forall n \geq m_0 \quad \textit{si ha} \quad a_n \leq c_n \leq b_n, \tag{5.9}$$

allora $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$.

Dimostrazione. Caso $L \in \mathbb{R}$. Dobbiamo dimostrare che

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists m \in \mathbb{N} : \ \forall n \geq m \quad |c_n - L| \leq \epsilon,$$

cioè $L - \epsilon \leq c_n \leq L + \epsilon$.

Per la definizione di limite,

$$\begin{aligned} &\forall \epsilon > 0 \quad \exists m_1 \in \mathbb{N} : \ \forall n \geq m_1 \quad |a_n - L| \leq \epsilon \text{ (o equiv. } L - \epsilon \leq a_n \leq L + \epsilon),\\ &\forall \epsilon > 0 \quad \exists m_2 \in \mathbb{N} : \ \forall n \geq m_2 \quad |b_n - L| \leq \epsilon \text{ (o equiv. } L - \epsilon \leq b_n \leq L + \epsilon). \end{aligned}$$

Preso $m = \max\{m_0, m_1, m_2\}$, $\forall n \geq m$ si ha $L - \epsilon \leq a_n \leq c_n \leq b_n \leq L + \epsilon$.
Caso $L = +\infty$: basta la disuguaglianza di sinistra in (5.9).
Caso $L = -\infty$: basta la disuguaglianza di destra in (5.9). $\square$

Esempio 5.51. Dimostriamo che $a_n = \dfrac{n^2+1}{n^2+2n-1}$ converge a 1. Scriviamo

$$a_n = \frac{n^2+1}{n^2+2n-1} = 1 - \frac{2(n-1)}{n^2+2n-1} = 1 - r_n.$$

Basterà dimostrare che r_n tende a zero. Si ha

$$0 \leq r_n < \frac{2n}{n^2+2n-1} < \frac{2n}{n^2} = \frac{2}{n}.$$

Vale $\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = 0$. Infatti, preso $\varepsilon > 0$, si avrà

$$0 < \frac{2}{n} < \varepsilon$$

non appena si prende $n > \dfrac{2}{\varepsilon} := n_\varepsilon$. Ne segue, che $\forall n \geq n_\varepsilon$ si ha che $\frac{2}{n}$ tende a zero. Per il teorema dei due carabinieri, segue allora che r_n tende a zero. Dunque:

$$|a_n - 1| = r_n < \varepsilon,$$

dunque a_n tende a 1.

Esempio 5.52. Dimostriamo che $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{p} = 1$, $\forall p \in \mathbb{R}^+$. Ricordiamo che vale la formula

$$(1+h)^n \geq 1 + nh, \quad \forall h \geq -1.$$

Studiamo la successione $\sqrt[n]{p}$.

1 caso: Supponiamo $p > 1$. Allora anche $\sqrt[n]{p} > 1$, e quindi si può scrivere

$$\sqrt[n]{p} = 1 + h_n, \quad h_n > 0.$$

Vogliamo dimostrare che h_n tende a zero. Abbiamo, per la formula sopra,

$$p = (1+h_n)^n \geq 1 + nh_n$$

da cui

$$0 < h_n \leq \frac{p-1}{n}.$$

Allora, ragionando come nell'esempio sopra, si vede che $\dfrac{p-1}{n}$ tende a zero, e quindi, per il teorema dei due carabinieri anche h_n tende a zero. Di conseguenza $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{p} = 1$.

2 caso: Sia $p \leq 1$. In questo caso $\sqrt[n]{p} \leq 1$ e quindi possiamo scrivere

$$\sqrt[n]{p} = \frac{1}{1+k_n}, \quad k_n > 0.$$

Abbiamo

$$p = \frac{1}{(1+k_n)^n} \leq \frac{1}{1+nk_n},$$

da cui

$$0 < k_n \leq \frac{1/p - 1}{n}.$$

Ancora, k_n tende a zero, e quindi di nuovo $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{p} = 1$.

Usando il teorema dei due carabinieri, si può generalizzare il teorema del limite del prodotto. Ricordiamo che dalla definizione di successione infinitesima segue banalmente che

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} |a_n| = 0. \tag{5.10}$$

Proposizione 5.53. *Sia $\{a_n\}$ una successione infinitesima e sia $\{b_n\}$ limitata. Allora $\{a_n b_n\}$ è infinitesima.*

Dimostrazione. Se $a_n \to 0$, allora da (5.10) si ha che $|a_n| \to 0$.

Se b_n è limitata, allora esiste $K > 0$ tale che $|b_n| \leq K$, per ogni n. Allora

$$0 \leq |a_n b_n| = |a_n||b_n| \leq K|a_n|.$$

Poichè $K|a_n| \to 0$, allora, per il teorema dei due carabinieri, anche $|a_n b_n| \to 0$. Di nuovo grazie alla (5.10) segue allora che anche $a_n b_n \to 0$, cioè la tesi. □

5.6 Limiti di successioni monotone

Definizione 5.54. *La successione $\{a_n\}$ si dice*

(i) crescente se $a_n \leq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$;

(ii) strettamente crescente se $a_n < a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$;

(iii) decrescente se $a_n \geq a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$;

(iv) strettamente decrescente se $a_n > a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

La successione sarà "definitivamente" crescente/decrescente (strettamente) se esiste n_0 tale che le disuguaglianze sopra sono verificate per $n \geq n_0$ e non per tutti gli n: questo significa che il comportamento monotono della successione non si ha a partire dal primo elemento, ma da un certo indice in poi.

Osservazione 5.55. Valgono i seguenti fatti:

(1) $\{a_n\}$ monotona crescente $\Rightarrow a_n \geq a_0, \forall n \Rightarrow \{a_n\}$ inferiormente limitata.

(2) $\{a_n\}$ monotona decrescente $\Rightarrow a_n \leq a_0, \forall n \Rightarrow \{a_n\}$ superiormente limitata.

Le successioni monotone sono molto importanti perché sono successioni che non sono mai oscillanti. Vale infatti il seguente teorema.

Teorema 5.56. *Sia $\{a_n\}$ monotona crescente, allora $\{a_n\}$ non oscilla e $\lim_n a_n = \sup_n a_n$. Sia $\{a_n\}$ monotona decrescente, allora $\{a_n\}$ non oscilla e $\lim_n a_n = \inf_n a_n$.*

Corollario 5.57. *Ogni successione monotona limitata converge in* $\mathbb{R}$.

Esempio 5.58. La successione $\{a_n\}$ con $a_n = \frac{1}{n}$ è decrescente poichè $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$, $\forall n \geq 1$, quindi $\{a_n\}$ è superiormente limitata da a_1. Essendo positiva, $\{a_n\}$ è inferiormente limitata da 0 . Si provi che $\inf_n a_n = 0$. Pertanto

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \inf_n a_n = 0.$$

Esempio 5.59. La successione $\{a_n\}$ con $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ è crescente e limitata (vedi Proposizione 5.60). Quindi $\{a_n\}$ è convergente al

$$\sup_n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} a_n := e.$$

e è il numero di Nepero (base dei logaritmi naturali), che risulta essere un numero razionale maggiore di 2 e minore di 3: $e \simeq 2,71828182845904523536028747135 27$.

Proposizione 5.60. *La successione* $a_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ *è strettamente crescente e limitata; in particolare si ha* $2 \leq a_n < 3$ *per ogni* $n \geq 1$.

Dimostrazione. Cominciamo ad osservare che vale la seguente relazione

$$(1-q)(1+q+q^2+q^3+\cdots+q^n) = 1-q^{n+1}$$

da cui si ottiene

$$1+q+q^2+q^3+\cdots+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}. \tag{5.11}$$

Applicando la formula dello sviluppo del binomio di Newton si ha

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= 1+n\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\frac{1}{n^3}+\cdots+\frac{1}{n^n} = \\ &= 1+1+\frac{1}{2!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)+\frac{1}{3!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big(1-\frac{2}{n}\Big)+\cdots+ \\ &\qquad +\frac{1}{n!}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)\Big(1-\frac{2}{n}\Big)\cdots\Big(1-\frac{n-1}{n}\Big).\end{aligned} \tag{5.12}$$

La somma al secondo membro cresce al crescere di n poiché coinvolge sempre più termini positivi, di conseguenza la successione

$$n \to \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

è monotona crescente.
Si ha

$$2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Inoltre, poichè i termini $1-\frac{1}{n}$, $1-\frac{2}{n}\cdots$ sono minori di 1 si ha

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!} < 1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

Calcolando la somma dentro la parentesi tonda al secondo membro usando la (5.11) si ottiene

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 3-\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Dunque, per ogni $n \geq 1$ si ha

$$2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$$

□

Proposizione 5.61. *La successione* $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *converge; posto*

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

si ha $2 \leq e < 3$.

Dimostrazione. Infatti $\{a_n\}$ è strettamente crescente e limitata fra 2 e 3, quindi ha limite finito, e il suo limite verifica per il Teorema 5.49 del confronto

$$2 \leq \lim_{n\to+\infty} a_n < 3.$$

□

Osservazione 5.62. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ vale

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x.$$

5.7 Sottosuccessioni

Definizione 5.63. *Una successione* $\{b_n\}$ *è sottosuccessione di* $\{a_n\}$ *se* $\exists f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *funzione strettamente crescente tale che*

$$b_k = a_{f(k)}.$$

In genere si scrive n_k *invece di* $f(k)$*, per cui*

$$b_k = a_{n_k}.$$

Osservazione 5.64. Essendo $f(k) = n_k$ crescente, si ha $\lim_{k\to\infty} f(k) = \lim_{k\to\infty} n_k = +\infty$.

Esempio 5.65. La successione $\{b_k = 4k^2\}$ è sottosuccessione della successione $\{a_n = n^2\}$: infatti prendendo $f(k) = 2k$ si ha

$$b_k = a_{f(k)} = (2k)^2 = 4k^2.$$

Poichè l'indice k è muto, in genere, si scrive che $\{4n^2\}$ è sottosuccessione della successione $\{n^2\}$. Analogamente:

1. $\left\{\frac{1}{(2n)^2}\right\}$ è sottosuccessione della successione $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ (prendendo $f(n) = 2n$).

2. $\left\{\frac{1}{(2n+1)^2}\right\}$ èsottosuccessione della successione $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ (prendendo $f(n) = 2n+1$).

3. $\left\{\frac{1}{(4n-1)^2}\right\}$ è sottosuccessione della successione $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ (prendendo $f(n) = 4n-1$).

Il comportamento del limite di una successione e delle sue sottosuccessioni è strettamente correlato.

Teorema 5.66. *Siano $L \in \overline{\mathbb{R}}$ e $\{a_n\}$ una successione.*

$$a_n \to L \quad \Rightarrow \quad a_{n_k} \to L \quad \forall \text{ sottosuccessione } \{a_{n_k}\} \text{ di } \{a_n\}.$$

Dunque, dal teorema sopra, segue che se una successione è convergente, allora ogni sua sottosuccessione è convergente, mentre se è divergente, ogni sua sottosuccessione è ancora divergente.
Il teorema sopra è utile per capire quando una successione non converge.

Corollario 5.67. *Sia $\{a_n\}$ una successione.*

1. *Se esiste una sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ oscillante, allora $\{a_n\}$ è oscillante.*

2. *Se $\{a_{n_k}\}$ e $\{a_{n'_k}\}$ sono due sottosuccessioni di $\{a_n\}$ tali che*

$$a_{n_k} \to L \qquad a_{n'_k} \to L'$$

e $L \neq L'$, allora $\{a_n\}$ oscilla.

Esempio 5.68. Consideriamo $\{b_k\}$ e $\{c_k\}$, due sottosuccessioni di $\{a_n\} = \{(-n)^n\}$, con

$$b_k = (-2k)^{2k} = (2k)^{2k} \quad \text{e} \quad c_k = [-(2k+1)]^{2k+1} = -(2k+1)^{2k+1}.$$

Tali sottosuccessioni hanno limiti <u>diversi</u>:

$$\lim_{k\to\infty} b_k = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{k\to\infty} c_k = -\infty.$$

Quindi $\{(-n)^n\}$ è oscillante.

5.8 Successioni limitate e sottosuccessioni

Sappiamo che se una successione è convergente, allora è limitata mentre il viceversa non è vero in generale. Partendo però da una successione limitata, è possibile determinare almeno qualche sottosuccessione convergente? La risposta a questo quesito è fornita dal teorema di Bolzano Weiestrass.

Teorema 5.69 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Da ogni successione limitata si può estrarre una sottosuccessione convergente.*

Esempio 5.70. La successione $\{a_n\}$ con $a_n = (-1)^n$ è limitata; una sua sottosuccessione convergente è, ad esempio, $\{b_k\}$ con $b_k = a_{2k+3} = (-1)^{2k+3} = -1$.

Idea della dimostrazione. Sia $\{x_n\}$ la successione limitata, quindi $a \leq x_n \leq b$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Costruiamo una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ in modo che valga $a_k \leq x_{n_k} \leq b_k$ con $a_0 = a$, $b_0 = b$, $\{a_k\}$ crescente e limitata, $\{b_k\}$ decrescente e limitata. Le successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ possono costruirsi in modo tale che convergono allo stesso limite L. Per il Teorema dei due carabinieri anche $x_{n_k} \to L$. $\square$

5.9 Il criterio di Cauchy

Se si vuole dimostrare che una successione $\{a_n\}$ è convergente, ciò che occorre, tranne nel caso delle successioni monotone che sappiamo convergere al sup o all'inf, è in primo luogo farsi un'idea del limite a cui tende la successione, quindi usare la definizione, e poi usare i teoremi del calcolo dei limiti per dimostrare che il numero pensato è proprio il limite della successione. La definizione di limite è così utile, a posteriori, se si conosce già, o almeno se si può congetturare quale sia il limite della successione.

Molte volte però è utile poter dimostare che una successione converge, senza conoscerne in partenza il limite, che talvolta rimane sconosciuto, anche quando si è dimostrata la convergenza. A questa esigenza, risponde il cosiddetto Criterio di Cauchy.

Cominciamo con la seguente osservazione.

Osservazione 5.71. Sia $\{a_n\}$ convergente a L. Valutiamo la differenza

$$|a_n - a_{n'}| = |a_n - L + L - a_{n'}| \leq |a_n - L| + |L - a_{n'}|.$$

Per ipotesi $\{a_n\}$ converge, cioè

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad \forall n, n' \geq n_0 \quad |a_n - L| \leq \epsilon \quad \text{e} \quad |a_{n'} - L| \leq \epsilon.$$

Segue allora che

$$|a_n - a_{n'}| \leq 2\epsilon.$$

La disuguaglianza sopra ci dice che gli elementi successivi della successione non si possono sparpagliare troppo, ma rimangono vincolati nella striscia di raggio 2ϵ arbitrariamente piccolo. Tale proprietà definisce la condizione di Cauchy:

Definizione 5.72 (Condizione di Cauchy)**.** *La successione $\{a_n\}$ è di Cauchy se*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad \forall n, m \geq n_0 \quad |a_n - a_m| \leq \epsilon. \tag{5.13}$$

Osservazione 5.73. Abbiamo quindi dimostrato sopra che la condizione di Cauchy è condizione necessaria affinchè una successione sia convergente, cioè

$$a_n \to L \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \text{vale (5.13)}.$$

Vale il viceversa? SÌ.

Teorema 5.74 (Criterio di Cauchy)**.** *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una successione reale converga è che essa sia di Cauchy.*

Dimostrazione. Condizione necessaria; $\{a_n\}$ convergente a L, implica $\{a_n\}$ di Cauchy. Già fatto (Osservazione 5.71).

Condizione sufficiente: $\{a_n\}$ di Cauchy, implica $\{a_n\}$ convergente a L. Lo dimostriamo con passi successivi.

- Cominciamo a dimostrare che $\{a_n\}$ è limitata. Per ipotesi vale la condizione di Cauchy. Allora, preso $\varepsilon = 1$, esiste n_0 tale che $\forall n, m \geq n_0$, si ha

  $$|a_n - a_m| \leq 1.$$

  Si può prendere $m = n_0$, cosicchè si ha

  $$|a_n - a_{n_0}| \leq 1.$$

  Ragionando come nella dimostrazione del Teorema 5.32, si conclude che

  $$|a_n| \leq |a_0| + \cdots + |a_{n_0}| + 1,$$

  cosicchè $\{a_n\}$ è limitata.

- $\{a_n\}$ ammette una sottosuccessione convergente.

  Per il teorema di Bolzano Weierstrass, essendo $\{a_n\}$ limitata, esiste una sua sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ che converge a L.

- Dimostriamo che tutta la successione di partenza $\{a_n\}$ converge a L.

  $\{a_{n_k}\}$ convergente, allora
$$\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0 \ \ \exists k' : \forall k \geq k', \ |a_{n_k} - L| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$
  $\{a_n\}$ è di Cauchy, allora
$$\forall \frac{\varepsilon}{2} > 0 \ \exists n'' \ : \forall n, m \geq n'', \ |a_n - a_m| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$
  Uso che $n_k \to \infty$, quindi
$$\exists \, k'' \in \mathbb{N} : \quad \forall k \geq k'', \quad n_k \geq n''$$
  Allora, per $k \geq \bar{k} := \max\{k', k'', n''\}$: si ha
$$|a_k - L| \leq |a_k - a_{n_k}| + |a_{n_k} - L|$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$
  dove la prima disuguaglianza segue dalla disuguaglianza triangolare, mentre l'ultima segue dal fatto che $\{a_n\}$ è di Cauchy, e $\{a_{n_k}\}$ è convergente. Dall'arbitrarietà di ε si ottiene infine che tutta la successione $\{a_n\}$ converge a L.

$\square$

Esempio 5.75. Le successioni $\{(-1)^n\}$ e $\{n^2\}$ **non** sono di Cauchy.

Osservazione 5.76. La sufficienza della condizione di Cauchy per la convergenza di una successione è equivalente alla completezza di $\mathbb{R}$. Un altro modo di dire che $\mathbb{R}$ è completo è quindi dire che tutte le successioni di Cauchy in $\mathbb{R}$ sono convergenti.

Uno spazio (metrico) non sarà così completo, se esistono successioni di Cauchy nello spazio che non sono convergenti in tale spazio.

Esempio 5.77. Sia $\{x_n\} \subseteq \mathbb{Q}$ una successione convergente a $\sqrt{2}$. Poiché la successione è convergente in $\mathbb{R}$, essa è di Cauchy in $\mathbb{R}$ (e dunque anche in $\mathbb{Q}$). Però essa **non è convergente in** $\mathbb{Q}$. Dunque,$\mathbb{Q}$ non è completo.

Concludiamo questa sezione osservando che un modo alternativo di dire che $\{a_n\}$ è di Cauchy è il seguente: $\{a_n\}$ è di Cauchy se e solo se $\forall \varepsilon > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $n \geq n_0$
$$|a_{n+k} - a_n| \leq \varepsilon, \quad \forall k \in \mathbb{N}^+.$$

5.10 Limiti notevoli

Ricordiamo alcuni limiti fondamentali.

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\tfrac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\lim_{n\to+\infty} n\sin\left(\tfrac{1}{n}\right) = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} n\log\left(1+\tfrac{1}{n}\right) = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} n(e^{1/n}-1) = 1$$

$$\lim_{n\to+\infty} n(a^{1/n}-1) = \log_e a, \quad \forall a>0$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = 1, \ \ \forall \alpha\in\mathbb{R}.$$

5.11 Formula di De Moivre-Stirling

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}e^{\frac{\theta_n}{12n}} \quad \text{con } 0<\theta_n<1.$$

Esempio 5.78. Calcolare $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2e)^n\sqrt{n^2+1}\,n!}{(2n)^n\,n^2}$.

Risoluzione. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2e)^n\sqrt{n^2+1}\,n!}{(2n)^n\,n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n\,e^n\,n\,\overset{\substack{1\\ \uparrow}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}\,n!}{2^n\,n^n\,n^2} =$
$= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2\pi n}e^{\frac{\theta_n}{12n}}}{n} = 0.$ □

Capitolo 6

Serie numeriche

In questo capitolo vogliamo estendere l'operazione di somma ad un numero infinito di termini.

Sia $\{a_n\}$ una successione di numeri reali. A partire da $\{a_n\}$ costruiamo una nuova successione $\{s_n\}$, definita così:

$$\begin{aligned}
&s_0 = a_0, \\
&s_1 = a_0 + a_1, \\
&s_2 = a_0 + a_1 + a_2, \\
&\dots \\
&s_n = a_0 + \cdots + a_n = \textstyle\sum_{k=0}^{n} a_k, \\
&\dots
\end{aligned}$$

Definizione 6.1. *La successione $\{s_n\}$ è detta serie di termini a_n: gli elementi s_n sono detti somme parziali o ridotte della serie.*

Osservazione 6.2. Attenzione a non fare l'errore classico: la serie non è a_n.

Definizione 6.3. *Diciamo che la serie $\{s_n\}$ è convergente se la successione delle ridotte parziali $\{s_n\}$ è convergente.*
Diciamo che la serie $\{s_n\}$ è divergente a $+\infty$ (risp., a $-\infty$) se la successione delle ridotte parziali $\{s_n\}$ è divergente a $+\infty$ (risp., a $-\infty$).
Diciamo che la serie $\{s_n\}$ oscilla se la successione delle ridotte parziali $\{s_n\}$ è oscillante.
La serie si denota $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ o anche con $\sum_n a_n$.
Il $\lim_{n\to+\infty} s_n$ si chiama **somma della serie** *e si denota anch'esso con*

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Esempio 6.4. 1. $a_n = 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Allora

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n} 1 = n + 1 \to +\infty,$$

dunque la serie $\{s_n\}$ diverge a $+\infty$.

2. $a_n = (-1)^n, \forall n \in \mathbb{N}$. Allora
$$s_n = 1 - 1 + 1 - 1 \cdots = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 0 & \text{se } n \text{ è dispari,} \end{cases}$$
quindi la serie $\{s_n\}$ oscilla.

3. $a_n = (\frac{1}{2})^n$. Allora si può dimostrare che
$$s_n = \frac{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1},$$
dunque si ha $\lim_{n\to+\infty} s_n = 2$ e quindi la serie $\{s_n\}$ è convergente.

L'esempio sopra è un caso particolare della serie geometrica. Precisamente

Esempio 6.5 (Serie geometrica di ragione q)**.** Sia $q \in \mathbb{R}$ e sia $a_n = q^n$, per ogni $n \in \mathbb{R}$. La serie geometrica di ragione q è la serie
$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n.$$
Nel caso $q = 0$ poniamo $0^0 = 1$. La somma parziale della serie geometrica vale
$$s_n := \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{se } q \neq 1, \\ n+1 & \text{se } q = 1, \end{cases}$$
dunque, ricordando l'Esempio 5.27, si ha che
$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \begin{cases} \frac{1}{1-q} & \text{se } |q| < 1, \\ +\infty & \text{se } q \geq 1, \\ \text{non esiste} & \text{se } q \leq -1. \end{cases}$$
Dunque, la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$ converge se $|q| < 1$, diverge se $q \geq 1$ e oscilla se $q \leq -1$.

La proprietà di essere convergente, divergente o oscillante si dice anche *carattere* della serie.

Osservazione 6.6. 1. Se modifichiamo i primi m termini di una successione, il carattere della serie corrispondente non cambia. Infatti, se $a_n = b_n$ per $n > m$, allora (se $n > m$)
$$\sum_{k=0}^{n} b_k - \sum_{k=0}^{n} a_k = \sum_{k=0}^{n}(b_k - a_k) = \sum_{k=0}^{m}(b_k - a_k)$$
e quindi le somme parziali n-esime differiscono per una quantità indipendente da n.

2. Se a_n è definita solo per $n \geq k$, allora si estende il concetto di serie, ponendo $a_n = 0$ per ogni $n < k$. Si scriverà
$$\sum_{n=k}^{+\infty} a_n.$$

Poichè le serie sono successioni, dalla teoria dei limiti di successioni possiamo ottenere i corrispondenti risultati per le serie.

Teorema 6.7 (Linearità). *Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni reali e sia $c \in \mathbb{R}$. Se le due serie $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ sono convergenti, allora anche $\sum_n (a_n + b_n)$ e $\sum_n ca_n$ lo sono e si ha:*
$$\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n + b_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n,$$
$$\sum_{n=0}^{+\infty} ca_n = c\sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Osservazione 6.8. Il teorema di linearità vale anche per serie divergenti, a patto che non si verifichino forme indeterminate.

Cerchiamo ora di analizzare quando una serie converge. Cominciamo con la seguente condizione necessaria.

Teorema 6.9 (Condizione necessaria). *Sia $\sum_n a_n$ una serie convergente. Allora*
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0.$$

Dimostrazione. Abbiamo che $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = L$ se e solo se $\lim_{n\to+\infty} s_n = L$. Allora, poiché dalla definizione di s_n si ha che
$$a_n = s_n - s_{n-1},$$
otteniamo che
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} s_n - \lim_{n\to+\infty} s_{n-1} = L - L = 0.$$
□

Il teorema sopra è molto importante perché ci dà subito una condizione per dire quando una serie non converge. Infatti, se $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$, allora la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ non converge.

Esempio 6.10. Consideriamo la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n$. Poichè
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$$
la serie non converge.

Attenzione però al fatto che la condizione espressa dalla tesi del Teorema 6.9 è solo necessaria e non sufficiente: ossia esistono serie che hanno termine generale infinitesimo, ma che non convergono.

Esempio 6.11 (Serie armonica)**.**

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

è detta serie armonica. Dimostreremo che tale serie diverge, ma $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$.

Dalla teoria delle successioni (vedi Teorema 5.74), otteniamo il seguente teorema.

Teorema 6.12. *Una serie $\sum_n a_n$ risulta convergente se e solo se la successione delle somme parziali $\{s_n\}$ è una successione di Cauchy, ossia se $\forall \varepsilon > 0$ esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq \overline{n}$ e $\forall k \in \mathbb{N}$*

$$|s_{n+k} - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| \leq \varepsilon.$$

In genere, stabilire se una serie converge o no non è un'operazione facile. Ci sono casi in cui questo risulta più semplice: per esempio con le serie telescopiche.

Definizione 6.13 (Serie telescopiche)**.** *Una serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ si dice telescopica, se la successione $\{a_n\}$ è della forma*

$$a_n = b_n - b_{n+1}$$

per una opportuna successione $\{b_n\}$.

In questo caso la successione delle somme parziali è tale che

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} (b_k - b_{k+1}) = (b_0 - b_1) + (b_1 - b_2) + \cdots + (b_n - b_{n+1}) = b_0 - b_{n+1}.$$

Di conseguenza

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = b_0 - \lim_{n\to+\infty} b_{n+1} = b_0 - \lim_{n\to+\infty} b_n$$

e quindi la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ sarà convergente, divergente o oscillante a seconda del carattere della successione $\{b_n\}$.
Nel caso in cui la serie telescopica sia sommata a partire da un certo indice k, cioè si abbia $\sum_{n=k}^{+\infty} a_n = \sum_{n=k}^{+\infty} (b_n - b_{n+1})$, allora

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = b_k - \lim_{n\to+\infty} b_n.$$

Esempio 6.14 (La serie di Mengoli)**.**

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}).$$

La serie parte da $n = 1$, allora la successione delle somme parziali è

$$s_n = b_1 - b_{n+1}.$$

Quindi,

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = 1 - \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 1$$

dunque la serie di Mengoli è convergente e ha somma 1.

6.1 Serie a termini non negativi

Sono serie a termini non negativi le serie del tipo

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n, \qquad a_n \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Se una serie numerica è a termini non negativi, la successione delle somme parziali è crescente: risulta infatti

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n.$$

Dalla teoria dei limiti delle successioni, segue allora che le serie a termini non negativi non potranno mai essere serie oscillanti. Saranno sempre serie convergenti, se la successione delle somme parziali è limitata (ovvero se $\sup_{n\in\mathbb{N}} s_n < +\infty$), oppure divergenti se $(\sup_{n\in\mathbb{N}} s_n = +\infty)$. Vale infatti il seguente teorema.

Teorema 6.15. *Sia $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ una serie a termini non negativi. Allora:*

1. *la successione delle somme parziali $\{s_n\}$ è crescente;*

2. *la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ non oscilla e si ha*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} s_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Esempio 6.16. Dimostriamo che la serie armonica $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ diverge. La serie armonica è una serie a termini positivi, poichè $a_n = \frac{1}{n} > 0$, allora dal teorema precedente sappiamo che non oscilla. Per assurdo supponiamo che sia convergente, ossia che la successione delle somme parziali s_n sia tale che $\lim_{n\to+\infty} s_n = L$. Allora, anche $\lim_{n\to+\infty} s_{2n} = L$, da cui

$$\lim_{n\to+\infty} s_{2n} - s_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right) = L - L = 0.$$

Ma allora

$$0 = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right) = \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{k} \geq \lim_{n\to+\infty}\sum_{k=n+1}^{2n}\frac{1}{2n} =$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n}\sum_{k=n+1}^{2n} 1 = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n}(2n-n-1+1) = \lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Otteniamo quindi $0 \geq \frac{1}{2}$, che è assurdo. Allora la serie armonica diverge.

6.1.1 Criteri di convergenza per serie a termini non negativi

In questa sezione ci occupiamo di stabilire dei criteri che ci consentano di stabilire il carattere di una serie, senza preoccuparci di calcolare la somma della serie.

Teorema 6.17 (Criterio del confronto)**.** *Siano $\sum_n a_n$ e $\sum_n b_n$ due serie reali a termini non negativi, tali che*

$$a_n \leq b_n, \quad \forall n \geq m.$$

Allora, se $\sum_n b_n$ converge, anche $\sum_n a_n$ converge.

Dimostrazione. La tesi segue dal teorema del confronto per successioni, applicato alle successioni delle ridotte parziali delle due successioni. ☐

Corollario 6.18. *Nelle stessi ipotesi del Criterio del confronto, se la serie $\sum_n a_n$ diverge anche la serie $\sum_n b_n$ diverge.*

Esempio 6.19. Studiare il carattere della serie $\sum_{n=2}^{+\infty}\dfrac{1}{\log n}$.
Poichè vale

$$0 < \log n < n, \quad \forall n \geq 2,$$

abbiamo che

$$a_n := \frac{1}{\log n} > \frac{1}{n} := b_n$$

e poichè la serie $\sum_n b_n = +\infty$, dal criterio del confronto segue che anche la serie da studiare è divergente.

Esempio 6.20. La serie $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}$ è convergente. Infatti, sappiamo (vedi confronti asintotici) che

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2^n}{n!} = 0$$

dunque, per $n \geq n_0$ si ha $n! > 2^n$ che dà

$$\frac{1}{n!} < 2^{-n}.$$

Poichè la serie $\sum_n(\frac{1}{2})^n$ è la serie geometrica di ragione $\frac{1}{2}$ che converge, dal criterio del confronto segue che anche la serie data converge.

Teorema 6.21 (Criterio del confronto asintotico)**.** *Siano* $\sum_n a_n$ *e* $\sum_n b_n$ *due serie reali a termini non negativi, con* $b_n > 0$ *per ogni* $n \geq m$ *e tali che esista il limite* $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$*. Allora*

1. *se* $L \in]0, +\infty[$, $\sum_n a_n$ *converge se e solo se* $\sum_n b_n$*;*
2. *se* $L = 0$ *e* $\sum_n b_n$ *converge, allora* $\sum_n a_n$ *converge;*
3. *se* $L = +\infty$ *e* $\sum_n b_n$ *diverge, allora* $\sum_n a_n$ *diverge.*

Teorema 6.22 (Criterio asintotico del rapporto)**.** *Sia* $\{a_n\}$ *una successione reale a termini strettamente positivi, cioè* $a_n > 0$ *per* $n \in \mathbb{N}$ *ed esista il limite*

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L.$$

Allora

1. *se* $L < 1$*, allora la serie* $\sum_n a_n$ *converge;*
2. *se* $L > 1$*, allora la serie* $\sum_n a_n$ *diverge;*
3. *se* $L = 1$*, allora il criterio è inefficace.*

Esempio 6.23. Consideriamo $c > 0$ e $a_n = \frac{c^n}{n!}$. Allora

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n!c^{n+1}}{c^n(n+1)!} = \frac{c}{n+1} \to 0.$$

Quindi la serie $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c^n}{n!}$ converge.

Teorema 6.24 (Criterio asintotico della radice)**.** *Sia* $\{a_n\}$ *una successione reale a termini non negativi, cioè* $a_n \geq 0$ *per* $n \in \mathbb{N}$ *ed esista il limite*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L.$$

Allora

1. *se* $L < 1$*, allora la serie* $\sum_n a_n$ *converge;*
2. *se* $L > 1$*, allora la serie* $\sum_n a_n$ *diverge;*
3. *se* $L = 1$*, allora il criterio è inefficace.*

Esempio 6.25. Sia $a_n = \frac{3^n}{n^n}$. Allora

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a}_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n} = 0 < 1$$

e quindi la serie $\sum_n a_n$ converge.

Se il criterio del rapporto risulta inefficace, allora lo è anche quello della radice. Vale infatti la seguente proposizione:

Proposizione 6.26. *Sia* $a_n > 0$ *per ogni* $n > 0$. *Se* $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$, *allora anche* $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$.

Un caso tipico di serie in cui il criterio del rapporto e della radice risultano inefficaci è quello della serie armonica generalizzata $\sum_n \frac{1}{n^\alpha}$ che converge se $\alpha > 1$ e diverge per $\alpha \leq 1$. Per riuscire a determinare il carattere di tale serie può essere utile considerare il seguente criterio:

Teorema 6.27 (di Cauchy)**.** *Sia* $\{a_n\}$ *una successione decrescente e positiva. Allora le due serie* $\sum_n a_n$ *e* $\sum_n 2^n a_{2^n}$ *sono entrambe convergenti o divergenti.*

Dimostrazione. Diamo solo l'idea della dimostrazione. Siano $\{s_n\}$ e $\{\sigma_n\}$ le successioni delle somme parziali di $\sum_n a_n$ e $\sum_n 2^n a_{2^n}$. Usando il fatto che a_n è decrescente si arriva a una serie di disuguaglianze del tipo

$$s_n \leq \sigma_n \leq C s_n,$$

e quindi la successione s_n è limitata se e solo se σ_n lo è, e dunque le due serie sono entrambe convergenti o divergenti, ossia hanno lo stesso carattere. □

Esempio 6.28 (Serie armonica generalizzata)**.** La serie $\sum_n \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge se $\alpha > 1$ e diverge per $\alpha \leq 1$.

Infatti la successione $\dfrac{1}{n^\alpha}$ è decrescente (per $\alpha > 0$; ma se $\alpha \leq 0$ la serie è ovviamente divergente, non essendo verificata la condizione necessaria). Studiamo il carattere della serie usando il teorema di Cauchy. Si ha

$$2^n a_{2^n} = 2^n \cdot \frac{1}{(2^n)^\alpha} = 2^n \cdot \frac{1}{(2^\alpha)^n} = (2^{1-\alpha})^n.$$

Dunque la serie

$$\sum_n 2^n a_{2^n} = \sum_n (2^{1-\alpha})^n$$

è la serie geometrica di ragione $q = 2^{1-\alpha}$ che converge se e solo se

$$2^{1-\alpha} < 1 = 2^0 \quad \Leftrightarrow \quad 1-\alpha < 0 \quad \Leftrightarrow \alpha > 1$$

e diverge per $\alpha \leq 1$.

6.2 Convergenza assoluta

Esaminiamo in questa sezione le serie con termini di segno variabile, cercando per queste dei criteri di convergenza. L'unico risultato generale per serie a termini di segno variabile è il seguente.

Teorema 6.29. *Sia $\sum_n a_n$ una serie e supponiamo che la serie $\sum_n |a_n|$ sia convergente. Allora anche $\sum_n a_n$ è convergente e si ha*

$$|\sum_n a_n| \leq \sum_n |a_n|.$$

Dimostrazione. Sia $a_n = b_n - c_n$ dove

$$b_n = \max(a_n, 0), \quad c_n = \max(-a_n, 0).$$

Si ha

$$0 \leq b_n \leq |a_n|, \quad 0 \leq c_n \leq |a_n|,$$

e quindi per il criterio del confronto sono convergenti le serie $\sum_n b_n$ e $\sum_n c_n$, da cui la convergenza di $\sum_n a_n$.

Si ha inoltre,

$$|\sum_{k=0}^{n} a_k| \leq \sum_{k=0}^{n} |a_k| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|$$

da cui passando al limite per $n \to +\infty$ si ha la tesi. □

Definizione 6.30 (Convergenza assoluta)**.** *La serie $\sum_n a_n$ si dice assolutamente convergente se è convergente la serie $\sum_n |a_n|$.*

La serie $\sum_n a_n$ si dice semplicemente convergente se è convergente la serie $\sum_n a_n$ ma non la serie $\sum_n |a_n|$.

Esempio 6.31. La serie $\sum_n (-1)^n (\frac{1}{n})^\alpha$ è assolutamente convergente per $\alpha > 1$.

La serie $\sum_n (-1)^n \frac{1}{n}$ è semplicemente convergente (vedi la dimostrazione più avanti.)

I seguenti esempi sono esempi importanti di serie che convergono assolutamente.

- $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |x| < 1;$
- $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x \qquad \forall x \in \mathbb{R};$
- $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \cos x \qquad \forall x \in \mathbb{R};$
- $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x \qquad \forall x \in \mathbb{R};$
- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} = \log(1+x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}: \ -1 < x \leq 1;$

- $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)} = \arctan x \qquad \forall x \in \mathbb{R}:\ -1 \leq x \leq 1;$
- $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cosh x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$, dove $\cosh x := \frac{e^x+e^{-x}}{2}$;
- $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sinh x \qquad \forall x \in \mathbb{R}$, dove $\sinh x := \frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

6.3 Serie di segno alterno

Sono serie di termini di segno alterno serie del tipo:

$$\sum_n (-1)^n a_n, \quad dove \quad a_n \geq 0.$$

In questa sezione ci occupiamo di determinare dei criteri per stabilire il carattere di una serie di questo tipo. Osserviamo che una serie a termini di segno alterno è, in particolare, una serie a termini di segno variabile, quindi un primo criterio di convergenza è fornito dal Teorema 6.29. La particolare struttura della serie a termini di segno alterno consente però di ottenere un altro risultato.

Teorema 6.32 (Criterio di Leibniz). *Sia $\sum_n (-1)^n a_n$ ($a_n \geq 0$) una serie di termini di segno alterno. Supponiamo che*

1. *$\{a_n\}$ sia una successione decrescente;*
2. *$\{a_n\}$ sia una successione infinitesima, cioè $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.*

Allora la serie $\sum_n (-1)^n a_n$ è convergente.

Inoltre, detta $\{s_n\}$ la successione delle somme parziali, si ha che:

(i) $\{s_{2n}\}$ (la successione delle somme parziali con indice pari) è decrescente;

(ii) $\{s_{2n+1}\}$ (la successione delle somme parziali con indice dispari) è crescente;

(iii) vale la seguente stima

$$|s_n - \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k a_k| \leq a_{n+1}, \qquad \forall n. \tag{6.1}$$

Dimostrazione. Usando il fatto che a_n è decrescente si ha che:

(1) $\{s_{2n}\}$, la successione delle somme parziali con indice pari, è decrescente; infatti

$$s_{2(n+1)} - s_{2n} = (-1)^{2n+2} a_{2n+2} + (-1)^{2n+1} a_{2n+1} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0$$

poichè $a_{2n+2} \leq a_{2n+1}$. Dunque s_{2n} è decrescente.

Analogamente si ha che

(2) $\{s_{2n+1}\}$, la successione delle somme parziali con indice dispari, è crescente.

Inoltre, $\{s_{2n}\}$ è inferiormente limitata, essendo

$$s_{2n} = s_{2n-1} + a_{2n} \geq s_{2n-1} \geq s_1$$

(perché $\{s_{2n-1}\}$ è crescente), e dunque vale (i).

Analogamente, $\{s_{2n+1}\}$ è superiormente limitata e quindi vale (ii).

Usando il fatto che a_n è infinitesima si dimostra che le due successioni $\{s_{2n}\}$ e $\{s_{2n+1}\}$ convergono allo stesso limite L, e quindi tutta la successione $\{s_n\}$ converge allo stesso limite L, ossia la serie $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n a_n$ è convergente. □

Esempio 6.33. La serie $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{n}$ è una serie convergente per il criterio di Leibniz.

Esempio 6.34. La formula (6.1) si può usare per ottenere una stima dell'errore nel calcolo approssimato di $\sin 1$. Infatti, da

$$\sin 1 = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!},$$

per ogni n si ha

$$\left| \sin 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \right| \leq \frac{1}{(2n+3)!}.$$

Volendo, ad esempio un errore inferiore a 10^{-3}, basterà scegliere n tale che $(2n+3)! \geq 1000$. Il primo valore che verifica tale disuguaglianza è $n = 2$. Perciò il valore approssimato di $\sin 1$ con un errore $< 10^{-3}$ è

$$\sum_{k=0}^{2} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!}.$$

Capitolo 7

Limiti di funzioni

Nel capitolo 5 abbiamo considerato i limiti di successioni, cioè di funzioni definite in $\mathbb{N}$. Vogliamo ora estendere il concetto di limite in modo da comprendere limiti di funzioni definite su un qualsiasi sottoinsieme di $\mathbb{R}$.

7.1 Cenni di topologia

Sia $x_0 \in \mathbb{R}$ e $r > 0$. Consideriamo

$$I_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, d(x, x_0) < r\} = \{x \in \mathbb{R} \,:\, |x-x_0| < r\} = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x_0-r < x < x_0+r\},$$

l'intorno sferico aperto di centro x_0.

Definizione 7.1. *Sia $E \subseteq \mathbb{R}$.*

1. *Diciamo che $p \in \mathbb{R}$ è* **interno** *a E se:*
   esiste $r > 0$ tale che $I_r(p) \subseteq E$.

2. *Diciamo che $p \in \mathbb{R}$ è d'***accumulazione** *per E se*
   per ogni $r > 0$ si ha $(E \setminus \{p\}) \cap I_r(p) \neq \emptyset$;

3. *Diciamo che $p \in \mathbb{R}$ è* **punto isolato** *di E se*
   esiste $r > 0$ tale che $E \cap I_r(p) = \{p\}$.

4. *Diciamo che $p \in \mathbb{R}$ è* **aderente** *ad E se p è d'accumulazione per E oppure p è un punto isolato di E.*

Osservazione 7.2. Un punto di accumulazione (o aderente) **può non** appartenere ad E. Invece i punti interni o isolati appartengono sempre ad E.

Esempio 7.3. Sia $E =]-1, 1] \cup \{2\}$.

- Ogni punto p di $[-1, 1]$ è di accumulazione per E: in ogni intorno di p ci sono punti di E, diversi da p stesso.

- 2 è un punto isolato di E. Infatti, non vero che in ogni suo intorno ci sono punti dell'insieme diversi da 2: si prenda, per esempio, come intorno $\left]\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right[$.
- $-1 \notin E$, ma è punto di accumulazione.
- $A = [-1, 1] \cup \{2\}$ è l'insieme dei punti aderenti di E.

Esempio 7.4. $E = \left\{\frac{1}{n} : \quad n \in \mathbb{N}, \quad n \neq 0\right\}$.

- $0 \notin E$ è l'unico punto di accumulazione per E.
- E è costituito solo di punti isolati.

A partire dalle nozioni precedenti, possiamo associare ad E i seguenti insiemi.

Definizione 7.5. *1. Diciamo* **parte interna** *di E l'insieme*

$$\mathrm{int}(E) := \{p \in E \,:\, p \textit{ è interno ad } E\}\,.$$

2. Diciamo **chiusura** *di E l'insieme*

$$\overline{E} := \{p \in \mathbb{R} \,:\, p \textit{ è aderente ad } E\}\,.$$

3. Diciamo **bordo** *di E l'insieme $\partial E := \overline{E} \setminus \mathrm{int}(E)$.*

Abbiamo chiaramente che

$$\mathrm{int}(E) \subseteq E \subseteq \overline{E}.$$

Nel seguito saranno utili gli insiemi aperti e gli insiemi chiusi.

Definizione 7.6 (Insiemi aperti e insiemi chiusi). *Siano $E, C \subseteq \mathbb{R}$.*

(a) Diciamo che E è **aperto** *se ogni suo punto è interno ad E, cioè se $E = \mathrm{int}(E)$.*

(b) Diciamo che C è **chiuso** *se contiene tutti i suoi punti aderenti, cioè se $C = \overline{C}$.*

Si può verificare che E è aperto se e solo se il suo complementare $\mathbb{R} \setminus E$ è chiuso.

7.2 Definizioni

Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione reale definita in A.
Sia x_0 un punto di accumulazione di A (i.e, $\forall r > 0, I_r(x_0) \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$).
Sia $L \in \mathbb{R}$.

Definizione 7.7. *Diremo che la funzione f tende al numero L per $x \to x_0$ se*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_\varepsilon > 0 : \quad \forall x \in A, \quad 0 < |x - x_0| \leq \delta_\varepsilon, (x \neq x_0) \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| \leq \varepsilon.$$

Il numero L si dice il limite di f per $x \to x_0$, e si scrive $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L$.

Osservazione 7.8. Nella definizione sopra, non si richiede che la disuguaglianza $|f(x) - L| \leq \varepsilon$ sia soddisfatta per $x = x_0$. Infatti, si impone $x \neq x_0$ perché non vogliamo che il valore di f in x_0 influenzi il limite.

La Definizione 7.7 può essere riformulata in termini di intorni nel seguente modo: si ha

$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ *se, per ogni intorno* $J_\varepsilon(L)$ *di* L *esiste un intorno* $I_{\delta_\varepsilon}(x_0)$ *di* x_0*, tale che per ogni* $x \neq x_0, x \in I_{\delta_\varepsilon}(x_0) \cap A$*, si abbia* $f(x) \in J_\varepsilon(L)$*.*

In altre parole:

$$f(I_{\delta_\varepsilon}(x_0) \cap A \setminus \{x_0\}) \subseteq J_\varepsilon(L).$$

Osservazione 7.9. Nella Definizione 7.7 abbiamo usato le disugualianze con il $\leq$, dunque la notazione $J_\varepsilon(L)$ e $I_{\delta_\varepsilon}(x_0)$ si riferisce in questo caso ad intorni chiusi. La definizione di limite può essere data in modo del tutto equivalente usando le disuguaglianze strette e quindi usando intorni aperti, oppure anche facendo tutte le combinazioni possibili di $\leq$ e $<$.

Esempio 7.10. Dimostriamo che

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Sia $0 < x < \pi/2$, e nel cerchio di raggio 1 si considerino l'arco x e i segmenti di lunghezza $\sin x$ e $\tan x$. Si ha

$$0 < \sin x < x < \tan x,$$

e quindi, dividendo per $\sin x$ e invertendo,

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

Quest'ultima relazione resta valida anche per $-\pi/2 < x < 0$, dato che i suoi termini restano invariati se si scrive $-x$ al posto di x; da essa segue

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2 \sin^2 \left(\frac{x}{2}\right) < \frac{x^2}{2},$$

e in definitiva

$$\left|1 - \frac{\sin x}{x}\right| < \frac{x^2}{2},$$

cosicchè, fissato $\varepsilon > 0$, se $0 < |x| \leq \delta(\varepsilon) = \sqrt{2\varepsilon}$, si ha

$$\left|1 - \frac{\sin x}{x}\right| \leq \varepsilon.$$

Nella Definizione 7.7 si è supposto che sia il punto x_0 sia il numero L siano reali. Vogliamo ora estendere la definizione anche al caso in cui uno dei due, o entrambi, siano infiniti.

1. caso : $\boxed{x_0 \text{ reale e } L \text{ infinito}}$.

Definizione 7.11. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$

$$\forall N > 0 \quad \exists \delta_N > 0 : \quad \forall x \in A, \quad 0 < |x - x_0| \leq \delta_N, \, (x \neq x_0) \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq N.$$

Definizione 7.12. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$

$$\forall N > 0 \quad \exists \delta_N > 0 : \quad \forall x \in A, \quad 0 < |x - x_0| \leq \delta_N, (x \neq x_0) \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq -N.$$

2. caso : $\boxed{x_0 \text{ infinito e } L \text{ reale}}$.

Definizione 7.13. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M_\varepsilon > 0 : \quad \forall x \in A, \quad x \geq M_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| \leq \varepsilon.$$

Definizione 7.14. $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L \Leftrightarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M_\varepsilon > 0 : \quad \forall x \in A, \quad x \leq -M_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad |f(x) - L| \leq \varepsilon.$$

3. caso : $\boxed{x_0 \text{ infinito e } L \text{ infinito}}$.

Definizione 7.15. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$

$$\forall N > 0 \quad \exists M_N > 0 : \quad \forall x \in A, \quad x \geq M_N \quad f(x) \geq N.$$

Definizione 7.16. $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$

$$\forall N > 0 \quad \exists M_N > 0 : \quad \forall x \in A, \quad x \geq M_N \quad f(x) \leq -N.$$

Definizione 7.17. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow$

$$\forall N > 0 \quad \exists M_N > 0 : \quad \forall x \in A, \quad x \leq -M_N \quad f(x) \geq N.$$

Definizione 7.18. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$

$$\forall N > 0 \quad \exists M_N > 0 : \quad \forall x \in A, \quad x \leq -M_N \quad f(x) \leq -N.$$

Usando la retta reale estesa $\overline{\mathbb{R}}$, le definizioni sopra scritte possono essere unificate in un'unica definizione. Occorre dare la nozione di intorno di $+\infty$ e $-\infty$ e di punto di accumulazione per un insieme non limitato superiormente o inferiormente. Ricordiamo che:

- Per ogni $M \in \mathbb{R}^+$, un intorno di $+\infty$ di estremo inferiore M, è l'intervallo aperto e superiormente illimitato

$$\boxed{I_M(+\infty) =]M, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x > M\}}.$$

Analogamente,

- intorno di $-\infty$ di estremo superiore $-M$ è

$$\boxed{I_M(-\infty) =]-\infty, -M[= \{x \in \mathbb{R} : x < -M\}}.$$

Definizione 7.19. *Sia $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Diciamo che*

- $+\infty$ *è d'***accumulazione** *per E se*
 per ogni $M > 0$ si ha $E \cap]M, +\infty[\neq \emptyset$;

- $-\infty$ *è d'***accumulazione** *per E se*
 per ogni $M > 0$ si ha $E \cap]-\infty, -M[\neq \emptyset$.

Esempio 7.20. Sia $E = \mathbb{N}$ (è costituito solo da punti isolati.)
L'unico punto di accumulazione per $\mathbb{N}$ è $+\infty$: in ogni suo intorno ci sono dei numeri naturali.
Analogamente, i punti di accumulazione per $\mathbb{Z}$ sono $+\infty$ e $-\infty$.

Possiamo ora riformulare la nozione di limite di tutti i vari casi trattati sopra in un'unica definizione.

Definizione 7.21. *Sia $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Siano $L, x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$, con x_0 punto di accumulazione per A. Si ha $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow$*

$$\forall \text{ intorno } J \text{ di } L, \exists \text{ un intorno } I \text{ di } x_0 \text{ tale che } \forall\, x_0 \neq x \in I \cap A, \quad \text{allora } f(x) \in J.$$

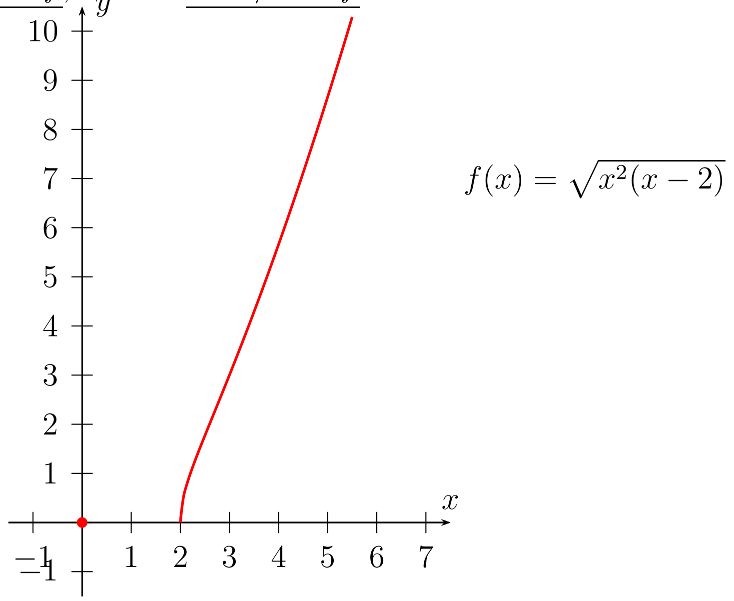
Nella definizione di limite 7.21 è essenziale "potersi avvicinare" indefinitamente al punto di accumulazione x_0 (rispetto al quale si fa il limite) dell'insieme A di definizione di f, rimanendo sempre in A.

Esempio 7.22. Consideriamo $f(x) = \sqrt{x^2(x-2)}$.
Risulta $A = \text{dom} f = \{0\} \cup [2, +\infty[$.

- ▶ Ha senso calcolare $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x^2(x-2)}$.

- ▶ NON ha senso calcolare $\lim_{x \to 0} \sqrt{x^2(x-2)}$, poichè non ci si può avvicinare a $x = 0$, rimanendo nel dom$f$.

▶ Si osservi che $\underline{0 \in \mathrm{dom} f}$, mentre $\underline{+\infty \notin \mathrm{dom} f}$.



7.3 Limiti e successioni

Vediamo ora un teorema che collega fra loro i limiti di funzioni e quelli di successioni.

Teorema 7.23. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, f una funzione definita in A e x_0 un punto di accumulazione per A. Si ha*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

se e solo se, per ogni successione $\{x_n\}$ a valori in $A \setminus \{x_0\}$ e convergente a x_0, risulta

$$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = L.$$

Dimostrazione. Ci limitiamo al caso L finito.

(I) Supponiamo per ipotesi che $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ e sia $\{x_n\}$ una qualsiasi successione a valori in $A \setminus \{x_0\}$ e convergente a x_0.

Da $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, otteniamo che

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 \,:\, \forall x \in A, 0 < |x - x_0| \leq \delta \quad \Rightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon.$$

D'altra parte, da $x_n \to x_0$, otteniamo

$$\forall \tilde{\varepsilon} > 0 \quad \exists \nu > 0 \,:\, \forall n \geq \nu \quad \Rightarrow \; 0 < |x_n - x_0| \leq \tilde{\varepsilon}.$$

Allora per $\tilde{\varepsilon} = \delta$, otteniamo che

$$\exists \nu > 0 \,:\, \forall n \geq \nu \quad \Rightarrow \; 0 < |x_n - x_0| \leq \delta.$$

E quindi $|f(x_n) - L| \leq \varepsilon$, da cui $\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = L$.

(II) Supponiamo ora che $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = L$ per ogni successione $\{x_n\}$ a valori in $A\setminus\{x_0\}$ e convergente a x_0. Dimostriamo che $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$.

Se per assurdo non fosse $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, allora

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists\, x \in A \,:\, 0 < |x - x_0| \leq \delta \quad \Rightarrow |f(x) - L| > \varepsilon.$$

Preso $\delta = \frac{1}{n}$ con $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, si trova così un punto $x_n \in A\setminus\{x_0\}$ tale che $|x_n - x_0| \leq \frac{1}{n}$ e $|f(x_n) - L| > \varepsilon$.

La successione $\{x_n\}$ converge a x_0, ma non si ha $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = L$. Assurdo.

□

Osservazione 7.24. Il teorema di cui sopra scritto può essere usato per dimostrare che una funzione non ha limite per x che tende a x_0: basterà determinare due successioni $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ ambedue convergenti a x_0 e tali che

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = l \qquad \lim_{n\to+\infty} f(y_n) = L, \quad l \neq L.$$

Si consideri, per esempio, la funzione

$$f(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

definita per $x \neq 0$. Mostriamo che non esiste il limite, per $x \to 0$, di $f(x)$. Basta considerare le due successioni

$$x_n = \frac{1}{2n\pi}, \quad y_n = \frac{1}{(2n+1)\pi},$$

entrambe convergenti a zero. Si ha

$$f(x_n) = \cos(2n\pi) = 1, \quad f(y_n) = \cos(2n+1)\pi = -1$$

cosicchè il limite $\lim_{n\to+\infty} f(x)$ non esiste.

Il Teorema 7.23 è molto importante, perchè fa capire che la teoria dei limiti di successioni occupa un posto essenziale anche nella teoria generale dei limiti: i limiti di successioni, proprio per il Teorema 7.23, possono essere presi come base per tutta la teoria dei limiti, almeno finchè ci si muove nell'ambito di spazi metrici, in cui sia definita una distanza.

È immediato, sia usando la definizione, sia usando il teorema sopra, estendere i risultati del Capitolo 5 ai limiti di funzioni. In particolare valgono:

- il **teorema del confronto**: sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e siano $f, g : A \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione di A. Supponiamo che f e g ammettano limite per $x \to x_0$ e che $f \leq g$ in A (ossia $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in A$). Allora

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \leq \lim_{x\to x_0} g(x).$$

- il **teorema dei due carabinieri**: sia $A \subseteq \mathbb{R}$ e siano $f, g, h : A \to \mathbb{R}$ e sia $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ un punto di accumulazione di A. Supponiamo che per ogni $x \in A$ si abbia
$$h(x) \leq f(x) \leq g(x).$$
Se $\lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = L$, allora anche f ammette limite per $x \to x_0$ e si ha $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$.

- I risultati concernenti le operazioni sui limiti continuano a valere. In particolare si ha:
$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to x_o} (f(x) + g(x)) = \lim_{x\to x_o} f(x) + \lim_{x\to x_o} g(x),\\
&\lim_{x\to x_o} \lambda f(x) = \lambda \lim_{x\to x_o} f(x),\\
&\lim_{x\to x_o} f(x)g(x) = \lim_{x\to x_o} f(x) \lim_{x\to x_o} g(x),\\
&\lim_{x\to x_o} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to x_o} f(x)}{\lim_{x\to x_o} g(x)},
\end{aligned}$$
non appena esistono i limiti a secondo membro e quando le operazioni che compaiono al secondo membro non comportino l'insorgere di forme indeterminate.

Valgono poi ancora i seguenti teoremi.

Teorema 7.25 (Unicità)**.** *Sia x_0 di accumulazione per* dom$f$. *Se $f(x) \to L$ e $f(x) \to L'$ per $x \to x_0$, allora $L = L'$.*

Dimostrazione. Dimostriamo per semplicità il teorema nel caso $x_0, L, L' \in \mathbb{R}$.
Supponiamo $L \neq L'$. Sia $\frac{|L-L'|}{2} > \varepsilon > 0$. Si ha

1. $\exists\, \delta > 0$: $\forall\, x_0 \neq x \in \mathrm{dom} f$ con $|x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon$.

2. $\exists\, \delta' > 0$: $\forall\, x_0 \neq x \in \mathrm{dom} f$ con $|x - x_0| \leq \delta' \Rightarrow |f(x) - L'| \leq \varepsilon$.

Quindi $\forall\, x \neq x_0$ con $|x_0 - x| \leq \min\{\delta, \delta'\}$ si ha
$$|L - L'| \leq |L - f(x)| + |f(x) - L'| \leq 2\varepsilon < |L - L'|.$$
Assurdo.

□

Osservazione 7.26. Usando la definizione di limite mediante intorni, si può ottenere semplicemente la dimostrazione del teorema sopra in tutti i casi.

Definizione 7.27. *Sia $E \subseteq \mathbb{R}$ e sia $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione. Diciamo che f è limitata in E se*
$$\exists\, M > 0 : \quad |f(x)| \leq M \quad \forall\, x \in E.$$

Conseguenza immediata della definizione di limite sono i seguenti teoremi.

Teorema 7.28 (Limitatezza locale)**.** *Se la funzione f ha limite finito in x_0, allora esiste un intorno U di x_0 tale che f è limitata in $U \setminus \{x_0\} \cap \operatorname{dom} f$.*

Teorema 7.29 (Permanenza del segno)**.** *Se $\lim_{x\to x_o} f(x) = L > 0$, allora esiste un intorno U di x_0 tale che*

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in U \setminus \{x_0\} \cap \operatorname{dom} f.$$

Dimostrazione. Dalla definizione di limite, sia J un intorno di L costituito solo da numeri positivi (ad esempio $J = J_L(L)$ se L è finito, $J = J_0(+\infty)$ se $L = +\infty$). Per la definizione di limite, esisterà un intorno U di x_0, tale che per ogni $x \in U \setminus \{x_0\}$ si ha $f(x) \in J$, e dunque $f(x) > 0$. □

7.4 Limite destro e sinistro

Definizione 7.30. *Sia $f : A \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in \mathbb{R}$. Si supponga che x_0 sia di accumulazione per l'insieme $A\cap]x_0, +\infty[$. Se esiste il limite per $x \to x_0$ della restrizione di f a $A\cap]x_0, +\infty[$, allora tale valore è detto LIMITE DESTRO di f in x_0, e lo si indica con il simbolo*

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x).$$

Osservazione 7.31. La Definizione 7.30 può venire riscritta con il linguaggio degli intorni. Si faccia però attenzione a prendere *intorni 'destri'* di x_0 (cioè insiemi del tipo $I\cap]x_0, +\infty[$ con I intorno di x_0). Per esempio per $L \in \mathbb{R}$, possiamo dire che

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = L$$

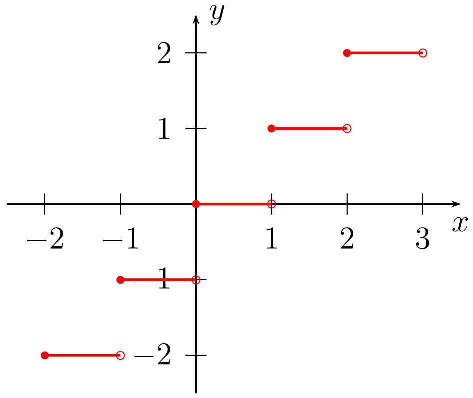
se e soltanto se

$$\forall \varepsilon > 0 \;\exists\, \delta > 0 \;:\; \forall x \in\,]x_0, x_0 + \delta[\cap \operatorname{dom} f \;\Rightarrow\; |f(x) - L| \le \varepsilon.$$

Osservazione 7.32. Allo stesso modo si definisce il *LIMITE SINISTRO di f in x_0, che si denota con $\lim\limits_{x\to x_0-} f(x)$ prendendo la restrizione di f a* $\operatorname{dom} f\cap]-\infty, x_0[$.

Esempio 7.33. La funzione **parte intera** $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = [x]$, NON ammette limite per $x \to m$, con $m \in \mathbb{Z}$, ma si ha

$$\lim_{x\to m^-} [x] = m - 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to m^+} [x] = m.$$



La seguente proposizione fornisce il legame fra la nozione di limite e limiti destro e sinistro.

Proposizione 7.34.

$$(I) \quad \lim_{x\to x_0} f(x) = L$$
$$\Updownarrow$$
$$(II) \quad \lim_{x\to x_0^+} f(x) = L \quad \boxed{e} \quad \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L.$$

Dimostrazione. $(I) \Rightarrow (II)$: fissato ϵ (oppure $M > 0$ se il limite è infinito) il δ che va bene nella definizione di limite va bene anche nelle definizioni di limite destro e sinistro.

$(II) \Rightarrow (I)$: fissato ϵ (oppure $M > 0$ se il limite è infinito) si trova δ' (rispettivamente δ'') tale che se $x \in]x_0 - \delta', x_0[\cap \operatorname{dom} f$ (rispettivamente $x \in]x_0, x_0 + \delta''[\cap \operatorname{dom} f$), allora $|f(x) - L| \leq \epsilon$ (rispettivamente $|f(x)| \geq M$.) Prendendo $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$, questo va bene nella definizione di limite. ☐

7.5 Limiti di funzioni monotone

Come le successioni, anche le funzioni monotone hanno uno speciale comportamento rispetto all'operazione di limite.

Definizione 7.35. *Una funzione f si dice*

(i) monotona crescente se

$$\forall\, x, y \in \operatorname{dom} f \; : \quad x \leq y \quad \Rightarrow \quad f(x) \leq f(y);$$

(ii) monotona decrescente se

$$\forall\, x, y \in \operatorname{dom} f \; : \quad x \leq y \quad \Rightarrow \quad f(x) \geq f(y);$$

(ii) strettamente crescente o strettamente decrescente se le disuguaglianze sopra sono strette.

Teorema 7.36. *Sia f una funzione crescente e sia x_0 punto di accumulazione per* $\operatorname{dom} f$. *Allora f ha limiti sinistro e destro finiti per $x \to x_0$ e si ha*

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \sup\{f(x) : x \in \operatorname{dom} f, \quad x < x_0\}$$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \inf\{f(x) : x \in \operatorname{dom} f, \quad x > x_0\}.$$

In modo analogo il teorema vale per funzioni decrescenti.

Osservazione 7.37. Il teorema precedente è di grande utilità nel calcolo di limiti di funzioni monotone. Per esempio:

1. $\lim_{x \to x_0} \log x = \log x_0$;

2. $\lim_{x \to x_0} A^x = A^{x_0}$.

7.6 Funzioni continue

Definizione 7.38. *Una funzione f è CONTINUA in $x_0 \in \operatorname{dom} f$ se*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap \operatorname{dom} f \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

La definizione precedente esprime rigorosamente il fatto che f è continua se i suoi valori variano con continuità, cioè se a "piccole" variazioni della variabile indipendente x vicino a x_0 corrispondono "piccole" variazioni del valore $f(x)$.

Con la terminologia degli intorni, diciamo che f è continua in x_0, se per ogni intorno J di $f(x_0)$ esiste un intorno U di x_0 tale che, per ogni $x \in U \cap \operatorname{dom} f$, si abbia

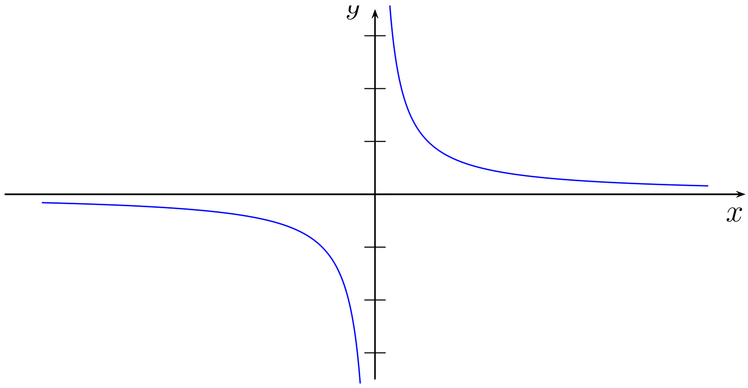
$$f(x) \in J,$$

o, in altre parole,

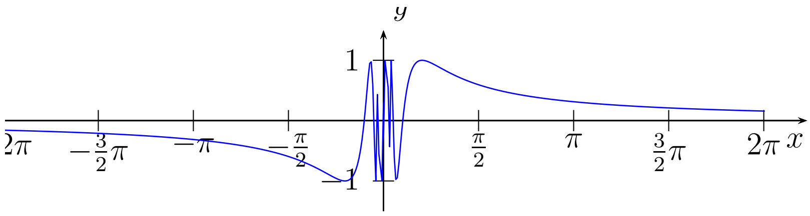
$$f(U \cap \operatorname{dom} f) \subseteq J.$$

Definizione 7.39. *Una funzione f è detta CONTINUA se è continua in ogni punto del suo dominio.*

Esempio 7.40. $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ è continua (con dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$):



Esempio 7.41. $f : x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ è continua (con dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$):



Osservazione 7.42. Dalla definizione di continuità in un punto x_0, si ha che se x_0 è un punto isolato di $\operatorname{dom} f$, allora f è continua in x_0.
Infatti, $\exists \delta > 0$ tale che $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap \operatorname{dom} f = \{x_0\}$. Tale δ verifica la definizione di continuità per ogni $\varepsilon > 0$.
Dunque, ogni funzione che ha punti isolati nel dominio, risulta sempre continua in tali punti.

Il concetto di limite e continuità sono legati dalla seguente proposizione che caratterizza la continuità, nei punti di accumulazione del dominio, tramite il limite.

Proposizione 7.43. *Sia $x_0 \in \operatorname{dom} f$. Se x_0 è un punto di accumulazione per $\operatorname{dom} f$, allora:*

$$f \text{ è continua in } x_0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Si hanno gli stessi teoremi enunciati per i limiti di funzioni anche per la continuità.
In particolare:

Teorema 7.44. *Somma, differenza, prodotto di funzioni f e g continue in x_0 sono continue in x_0. Se $g \neq 0$ in un intorno di x_0, allora anche $\frac{f}{g}$ è continua in x_0.*

Osservazione 7.45. Dal teorema sopra segue immediatamente che esistono numerose classi di funzioni continue, per esempio:

- i **polinomi** sono funzioni continue in ogni $x_0 \in \mathbb{R}$;
- le **funzioni razionali** sono continue in ogni punto del loro dominio.

La continuità è una proprietà stabile per composizione di funzioni.

Teorema 7.46 (Continuità della composizione)**.** *Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Siano $f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A$. Se f è continua in x_0 e g è continua in $f(x_0) \in B$, allora $g \circ f$ è continua in x_0.*

Dimostrazione. Per la continuità di g in $f(x_0)$: per ogni U intorno di $g(f(x_0))$ esiste un intorno W di $f(x_0)$ tale che $g(W \cap B) \subseteq U$.

Per la continuità di f in x_0: in corrispondenza di W esiste un intorno V di x_0 tale che $f(V \cap A) \subseteq W \cap B$ e quindi

$$(g \circ f)(V \cap A) \subseteq U.$$

Ne segue che $g \circ f$ è continua in x_0. □

Osservazione 7.47. Come conseguenza immediata di questo teorema si ha che, se $f(x)$ è continua in A, allora le funzioni

$$\sin(f(x)), \quad \cos(f(x)), \quad |f(x)|, \quad a^{f(x)}, \quad \log_a f(x) \quad (f(x) > 0), \cdots$$

sono anch'esse continue in A.

Il teorema di composizione vale, più in generale, nella seguente forma:

Teorema 7.48 (Composizione di limiti)**.** *Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Siano $f : A \to B$, $g : B \to \mathbb{R}$ e $x_0, y_0, L \in \overline{\mathbb{R}}$, tali che si abbia*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0, \quad \lim_{y \to y_0} g(y) = L.$$

Se è verificata una delle due condizioni seguenti:

(i) $\forall x \in A \setminus \{x_0\}$ *si ha* $f(x) \neq y_0$*;*

(ii) $y_0 \in B$ *e* g *è continua in* y_0*,*

allora

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = L.$$

Esempio 7.49. Il teorema sopra si applica nell'ipotesi (i) a limiti del tipo

$$\lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1-x^2}{x}}.$$

Infatti

$$\lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1-x^2}{x}} = \lim_{x \to x_0} g\left(f(x)\right)$$

con $x_0 = +\infty$, $f(x) = \frac{1-x^2}{x}$ e $g(y) = e^y$. Osserviamo che

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1-x^2}{x} = -\infty := y_0 \quad (f(x) \neq y_0) \quad \text{e} \quad \lim_{y\to y_0} g(y) = \lim_{y\to-\infty} e^y = 0 := L.$$

Ora applicando il teorema sopra abbiamo che

$$\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1-x^2}{x}} = L = 0.$$

Esempio 7.50. Calcoliamo il limite

$$\lim_{x\to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Ragioniamo nel modo seguente:

1. effettuiamo una sostituzione, ponendo $x = \frac{1}{y}$;
2. calcoliamo $\lim\limits_{y\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{y}\right)^y = e$ (limite notevole).

Come giustifichiamo questo procedimento? Usiamo il Teorema 7.48. Osserviamo che il limite che dobbiamo calcolare si può vedere come il risultato della composizione

$$\lim_{x\to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to x_0} g\left(f(x)\right)$$

con $x_0 = 0^+$, $f(x) = y = \frac{1}{x}$ (che vuol dire fare la sostituzione $x = \frac{1}{y}$) e $g(y) = (1+\frac{1}{y})^y$. Applichiamo il Teorema 7.48:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty := y_0, \quad \lim_{y\to y_0} g(y) = \lim_{y\to+\infty} \left(1+\frac{1}{y}\right)^y = e := L.$$

Dal teorema sopra otteniamo che

$$\lim_{x\to 0^+} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to x_0} g\left(f(x)\right) = L = e.$$

Esempio 7.51. Dall'esempio sopra, più in generale, segue che

$$\lim_{x\to x_0} \left[1+\frac{1}{f(x)}\right]^{f(x)} = e$$

se $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = +\infty$.

Diamo ora la caratterizzazione della continuità usando le successioni.

Teorema 7.52 (Continuità per successioni)**.** *f è continua in x_0* $\Leftrightarrow$

$$\forall \{x_n\} \subset \mathrm{dom} f \quad \textit{con} \quad x_n \to x_0 \quad \textit{si ha} \quad \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Esempio 7.53. Applicando il Teorema 7.52, si può provare che una funzione f NON è continua in x_0 trovando una successione $\{x_n\} \subset \operatorname{dom} f$ con $x_n \to x_0$ e tale che $\lim_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(x_0)$.

Sia, ad esempio, f definita da $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$

Dimostriamo che tale funzione f non è continua in 0.

Scegliamo la successione $\{x_n\}$ con $x_n = \frac{1}{n}$ $(x_n \to 0)$. Si trova $\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \neq f(0)$. Quindi f NON È CONTINUA in $x_0 = 0$.

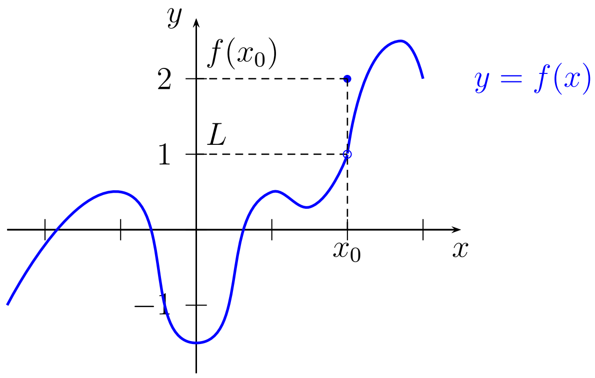
7.7 Punti di discontinuità

In questa sezione classifichiamo i punti di discontinuità di una funzione f, ossia i punti in cui una funzione f non risulta continua. Esistono 4 casi diversi di tipi di discontinuità:

- discontinuità eliminabile;
- punti di infinito;
- discontinuità di salto;
- discontinuità di seconda specie.

Tali discontinuità si classificano in questo modo:

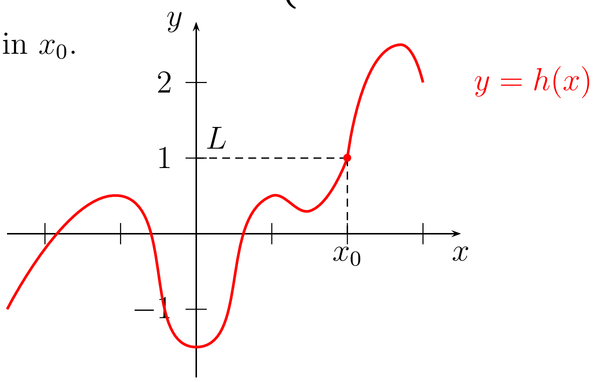
$\boxed{1}$ Se $\lim_{x\to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}$ con $L \neq f(x_0)$, allora si dice che la funzione f presenta una *DISCONTINUITÀ ELIMINABILE in* x_0.



In questa circostanza, la funzione definita da

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in \mathrm{dom} f,\ x \neq x_0 \\ L & \text{se } x = x_0. \end{cases}$$

è continua in x_0.



La funzione h sopra definita consente di "eliminare" la discontinuità della funzione f.

Esempio 7.54. La funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ ha in $x_0 = 0$ una discontinuità eliminabile. Infatti,

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 \neq f(0) = 1.$$

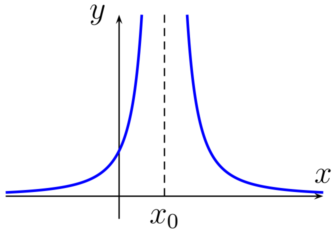
Si osservi che si può costruire la funzione

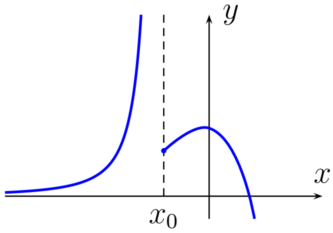
$$h(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

che è continua.

$\boxed{2}$ Se $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$, oppure *se esistono i limiti destro e sinistro e (almeno) uno di questi è infinito* (∞), allora si dice che x_0 è *PUNTO DI INFINITO*.

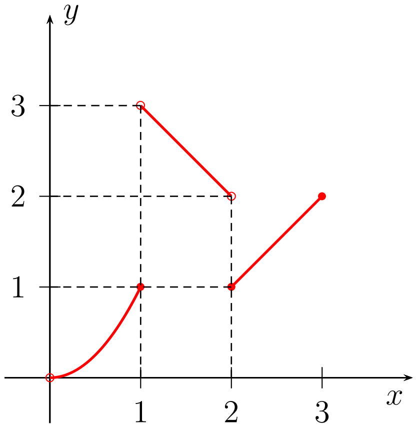
Ad esempio:





$\boxed{3}$ Se i *limiti destro* e *sinistro* esistono in $\mathbb{R}$ ma sono **differenti** si dice che x_0 è *PUNTO DI SALTO*.

Ad esempio:



$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } 0 < x \leq 1 \\ 4 - x & \text{se } 1 < x < 2 \\ x - 1 & \text{se } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Osservazione 7.55. Nell'esempio sopra la funzione f è monotona a tratti: l'esempio tipico di funzioni che hanno salti è dato, appunto, dalle funzioni $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, monotone nell'intervallo chiuso e limitato $[a, b]$. Infatti, per ogni $x_0 \in (a, b)$, esistono finiti i limiti

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x), \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x).$$

Ad esempio, se f è crescente, si ha

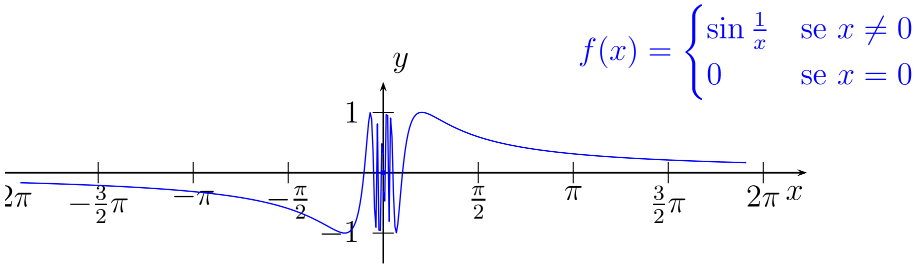
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \leq f(x_0) \leq \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

È interessante ricordare inoltre le seguenti proprietà delle funzioni monotone:

- una funzione monotona su $[a, b]$ può avere al massimo una infinità numerabile di punti di discontinuità.
- Se una funzione monotona, definita in un intervallo, assume tutti i valori compresi fra l'inf e in sup, allora è continua.

$\boxed{4}$ Se (almeno) uno dei due limiti destro o sinistro non esiste, allora si dice che x_0 presenta una *DISCONTINUITÀ DI SECONDA SPECIE*.

Ad esempio:



7.8 Prime proprietà delle funzioni continue

Esattamente come nel caso dei limiti di funzioni, valgono i seguenti due teoremi: la differenza in questo caso è che le stime ottenute valgono in tutto l'intorno completo U di x_0, non privato del punto x_0.

Teorema 7.56 (Limitatezza locale)**.** *Se la funzione f è continua in x_0, allora esiste un intorno U di x_0 tale che f è limitata in $U \cap \operatorname{dom} f$.*

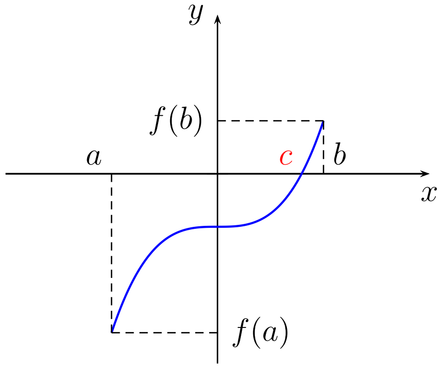
Teorema 7.57 (Permanenza del segno)**.** *Se f è continua in x_0 e $f(x_0) > 0$, allora esiste un intorno U di x_0 tale che $f(x) > 0$ in $U \cap \operatorname{dom} f$.*

Analogamente, se $f(x_0) > L$, allora esiste un intorno U di x_0 tale che $f(x) > L$ in $U \cap \operatorname{dom} f$.

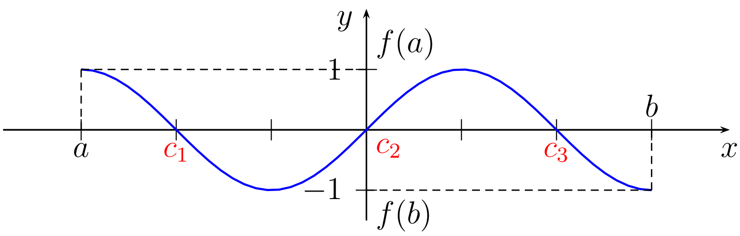
7.9 Funzioni continue su un intervallo

In questa sezione otteniamo i risultati più importanti relativi alle funzioni continue definite su un intervallo. Indicheremo con I un generico intervallo, i cui estremi possono essere finiti o non, e che possono appartenere o non appartenere a I. In alcuni casi sarà necessario che l'intervallo I sia chiuso e limitato, e allora lo indicheremo con $[a, b]$.

Teorema 7.58 (di Bolzano o 'degli zeri')**.** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(a)f(b) < 0$. Allora esiste almeno un punto $c \in]a, b[$ tale che $f(c) = 0$.*



Il punto c del teorema non è in generale unico:



Dal teorema degli zeri, segue che, se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è una funzione continua in $[a, b]$ e preso $t \in \mathbb{R}$, se esistono due punti $x_1, x_2 \in [a, b]$ con $f(x_1) < t$ e $f(x_2) > t$, allora esiste ξ tale che $x_1 \leq \xi \leq x_2$ per cui $f(\xi) = t$.

Definizione 7.59. *Definiamo:*

1. *Estremo superiore di f, l'estremo superiore dell'immagine di f, ossia*
$$\sup f = \sup\{f(x) : \quad x \in \operatorname{dom} f\}.$$
2. *Estremo inferiore di f, l'estremo inferiore dell'immagine di f, ossia*
$$\inf f = \inf\{f(x) : \quad x \in \operatorname{dom} f\}.$$
3. *Massimo della funzione f, il massimo fra i valori assunti dalla funzione, ossia*
$$\max f = \max\{f(x) : \quad x \in \operatorname{dom} f\}.$$
Un punto x_0 in cui $f(x_0) = \max f$ si dice punto di massimo per f e quindi vale
$$f(x) \leq f(x_0) \quad \forall x \in \operatorname{dom} f.$$
4. *Minimo della funzione f, il minimo fra i valori assunti dalla funzione, ossia*
$$\min f = \min\{f(x) : \quad x \in \operatorname{dom} f\}.$$
Un punto x_0 in cui $f(x_0) = \min f$ si dice punto di minimo per f e quindi vale
$$f(x_0) \leq f(x) \quad \forall x \in \operatorname{dom} f.$$

Si ha allora la seguente proposizione.

Proposizione 7.60. *Una funzione continua in un intervallo I assume tutti i valori compresi tra* $\inf_I f$ *e* $\sup_I f$.

Dimostrazione. Sia t un numero compreso fra $\inf_I f$ e $\sup_I f$. Esisteranno due punti x_1 e x_2 in I tali che

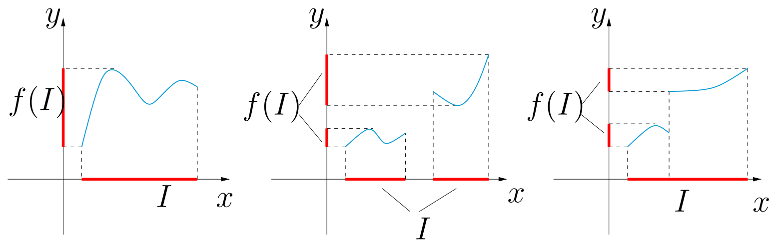
$$\inf_I f \le f(x_1) < t < f(x_2) \le \sup_I f,$$

e quindi esiste un punto ξ tale che $f(\xi) = t$. □

Dal teorema sopra segue che l'immagine $f(I)$ è costituita dall'intervallo aperto $(\inf_I f, \sup_I f)$ più, eventualmente, uno o ambedue gli estremi. Si ha dunque il seguente teorema.

Teorema 7.61 (Dei valori intermedi)**.** *Sia I intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ continua. Allora $f(I)$ un intervallo.*

Esempio 7.62. Confrontare le ipotesi e la tesi del Teorema 7.61 con i seguenti esempi:



Veniamo ora ad un risultato importantissimo che risponde al problema dell'esistenza o meno di massimi e minimi per funzioni continue.

Teorema 7.63 (di Weierstrass). *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$* **continua**. *Allora f ha massimo e minimo.*

Dimostrazione. Vediamo che il problema $\min_{[a,b]} f$ ammette soluzione (il caso del massimo è analogo). Sia $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [a, b]$ una successione minimizzante per f su $[a, b]$, cioè tale che

$$f(x_n) \to \inf_{[a,b]} f.$$

Una tale successione esiste sempre, grazie alla definizione di estremo inferiore di un insieme.
Infatti, se $\inf_{[a,b]} f = -\infty$, basta $\forall n \in \mathbb{N}$, considerare $x_n \in [a, b]$ tale che $f(x_n) < -n$.
Se $\inf_{[a,b]} f \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^+$ scegliamo $x_n \in [a, b]$ tale che

$$\inf f \le f(x_n) < \inf f + \frac{1}{n}.$$

In entrambi i casi, si ha che $\lim_n f(x_n) = \inf f$.
Essendo $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una successione limitata, per il teorema di Bolzano Weiestrass, essa ammette una sottosuccessione $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ tale che $x_{n_k} \to x$ per qualche $x \in \mathbb{R}$. Ma, essendo

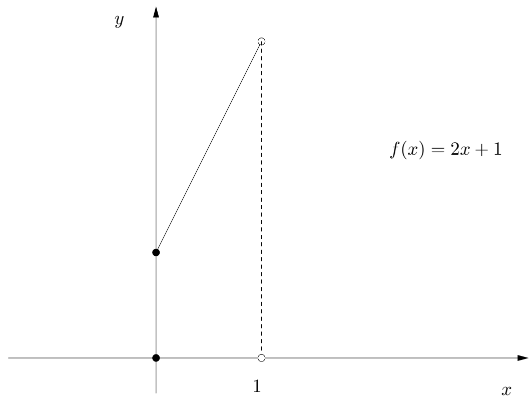
$[a, b]$ chiuso, tale limite x appartiene all'intervallo $[a, b]$ (infatti da $a \leq x_{n_k} \leq b$ per ogni n_k segue che $a \leq x \leq b$).
Essendo f continua, dalla caratterizzazione della continuità tramite successioni, si ha $f(x_{n_k}) \to f(x)$, da cui

$$f(x) = \lim_{k \to +\infty} f(x_{n_k}) = \inf_{[a,b]} f.$$

Dunque x è un punto di minimo di f su $[a, b]$, e la dimostraz ione è conclusa. ∎

Osservazione 7.64. Tutte le ipotesi del teorema sono fondamentali per la validitá della affermazione.

1. Se consideriamo ad esempio $I = [0, 1[$ e $f(x) = 2x+1$ (funzione chiaramente continua suul'intervallo non chiuso $I = [0, 1[$), abbiamo subito che f non ammette massimo su I ma ammette invece minimo. Infatti il minimo è 1 ed è assunto in $x = 0$. Invece f "tende" ad assumere il suo valore massimo vicino a $x = 1$, che però non appartiene a I.

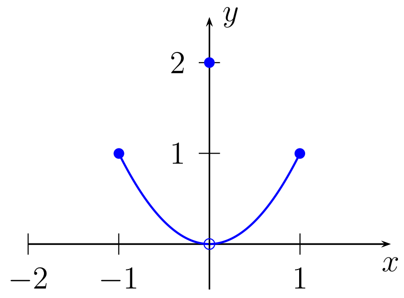


2. Se I è illimitato, può capitare che f non assuma il valore massimo perché tende ad assumerlo in punti che "*vanno all'infinito*" come nel caso di $f(x) = \arctan x$, definita su $I = \mathbb{R}$.

3. Se f fosse discontinua, potrebbe verificarsi una situazione analoga alla seguente.

   Sia
   $$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{per } x \in [-1, 1] \setminus \{0\}, \\ 2 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

   f **non** ha minimo, e $\inf f = 0$. $\max f = 2$ e 0 l'unico *punto di massimo.*



Il risultato seguente è un corollario immediato del teorema di Weiestrass.

Corollario 7.65. *Ogni funzione continua su un intervallo chiuso e limitato è limitata.*

7.10 Funzioni continue invertibili

Sia $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione continua e iniettiva e sia $f^{-1} : f(A) \to \mathbb{R}$ la sua inversa. In generale, non ci si può aspettare che f^{-1} sia ancora continua.

Per esempio, sia $A = [0,1] \cup (2,3]$ (unione di due intervalli) e sia

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0,1] \\ x-1 & \text{se } x \in (2,3]. \end{cases}$$

Allora f è continua in A e la sua inversa

$$f^{-1} : [0,2] \to \mathbb{R}, \quad f^{-1}(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0,1] \\ x+1 & \text{se } x \in (1,2]. \end{cases}$$

è però una funzione discontinua in $x = 1$.

Notiamo che A non è un intervallo, ma è l'unione di due intervalli.

Se invece $A = I$ è un intervallo, la situazione cambia.

Sia f una funzione definita su un intervallo I e ivi continua. Sappiamo che per poter invertire la funzione occorre che f sia iniettiva (e suriettiva). Poiché f è continua su I, grazie al teorema dei valori intermedi sappiamo che la sua immagine $f(I) = J$ è un intervallo, e se vogliamo che sia invertibile essa deve essere strettamente monotona. Tale proprietà è garantita dalla seguente proposizione.

Proposizione 7.66. *Sia I un intervallo e sia f una funzione continua su I. Allora f è invertibile $\iff$ f è strettamente monotona.*

L'ipotesi I intervallo è essenziale in questa proposizione, infatti la funzione

$$f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{se } x \in [0,1] \\ x & \text{se } x \in (2,3]. \end{cases}$$

è continua, invertibile ma non è monotona.

Se f è strettamente monotona, allora la funzione inversa $f^{-1} : J \to I$ è ancora monotona, con una monotonia dello stesso tipo di f. Ci chiediamo ora quando f^{-1} risulta anche continua. La risposta dipende dal seguente risultato.

Proposizione 7.67. *Sia g una funzione reale monotona e definita su un intervallo J. Allora*

$$g \text{ è continua} \Leftrightarrow \text{la sua immagine } g(J) \text{ è un intervallo}$$

ossia,

$$\Leftrightarrow \quad g \text{ assume tutti i valori compresi fra } \inf \text{ e } \sup.$$

Da questa proposizione segue allora il seguente teorema.

Teorema 7.68. *Sia f è una funzione continua e invertibile definita su un intervallo I. Allora f^{-1} è continua.*

Dimostrazione. Dai risultati precedenti si ha che f è strettamente monotona e ha per immagine un intervallo $J = f(I)$. Allora la sua inversa $f^{-1} : J \to I$ è strettamente monotona, è definita su un intervallo, è suriettiva su I, cioè la sua immagine è un intervallo. Allora, per la Proposizione 7.67 applicata a $g = f^{-1}$, si ha che f^{-1} è continua. □

Osservazione 7.69. Dal Teorema 7.68 sopra segue immediatamente che sono continue le seguenti funzioni $\log x, \arcsin x, \arccos x, \arctan x$, inverse delle funzioni e^x, $\sin x$ (ristretto all'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$), $\cos x$ (ristretto all'intervallo $[0, \pi]$) e $\tan x$ (ristretta all'intervallo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$) , rispettivamente.

7.11 Funzioni uniformemente continue

Introduciamo in questa sezione il concetto di uniforme continuità.

Definizione 7.70. *Una funzione f si dice uniformemente continua nel suo dominio* dom$f$ *se*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \forall x, x_0 \in \mathrm{dom} f \quad |x - x_0| \le \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \le \varepsilon.$$

Qual'è la differenza fra la continuità e l'uniforme continuità? Riscriviamo le due definizioni:

(a) f continua in dom$f$ se:

$$(7.1) \quad \forall x_0, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 : \forall x \in \mathrm{dom} f \quad |x - x_0| \le \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \le \varepsilon.$$

(b) f è uniformemente continua se

$$(7.2) \qquad \forall\varepsilon > 0, \quad \exists\delta > 0 : \forall x, x_0 \in \mathrm{dom} f \quad |x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon.$$

La somiglianza fra le due definizioni esiste, ma fra le due vi è una sottile (e significativa) differenza: in (7.1) il δ dipende da x_0 e $\varepsilon > 0$, ossia $\delta = \delta(x_0, \varepsilon)$, mentre nella (7.2) il δ dipende solo da ε, ossia $\delta = \delta(\varepsilon)$.

L'uniforme continuità è una condizione più forte della continuità: una funzione uniformemente continua ha il grafico che non può avere degli "sbalzi" troppo grossi.

Inoltre, mentre il concetto di continuità si può dare punto per punto, il concetto di uniforme continuità no: l'uniforme continuità è un concetto globale.

Esempio 7.71. Consideriamo la funzione $f(x) = x^2$ su $(0, 1)$. Dimostriamo che f è uniformemente continua. Infatti

$$|x^2 - x_0^2| = (x + x_0)|x - x_0| \leq 2|x - x_0|.$$

Allora, preso $\varepsilon > 0$, scegliendo $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ si ha che per $|x - x_0| \leq \delta$, allora $|x^2 - x_0^2| \leq \varepsilon$. Il δ scelto dipende solo da ε e non da x_0, dunque f è uniformemente continua.

Vale che:

f uniformemente continua $\Rightarrow$ f continua

ma non vale il viceversa, ossia esistono funzioni continue ma non uniformemente continue.

Esempio 7.72. La funzione $f = \frac{1}{x}$ su $(0, 1)$ non è uniformemente continua. Per ogni $\varepsilon > 0$ si ha (svolgendo la disequazione)

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| \leq \varepsilon \quad \Leftrightarrow \frac{x_0}{1 + \varepsilon x_0} \leq x \leq \min\left\{1, \frac{x_0}{1 - \varepsilon x_0}\right\}.$$

Ora

$$\frac{x_0}{1 + \varepsilon x_0} = x_0 - \frac{\varepsilon x_0^2}{1 + \varepsilon x_0}, \quad \frac{x_0}{1 - \varepsilon x_0} = x_0 + \frac{\varepsilon x_0^2}{1 - \varepsilon x_0}.$$

Allora, otteniamo che

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| \leq \varepsilon \quad \Leftrightarrow |x - x_0| \leq \delta = \min\left\{\frac{\varepsilon x_0^2}{1 + \varepsilon x_0}, \frac{\varepsilon x_0^2}{1 - \varepsilon x_0}\right\} = \frac{\varepsilon x_0^2}{1 + \varepsilon x_0} = \delta(\varepsilon, x_0).$$

Dunque, il δ trovato non è indipendente da x_0 e quindi la funzione non è uniformemente continua su $(0, 1)$.

Un modo più veloce per ricavare che la funzione $f(x) = \frac{1}{x}$ non è uniformemente continua su $(0, 1)$ è utilizzare il seguente risultato generale.

Teorema 7.73. *Una funzione uniformemente continua in un insieme limitato A è limitata.*

Abbiamo visto che le due definizioni, in generale, sono diverse. Il seguente risultato garantisce che le due nozioni coincidono se il dominio della funzione f è un insieme compatto (chiuso e limitato) di $\mathbb{R}$.

Teorema 7.74 (Teorema di Heine-Cantor)**.** *Sia f una funzione continua su un intervallo $[a, b]$ chiuso e limitato. Allora f è uniformemente continua in $[a, b]$.*

Dimostrazione. Dimostriamo l'asserto del teorema per assurdo. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua ma non uniformemente continua. Allora

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \exists\, x_n, y_n \in [a, b] : \, |x_n - y_n| \leq \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad |f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon.$$

Per il teorema di Bolzano-Weierstrass si trova una sottosuccessione $\{x_{n_k}\}$ tale che $x_{n_k} \to x \in [a, b]$. La corrispondente sottosuccessione di $\{y_n\}$, $\{y_{n_k}\}$, verifica

$$|x - y_{n_k}| \leq |x - x_{n_k}| + |x_{n_k} - y_{n_k}| \leq |x - x_{n_k}| + \frac{1}{n_k} \to 0$$

per $k \to +\infty$.

Allora anche $y_{n_k} \to x \in [a, b]$, e per la continuità di f si ha

$$\lim_{k \to +\infty} f(x_{n_k}) = f(x) = \lim_{k \to +\infty} f(y_{n_k}).$$

Quindi

$$0 = \lim_{k \to +\infty} |f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon > 0.$$

Assurdo. □

Quando un funzione f è definita in un insieme illimitato, per esempio $(0 + \infty)$, un criterio per stabilire se f è uniformemente continua è vedere se ha crescita lineare. Vale infatti la seguente proposizione.

Proposizione 7.75. *Sia $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione uniformemente continua. Allora esitono due costanti A e B tali che*

$$|f(x)| \leq A + Bx.$$

Esempio 7.76. La funzione x^2 su $(0, +\infty)$ non è uniformemente continua.

Una classe di funzioni uniformemente continue è data dalle funzioni Lipschitziane.

Definizione 7.77. *Una funzione f si dice Lipschitziana se esiste una costante $L > 0$ tale che*

$$\forall\, x, y \in \mathrm{dom} f, \quad |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|. \tag{7.3}$$

Se f è Lipschitziana, la minima fra le costanti L che verifica (7.3) *si chiama costante di Lipschitz della funzione f.*

Esempio 7.78. La funzione $f(x) = |x|$ è Lipschitziana di costante $L = 1$. Infatti

$$||x| - |y|| \leq |x - y|.$$

La definizione di Lipschitzianità può essere riscritta anche nella forma seguente:

$$\exists L > 0 : \forall\, x, y \in \text{dom} f,\ x \neq y, \quad \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \leq L, \tag{7.4}$$

ossia la Lipschitzianità richiede che la frazione $\dfrac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}$ sia limitata.

Esempio 7.79. La funzione $f(x) = \sqrt{x}$ non è Lipschitziana su $(0, 1)$. Infatti, scelto $y = 0$ e $x > 0$ si ha

$$\frac{|\sqrt{x} - \sqrt{y}|}{|x - y|} = \frac{1}{\sqrt{x}},$$

che tende a $+\infty$ per $x \to 0^+$.

Proposizione 7.80. *Ogni funzione Lipschitziana è uniformemente continua (dunque continua).*

Dimostrazione. Vogliamo dimostrare che

$$\forall \varepsilon > 0,\, \exists\, \delta = \delta(\varepsilon)\ : \forall\, x, y \in \text{dom} f \quad |x - y| \leq \delta \quad \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Per ipotesi f è Lipschitziana, allora

$$\forall\, x, y \in \text{dom} f, \quad |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

Dunque

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y| \leq \varepsilon \quad \Leftrightarrow |x - y| \leq \frac{\varepsilon}{L} := \delta = \delta(\varepsilon).$$

Abbiamo quindi dimostrato, che, preso $\varepsilon > 0$ arbitrario, esiste $\delta = \delta(\varepsilon) = \dfrac{\varepsilon}{L}$ tale che, per ogni x, y con $|x - y| \leq \delta$ si ha

$$|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

dunque f è uniformemente continua. □

Osservazione 7.81. Attenzione: le funzioni Lipschitziane non esauriscono tutte le funzioni uniformemente continue: la funzione $f(x) = \sqrt{x}$ su $(0, 1)$ non è Lipschitziana ma è uniformemente continua (infatti $|\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq \sqrt{|x - y|}$ e quindi (7.2) vale $\forall \varepsilon > 0$ con $\delta = \varepsilon^2$).

7.12 Infinitesimi

Il concetto di ordine di infinitesimo consente di capire bene quale sia la "parte importante" di una funzione. Come per le successioni diamo la seguente definizione.

Definizione 7.82. *Una funzione f tale che $\lim_{x\to x*} f(x) = 0$ si dice infinitesima per $x \to x* \in \overline{\mathbb{R}}$.*

Notazione: f infinitesimo per $x \to x*$ si scrive $f = o(1)$ per $x \to x*$.

Tutte le funzioni x^α, $\alpha > 0$, sono infinitesime per $x \to 0^+$: per queste funzioni, al variare di α, ce ne sono però alcune "più piccole" di altre. Per esempio, la funzione x^2 è più piccola di x vicino a 0^+ e la relazione $\lim_{x\to 0^+} \frac{x^2}{x} = 0$ consente di dedurre proprio questa proprietà.

Una buona misura per stabilire se una funzione (infinitesima) è "molto più piccola" di un'altra, al punto di essere trascurabile in confronto con l'altra, è appunto stabilire se il quoziente tende a zero.

Come già per le successioni, diamo la seguente definizione.

Definizione 7.83. *Siano f, g due funzioni infinitesime per $x \to x*$, con $g(x) \neq 0$ in un intorno di $x*$ (eventualmente privato del punto $x*$). Si dice che f è un infinitesimo di ordine superiore a g per $x \to x*$, se*

$$\lim_{x\to x*} \frac{f(x)}{g(x)} = 0;$$

In tal caso scriviamo $f = o(g)$ e si legge f è o piccolo di g (o anche che f è trascurabile rispetto a g per $x \to x*$).

Esempio 7.84. $\sin^2 x = o(x)$ dato che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \sin x = 0.$$

Osservazione 7.85 (Algebra degli "o piccoli".). Ricordiamo le principali regole di calcolo sugli "o piccoli".

- $ko(f) = o(f)$
- $o(f) + o(f) = o(f)$
- $o(o(f)) = o(f)$
- $o(f + o(f)) = o(f)$
- $f \cdot o(g) = o(fg)$
- $o(f) \cdot o(g) = o(fg)$

- $f = o(g) \Rightarrow \quad \dfrac{o(f)}{g} = o\left(\dfrac{f}{g}\right).$

In particolare, nel caso in cui le funzioni che compaiono siano potenze positive di $(x - x^*)$ le formule sopra sono molto più leggibili. Nel caso $x^* = 0$, per $\alpha, \beta > 0$ si ha per $x \to 0$

- $ko(x^\alpha) = o(x^\alpha)$
- $o(x^\alpha) + o(x^\alpha) = o(x^\alpha), \quad o(x^\alpha) + o(x^{\alpha+\beta}) = o(x^\alpha)$
- $o(o(x^\alpha)) = o(x^\alpha)$
- $o(x^\alpha + o(x^\alpha)) = o(x^\alpha)$
- $x^\alpha \cdot o(x^\beta) = o(x^{\alpha+\beta})$
- $o(x^\alpha) \cdot o(x^\beta) = o(x^{\alpha+\beta})$
- $\dfrac{o(x^{\alpha+\beta})}{x^\beta} = o(x^\alpha).$

Definizione 7.86. *Siano f, g due funzioni infinitesime per $x \to x^*$, con $f(x), g(x) \neq 0$ in un intorno di x^* (eventualmente privato del punto x^*). Si dice che f è un infinitesimo dello stesso ordine di g per $x \to x^*$, se*

$$\lim_{x \to x^*} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

In tal caso scriviamo $f \sim g$.

Osservazione 7.87. Attenzione: se $f_1 \sim g_1$ e $f_2 \sim g_2$, allora è falso che $(f_1+f_2) \sim (g_1+g_2)$. Per esempio, si ha

$$f \sim f, \quad -f \sim f$$

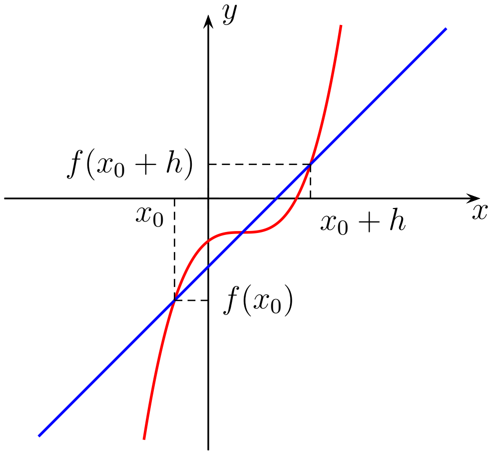
ma non è vero che $(f - f) \sim 2f$.

Capitolo 8

Derivate

8.1 Definizione di derivata e derivate di funzioni elementari

Esempio 8.1 (Motivazioni)**.** Consideriamo il grafico di una data funzione $y = f(x)$.



La retta congiungente i punti di coordinate
$(x_0, f(x_0))$ e $(x_0+h, f(x_0+h))$
ha equazione
$y - f(x_0) = m(x - x_0)$

dove $m = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0}$.

Come si ottiene **il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di** f **in** $(x_0, f(x_0))$?

Vedremo che tale problema è strettamente collegato al concetto di derivata della funzione f nel punto x_0.

Definizione 8.2. *Sia* $f : \mathrm{dom} f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione reale di variabile reale. Dati* $x_1, x_2 \in \mathrm{dom} f$ *con* $x_1 \neq x_2$*, si definisce rapporto incrementale di* f *tra* x_1 *e* x_2 *il quoziente*

$$rf(x_1, x_2) = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}.$$

Osservazione 8.3. Valgono le seguenti implicazioni:

1. f **crescente** $\Leftrightarrow rf \geq 0$.
2. f **strettamente crescente** $\Leftrightarrow rf > 0$.

3. f **Lipschitziana** $\Leftrightarrow rf$ è limitato.

Definizione 8.4. *Siano I un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$, e x_0* ***un punto interno ad I.*** *Se esiste il limite*

$$\lim_{x \to x_0} rf(x, x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \overline{\mathbb{R}},$$

esso viene chiamato derivata di f nel punto x_0 e si indica con $f'(x_0)$.

Se $f'(x_0) \in \mathbb{R}$, allora f si dice derivabile in x_0.

Osservazione 8.5. Esistono altri modi per scrivere $f'(x_0)$. Per esempio:

$$Df(x_0), \quad \frac{d}{dx}f(x_0), \quad \frac{dy}{dx}(x_0), \quad y'(x_0).$$

Definizione 8.6. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale tale che*

$$I' = \{x \in I : \quad f \text{ è derivabile in } x\} \neq \emptyset.$$

Si definisce funzione DERIVATA DI f *la funzione*

$$\begin{array}{rccc} f' : & I' & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f'(x) \end{array}$$

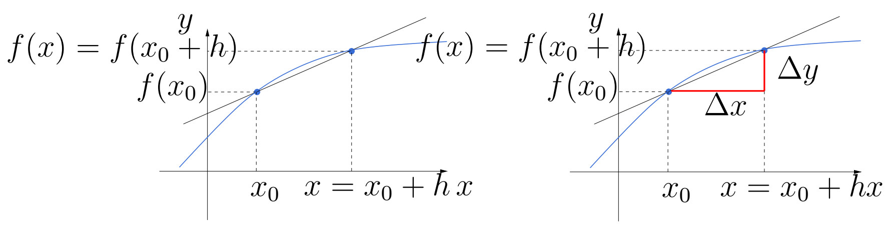
che associa ad ogni punto $x \in I'$ la derivata di f in x.

Abbiamo che $I' \subseteq I$ e in generale $I' \neq I$.

Osservazione 8.7. Come per la derivata in un punto, esistono altri modi per scrivere la funzione derivata $f'(x)$. Per esempio:

$$Df(x), \quad \frac{d}{dx}f(x), \quad y'(x).$$

Osservazione 8.8 (Significato geometrico della derivata). Come preannunciato nella motivazione, il concetto di derivata di una funzione in un punto, è strettamente collegato al concetto di coefficiente angolare della retta tangente al grafico di una funzione in quel punto. Sia f la funzione in figura:



Il coefficiente angolare della retta passante per i punti $(x_0, f(x_0))$ e $(x_0+h, f(x_0+h))$ è

$$m_h = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

dove si è posto $x = x_0 + h$.
Far tendere $x \to x_0$ equivale a far tendere $x_0 + h \to x_0$ o $h \to 0$, quindi il **coefficiente angolare** della retta tangente ad f in x_0 è

$$m = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

Usando la definizione, si calcolano velocemente le derivate di alcune funzioni elementari.

Esempio 8.9. Sia $c \in \mathbb{R}$ e sia f la funzione costante $\boxed{f(x) = c}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora $\boxed{D\,c = f'(x) = 0}$ in ogni punto di $x \in \mathbb{R}$. Infatti, per ogni coppia di punti $x, x_0 \in \mathbb{R}$,

$$rf(x, x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{c-c}{x-x_0} = \frac{0}{x-x_0} = 0.$$

Dunque,

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = 0$$

in ogni punto x_0. Essendo x_0 generico, si ha $f'(x) = 0$ in ogni punto $x \in \mathbb{R}$.

Esempio 8.10. Sia $\boxed{f(x) = x}$. Allora $\boxed{D\,x = f'(x) = 1}$, per ogni $x \in \mathbb{R}$. Risulta

$$rf(x, x_0) = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \frac{x-x_0}{x-x_0} = 1$$

per ogni coppia di punti $x, x_0 \in \mathbb{R}$, per cui

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} rf(x, x_0) = 1$$

per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$. Essendo x_0 generico, si ha $f'(x) = 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Esempio 8.11. Sia $\boxed{f(x) = x^n}$ $(n \in \mathbb{N},\ n \geq 2)$. Allora $\boxed{D\,x^n = f'(x) = nx^{n-1}}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Infatti, risulta

$$x^n - x_0^n = (x-x_0)\sum_{i=1}^{n} x^{n-i}x_0^{i-1} = (x-x_0)\left(x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1}\right)$$

da cui

$$rf(x,x_0) = \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0} = x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + \cdots + x x_0^{n-2} + x_0^{n-1}, \quad \forall x, x_0 \in \mathbb{R}.$$

Passando al limite per $x \to x_0$, si ha

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} rf(x,x_0) = n x_0^{n-1}.$$

Essendo x_0 generico, si ha $f'(x) = nx^{n-1}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Esempio 8.12. Sia $\boxed{f(x) = a^x}$, con $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. Allora $\boxed{D\,a^x = f'(x) = a^x \log_e a}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Infatti, si ha

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{a^x - a^{x_0}}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} a^{x_0} \left[\frac{a^{(x-x_0)} - 1}{x - x_0} \right] = a^{x_0} \lim_{x \to x_0} \left[\frac{a^{(x-x_0)} - 1}{x - x_0} \right].$$

Dobbiamo calcolare il limite $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{a^t - 1}{t}$.

Eseguiamo il seguente cambiamento di variabili:

$$a^t - 1 = y, \quad \text{cioè} \quad t = \log_a(1+y).$$

Il limite diventa

$$\lim_{y \to 0} \frac{y}{\log_a(1+y)} = \lim_{y \to 0} \frac{1}{\log_a (1+y)^{\frac{1}{y}}} = \frac{1}{\log_a e} = \log_e a.$$

Otteniamo quindi che

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{a^x - a^{x_0}}{x - x_0} = a^{x_0} \log_e a.$$

Essendo x_0 generico, si ha $f'(x) = a^x \log_e a$, per ogni $x \in \mathbb{R}$.
In particolare, se $\boxed{f(x) = e^x}$ si ha $\boxed{D\,e^x = f'(x) = e^x}$.

Esempio 8.13. Sia $\boxed{f(x) = \log_a x}$, per $x \in \mathbb{R}^+$, $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. Allora $\boxed{D\,\log_a x = f'(x) = \frac{1}{x}\log_a e}$ per ogni $x \in \mathbb{R}^+$. Infatti, se $x_0 > 0$ si ha

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{\log_a(x_0+h) - \log_a x_0}{h} = \frac{\log_a x_0 + \log_a(1+\frac{h}{x_0}) - \log_a x_0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\log_a(1+\frac{h}{x_0})}{h} =$$

$$= \log_a \left(\lim_{h \to 0} \left(1 + \frac{h}{x_0}\right)^{\frac{1}{h}} \right) = \log_a e^{\frac{1}{x_0}} = \frac{1}{x_0} \log_a e.$$

Essendo x_0 generico, si ha $f'(x) = \frac{1}{x}\log_a e$ per ogni $x \in \mathbb{R}^+$.

In particolare, per $\boxed{f(x) = \ln x}$ si ha $\boxed{D\,\ln x = f'(x) = \frac{1}{x}}$.

Esempio 8.14. Sia $\boxed{f(x) = \sin x}$, per ogni $x \in \mathbb{R}$. Allora $\boxed{D\,\sin x = f'(x) = \cos x}$, per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Si ha

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sin x_0 \cos h + \sin h \cos x_0 - \sin x_0}{h} \\ &= \cos x_0 \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} + \sin x_0 \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h}. \end{aligned}$$

Ricordiamo il limite fondamentale

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} = 1.$$

Inoltre si ha

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} = -\lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{h} \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\sin h}{\cos h + 1} = 0.$$

Allora otteniamo che

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x_0+h) - \sin x_0}{h} = \cos x_0.$$

Essendo x_0 generico, si ha che $f'(x) = \cos x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Ragionando in maniera analoga, si può calcolare la derivata della funzione $\cos x$.

Esempio 8.15. Se $\boxed{f(x) = \cos x}$, per $x \in \mathbb{R}$, allora $\boxed{D\,\cos x = f'(x) = -\sin x}$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Basta osservare che $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} + x)$.

Esempio 8.16. Sia $\boxed{f(x) = \frac{1}{x}}$, per $x \neq 0$. Allora $\boxed{D\,\frac{1}{x} = f'(x) = -\frac{1}{x^2}}$ per ogni $x \neq 0$. Infatti, Si ha ($x_0 \neq 0$)

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{(1/x) - (1/x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{(x_0 - x)/(x_0 x)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} -\frac{1}{x_0 x} = -\frac{1}{x_0^2}.$$

Essendo x_0 arbitrario, si ha che $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ per ogni $x \neq 0$.

Dalla definizione di derivabilità segue subito la seguente proposizione che lega il concetto di derivabilità a quello di continuità.

Teorema 8.17. *f derivabile in x_0 $\Rightarrow$ f continua in x_0.*

Dimostrazione. Per $x \neq x_0$ si ha

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot (x - x_0).$$

Pertanto

$$\lim_{x\to x_0} [f(x) - f(x_0)] = f'(x_0) \cdot 0 = 0.$$

□

Osservazione 8.18. Nel teorema 8.17 l'implicazione inversa non vale: esistono funzioni continue ma non derivabili in tutto il loro dominio. Vedi Esempi 8.21 e 8.23 seguenti.

Definizione 8.19. *Sia I intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ e x_0 un punto interno ad I.*

(i) Se esiste il limite

$$\lim_{x\to x_0^-} rf(x,x_0) = \lim_{x\to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in \overline{\mathbb{R}},$$

esso viene chiamato derivata sinistra di f nel punto x_0 e si indica con $f'_-(x_0)$.

(ii) Se esiste il limite

$$\lim_{x\to x_0^+} rf(x,x_0) = \lim_{x\to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \in \overline{\mathbb{R}},$$

esso viene chiamato derivata destra di f nel punto x_0 e si indica con $f'_+(x_0)$.

Proposizione 8.20. *Una funzione f ammette derivata $f'(x_0)$ in un punto x_0 se e solo se*

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0).$$

Esempio 8.21. Sia $f(x) = |x|$, per $x \in \mathbb{R}$.

- Se $x_0 > 0$, si ha
$$rf(x,x_0) = \frac{|x|-|x_0|}{x-x_0} = \frac{x-x_0}{x-x_0} = 1$$
per tutti gli $x > 0$, per cui $f'(x_0) = 1$.

- Se $x_0 < 0$, si ha
$$rf(x,x_0) = \frac{|x|-|x_0|}{x-x_0} = \frac{-x-(-x_0)}{x-x_0} = -1$$
per tutti gli $x < 0$, per cui $f'(x_0) = -1$.

- Se $x_0 = 0$, si ha
$$rf(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0, \\ -1 & \text{se } x < 0, \end{cases}$$
per cui $f'_-(0) = -1$ e $f'_+(0) = 1$. In particolare NON ESISTE $f'(0)$. La funzione $f(x) = |x|$ è quindi un esempio di funzione continua nel suo dominio, ma non derivabile in esso. Si ha che $I = \operatorname{dom} f = \mathbb{R}$, mentre $I' = \operatorname{dom} f' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dunque il seguente esempio mostra anche che, in generale, $I' \subset I$.

Esempio 8.22 (Funzione di Heaviside)**.** Sia $f(x) \equiv H(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0, \\ 0 & \text{se } x < 0. \end{cases}$

Allora

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1-1}{x-0} = 0,$$
$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0-} \frac{0-1}{x-0} = +\infty.$$

Anche in questo caso NON ESISTE $f'(0)$.

Esempio 8.23. Sia $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x \geq 0, \\ -\sqrt{|x|} & \text{se } x < 0. \end{cases}$

Dimostriamo che in questo caso esiste la derivata $f'(0)$ (esiste e vale $+\infty$), ma essendo non finita la funzione non è derivabile. Si ha

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0+} \frac{\sqrt{x}-0}{x-0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty,$$
$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{-\sqrt{|x|}-0}{x-0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{\sqrt{|x|}} = +\infty.$$

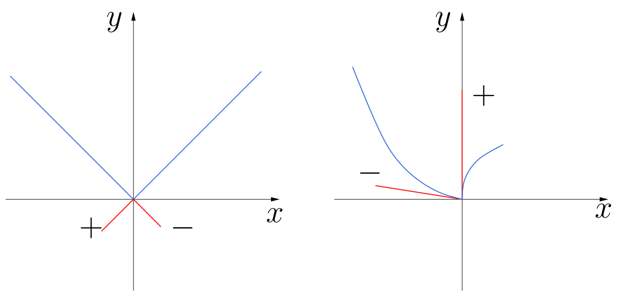
Quindi $f'(0) = +\infty$, e f NON È DERIVABILE IN 0.

8.2 Punti di non derivabilità

Se la funzione f è continua in x_0 ma non è derivabile in x_0 si possono presentare vari casi.

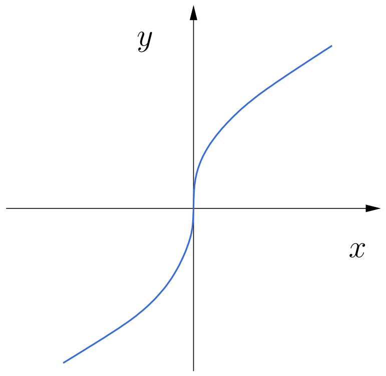
1. **Punto angoloso**:

   Definizione 8.24. *Se* $\exists f'_-(x_0), f'_+(x_0) \in \overline{\mathbb{R}}$ $(f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0))$ *e almeno una delle due è finita, allora* x_0 *si dice punto angoloso.*



2. **Punto a tangente verticale**

   Definizione 8.25. *Se* $\exists f'(x_0) = \pm\infty$*, allora* x_0 *si dice punto di flesso a tangente verticale.*

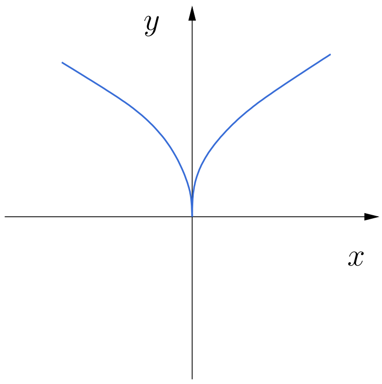


$f(x) = \sqrt[3]{x}$

$f'_-(0) = f'_+(0) = +\infty$ (VERIFICARE)

3. **Cuspide**

   Definizione 8.26. *Se $f'_-(x_0), f'_+(x_0) \in \{+\infty, -\infty\}$, $f'_-(x_0) \neq f'_+(x_0)$, allora x_0 si dice cuspide.*



$f(x) = \sqrt{|x|}$

$f'_-(0) = -\infty, \qquad f'_+(0) = +\infty$ (VERIFICARE)

In tutti i casi analizzati sopra almeno una, fra derivata destra e derivata sinistra della funzione, esiste (finita o infinita). Ci sono casi però in cui, pur essendo f continua in x_0, $f'_-(x_0)$ e $f'_+(x_0)$ non esistono *entrambe*, come si evince dal seguente esempio.

Esempio 8.27. Data la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \end{cases}$$

1. la f in $x_0 = 0$ è continua;
2. non esistono, $f'_-(x_0)$ e $f'_+(x_0)$ con $x_0 = 0$. Infatti

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \to 0^+} \sin \frac{1}{x}$$

   che non esiste. Analogamente per $\lim_{x \to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x}$.

8.3 Regole di derivazione

Introduciamo ora alcuni teoremi relativi alle regole di derivazione di funzioni, tramite i quali si possono ottenere poi facilmente le derivate di altre funzioni note.

Teorema 8.28 (Linearità)**.** *Sia I intervallo e x_0* ***punto interno a*** *I. Se $f, g : I \to \mathbb{R}$ sono derivabili in x_0 e $c \in \mathbb{R}$, allora anche $f + g$ e cf sono derivabili in x_0 e si ha*

$$(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0), \quad (cf)'(x_0) = c(f'(x_0)).$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
(f+g)'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) + g(x_0+h) - f(x_0) - g(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} + \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h}\right] = f'(x_0) + g'(x_0), \\
(cf)'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{cf(x_0+h) - cf(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} c \left[\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}\right] = cf'(x_0).
\end{aligned}$$

□

Esempio 8.29.

- $D(5x^2 + 7x + 9) = 5 \cdot D(x^2) + 7 \cdot D(x) + D9 = 10x + 7.$
- $D(3\sin x - 7\cos x + 2x) = 3\cos x + 7\sin x + 2.$

Teorema 8.30 (Derivata del prodotto)**.** *Sia I intervallo e x_0* ***punto interno a*** *I. Se $f, g : I \to \mathbb{R}$ sono funzioni derivabili in x_0, allora anche fg è derivabile in x_0, e si ha*

$$(fg)'(x_0) = f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0).$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
(fg)'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{(fg)(x_0+h) - (fg)(x_0)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)[g(x_0+h) - g(x_0)] + g(x_0)[f(x_0+h) - f(x_0)]}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0} \left\{ f(x_0+h)\frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} + g(x_0)\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \right\} = \\
&= f(x_0)g'(x_0) + f'(x_0)g(x_0).
\end{aligned}$$

□

Esempio 8.31. $D(x^3 \sin x) = D(x^3)\sin x + x^3 D(\sin x) = 3x^2 \sin x + x^3 \cos x.$

Teorema 8.32 (Derivata della composizione)**.** *Siano I e J intervalli; $f : I \to \mathbb{R}$, $g : J \to \mathbb{R}$, x_0 un* ***punto interno a*** *I tale che $f(x_0)$* ***è interno a*** *J.*

Se f è derivabile in x_0 e g è derivabile in $f(x_0)$, allora $g \circ f$ è derivabile in x_0, e si ha

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))\, f'(x_0).$$

Dimostrazione. Supponiamo che per $x \neq x_0$ si abbia $f(x) \neq f(x_0)$. Allora, per $x \neq x_0$

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{g(f(x) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Passando al limite per $x \to x_0$ si ottiene la tesi.

In generale, però potrà essere $f(x) = f(x_0)$ anche per $x \neq x_0$ e quindi non si potrà moltiplicare e dividere per $f(x) - f(x_0)$. Usiamo questo trucco.

Sia $h : J \to \mathbb{R}$ fa funzione così definita

$$h(y) = \begin{cases} \dfrac{g(y) - g(f(x_0))}{y - f(x_0)} & \text{se } y \neq f(x_0) \\ g'(f(x_0)) & \text{se } y = f(x_0). \end{cases}$$

Per $x \neq x_0$ (scegliendo $y = f(x)$) si ha

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = h(f(x)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}. \tag{8.1}$$

Osserviamo che dalla derivabilità di g in $f(x_0)$ segue la continuità di h in $f(x_0)$. Quindi, per il teorema sulla composizione di funzioni continue,

$$\lim_{x \to x_0} h(f(x)) = h(f(x_0)) = g'(f(x_0)).$$

Allora, passando al limite in (8.1) per $x \to x_0$, si ottiene la tesi. □

Esempio 8.33. Verifichiamo che $\boxed{D \cosh x = \sinh x}$.

Risulta

$$D \cosh x = D\left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(De^x + De^{-x}\right) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh x.$$

Esempio 8.34. Verifichiamo che $\boxed{D \sinh x = \cosh x}$.

Risulta

$$D \sinh x = D\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(De^x - De^{-x}\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh x.$$

Esempio 8.35. Verifichiamo che $\boxed{D(x^{-n}) = -nx^{-n-1}, \quad n \in \mathbb{N}}$.

La funzione $x \mapsto x^{-n}$ si può considerare come **composizione** delle funzioni $f(x) = x^n$ e $g(y) = 1/y$. Poichè $f'(x) = nx^{n-1}$, $g'(y) = -1/y^2$, risulta

$$D(x^{-n}) = g'(f(x))\, f'(x) = -\frac{1}{(x^n)^2}\,(nx^{n-1}) = -nx^{-n-1}.$$

Esempio 8.36. Dalle derivate delle funzioni elementari note, con il teorema di composizione, si ricavano le seguenti formule. Se f è una funzione derivabile in I, allora:

1. se $f(x) \neq 0\ \forall x \in I$, allora in I vale $\boxed{D\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{1}{f^2}\, f'}$.

   (Si consideri $\frac{1}{f}$ come composizione di f e $\frac{1}{y}$).

2. $\boxed{D(e^f) = e^f\, f'}$.

3. $\boxed{D(\sin f) = \cos f\, f'}$.

4. $\boxed{D(\cos f) = -\sin f\, f'}$.

5. se $f > 0$, allora $\boxed{D(\ln f) = \frac{1}{f}\, f'}$.

Esempio 8.37.
- $D(\cos 2x) = (-\sin 2x)\, 2.$
- $D(\sin^3 5x) = 3\sin^2 5x \cdot \cos 5x \cdot 5 = 15 \sin^2 5x \cdot \cos 5x.$

Esempio 8.38. Calcoliamo la derivata della funzione potenza $\boxed{f(x) = x^\alpha}$, con $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x > 0$. Vale che $\boxed{D\, x^\alpha = f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}}$. Infatti

$$f(x) = x^\alpha = e^{\ln x^\alpha} = e^{\alpha \ln x}.$$

Allora, si ha

$$f'(x) = e^{\alpha \ln x}\left(\frac{\alpha}{x}\right) = x^\alpha \frac{\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Teorema 8.39 (Derivata del quoziente)**.** *Sia I intervallo e x_0 **punto interno a** I. Siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili in x_0 e $g(x_0) \neq 0$. Allora $\frac{f}{g}$ è derivabile in x_0, e si ha*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}.$$

Dimostrazione. IDEA: Applicare la derivazione del prodotto a f e $\frac{1}{g}$, ed usare $D(g^{-1}) = -g^{-2}g'$. □

Esempio 8.40. Verifichiamo che $\boxed{D\tan x = 1+\tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}}$.

Poichè $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, possiamo calcolare la derivata di $\tan x$ nei punti in cui $\cos x \neq 0$, cioè per $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Risulta

$$\begin{aligned} D\tan x =& D\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \frac{(D\sin x)\cos x - \sin x(D\cos x)}{\cos^2 x} = \\ =& \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}. \end{aligned}$$

Esempio 8.41. Verifichiamo che $\boxed{D\tanh x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}}$.

Risulta

$$\begin{aligned} D\tanh x =& D\left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right) = \frac{(D\sinh x)\cosh x - \sinh x(D\cosh x)}{\cosh^2 x} = \\ =& \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x}. \end{aligned}$$

Teorema 8.42 (Derivazione della funzione inversa)**.** *Sia I intervallo e $f : I \to \mathbb{R}$ continua e invertibile in I. Sia x_0 **interno ad** I.*

Se esiste $f'(x_0)$, allora esiste anche la derivata di f^{-1} nel punto $y_0 = f(x_0)$, e si ha

$$D\left(f^{-1}\right)(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \quad \text{cioè} \quad \left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

Dimostrazione. Sia ha

$$\begin{aligned} &\lim_{y\to y_o} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} \\ &= \lim_{y\to y_o} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{f\left(f^{-1}(y)\right) - f\left(f^{-1}(y_0)\right)} \\ &= \lim_{x\to x_o} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}, \end{aligned}$$

per il teorema sul limite di composizione.

□

Osservazione 8.43.

1. L'ipotesi di invertibilità su f equivale alla stretta monotonia.
2. La formula per la derivata dell'inversa vale anche se $f'(x_0) = 0$ o $f'(x_0) = \pm\infty$, applicando le dovute convenzioni.
3. Se $f'(x_0) \neq 0$, allora f^{-1} **è derivabile in** $f(x_0)$.

Esempio 8.44. Applicando il Teorema 8.42, calcoliamo la derivata della funzione $\ln x$ pensadola come funzione inversa dell'esponenziale. Sia $f(x) = e^x$ e $f^{-1}(x) = \ln x$. Si ha allora

$$D(\ln x) = D(f^{-1})(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}.$$

Esempio 8.45. Verifichiamo che $\boxed{D(\arcsin x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$.

Siano

$$\begin{array}{ll} y = f(x) = \sin x, & x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \\ x = f^{-1}(y) = \arcsin y, & y \in]-1,1[. \end{array}$$

Risulta $D(\arcsin y) = \dfrac{1}{f'(x)} = \dfrac{1}{D(\sin x)} = \dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}$, essendo $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$ per $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ e $\sin x = y$.
Cambiando di nuovo nome alla variabile, scrivendo x al posto di y, si ha che

$$D(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Esempio 8.46. Verifichiamo che $\boxed{D \arctan x = \dfrac{1}{1+x^2}}$. Siano

$$\begin{array}{ll} y = f(x) = \tan x, & x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \\ x = f^{-1}(y) = \arctan y, & y \in]-\infty,+\infty[. \end{array}$$

Risulta

$$D(\arctan y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{D(\tan x)} = \cos^2 x = \frac{1}{1+\tan^2 x} = \frac{1}{1+y^2},$$

essendo $\tan x = y$. Cambiando di nuovo nome alla variabile (scrivendo x al posto di y) si ha $D \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$.

Analogamente $\boxed{D(\arccos x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$ e $\boxed{D(\operatorname{arccot} x) = -\dfrac{1}{1+x^2}}$.

Osservazione 8.47. Scrivendo $f^g = e^{g \ln f}$, si trova la formula generale per la derivata di f^g:

$$\boxed{D\left(f^g\right) = f^g \left(\frac{f'g}{f} + g' \ln f\right)}.$$

Esempio 8.48. Calcolare la derivata di $(\ln x)^{\sqrt{x}}$, con $x > 1$.

Possiamo scrivere

$$(\ln x)^{\sqrt{x}} = e^{x^{1/2} \ln(\ln x)}.$$

Si ha

$$D\left(x^{1/2} \ln(\ln x)\right) = \ln(\ln x) D\left(x^{1/2}\right) + x^{1/2} D\left(\ln(\ln x)\right).$$

Poichè $D\left(x^{1/2}\right) = \frac{1}{2} x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ e $D\left(\ln(\ln x)\right) = \frac{1}{\ln x} \frac{1}{x}$, si ha dunque

$$D\left(x^{1/2} \ln(\ln x)\right) = \ln(\ln x) \frac{1}{2\sqrt{x}} + x^{1/2} \frac{1}{x \ln x} = \frac{\ln x \, \ln(\ln x) + 2}{2\sqrt{x} \, \ln x},$$

ed infine

$$\begin{aligned}D(\ln x)^{\sqrt{x}} =& e^{x^{1/2}\ln(\ln x)}\frac{\ln x\ \ln(\ln x)+2}{2\sqrt{x}\ \ln x} = \\ =& (\ln x)^{(\sqrt{x}-1)}\ \frac{\ln x\ \ln(\ln x)+2}{2\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

8.4 Massimi e minimi relativi

Definizione 8.49. *Sia $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A$. Si dice che*

- *x_0 è un punto di massimo RELATIVO, o un punto di massimo LOCALE, se esiste un <u>intorno</u> I di x_0 tale che x_0 è punto di massimo per la <u>restrizione</u> di f a $I \cap A$; cioè*

$$\exists I\ :\ \forall x \in A \cap I \quad \textit{si ha} \quad f(x) \leq f(x_0).$$

- *x_0 è un punto di minimo RELATIVO o un punto di minimo LOCALE se esiste un <u>intorno</u> I di x_0 tale che x_0 è punto di minimo per la restrizione di f a $I \cap A$; cioè*

$$\exists I\ :\ \forall x \in A \cap I \quad \textit{si ha} \quad f(x) \geq f(x_0).$$

- *x_0 è un punto di estremo relativo o punto di estremo locale se è punto di massimo locale o di minimo locale.*

Osservazione 8.50. Se x_0 è un punto di massimo per f su A, allora è anche punto di massimo relativo; se vogliamo distinguere i due termini, nel primo caso si parlerà di punto di massimo ASSOLUTO o punto di massimo GLOBALE.

Analogamente, si parlerà di punto di minimo ASSOLUTO o punto di minimo GLOBALE.

Esempio 8.51. Sia $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in [-1,1] \setminus \{0\}, \\ 2 & \text{se } x = 0. \end{cases}$

I punti $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ sono punti di massimo RELATIVO; $x = 0$ è anche punto di massimo ASSOLUTO.

Non ci sono punti di minimo.

Esempio 8.52. Sia $f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } |x| = 1, \\ \frac{1}{x^2} & \text{se } x \in]-1,1[\setminus \{0\} \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$

$x = 0$ è punto di minimo ASSOLUTO; $x = 1$ e $x = -1$ sono punti di massimo RELATIVO ma NON ASSOLUTO.

Esempio 8.53. Sia $f(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$. Tutti i punti $x = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, sono punti di massimo ASSOLUTO (e quindi relativo); tutti i punti $x = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, sono punti di minimo ASSOLUTO (e quindi relativo).

Esempio 8.54. Sia $f(x) = [x]$ (parte intera), $x \in \mathbb{R}$. Tutti i punti $x \in \mathbb{R}$ sono punti di massimo RELATIVO; tutti i punti $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ sono punti di minimo RELATIVO.

Esempio 8.55. Sia $f(x) = \sqrt{|x|}$, $x \in \mathbb{R}$. Il punto $x = 0$ è l'unico punto di minimo assoluto (e quindi relativo). In $x = 0$ f non è derivabile e $x = 0$ è un punto di cuspide. Non vi sono punti di massimo.

Esempio 8.56. Sia $f(x) = \min\{|x|, |x-2|+1\}$. Il punto $x = 0$ è punto di minimo assoluto. Il punto $x = 2$ è punto di minimo relativo; il punto $x = \frac{3}{2}$ è punto di massimo relativo. Notare che la funzione non è derivabile in $x = 0$, $x = \frac{3}{2}$ e $x = 2$.

Esempio 8.57. Sia $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se } x \leq -1, \\ -x & \text{se } -1 < x < 1, \\ x-2 & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$

La funzione non ha punti di massimo e minimo assoluti. $x = 1$ è punto di minimo relativo; $x = -1$ è punto di massimo relativo.

Definizione 8.58. *Diaciamo che x_0 è punto STAZIONARIO per f se f è derivabile in x_0 e se $f'(x_0) = 0$.*

Il seguente teorema fornisce la condizione necessaria al primo ordine per i punti di estremo relativo.

Teorema 8.59 (di Fermat)**.** *Siano $f : \mathrm{dom} f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e x_0 un **punto interno** a $\mathrm{dom} f$. Se f è derivabile in x_0 e x_0 è un **punto di estremo relativo** per f, allora x_0 è un punto stazionario di f.*

Dimostrazione. Sia x_0 un *punto di massimo relativo* (analogamente se x_0 un punto di minimo relativo).

Per definizione $\exists I$ intorno di x_0 tale che $f(x) - f(x_0) \leq 0$ $\forall x \in I \cap \mathrm{dom} f$. Risulta quindi

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{cases} \geq 0 & \text{se } x - x_0 < 0, \\ \leq 0 & \text{se } x - x_0 > 0. \end{cases}$$

Passando al limite per $x \to x_0$ si ha

$$f'_-(x_0) \geq 0 \quad \text{e} \quad f'_+(x_0) \leq 0.$$

Ma per ipotesi f derivabile in x_0. Quindi $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$. Segue pertanto che $f'(x_0) = 0$ e dalla Definizione 8.58 si trova che x_0 un punto stazionario di f. $\square$

Osservazione 8.60. Seguendo la dimostrazione del Teorema 8.59 abbiamo dimostrato inoltre:

> Sia $f : \mathrm{dom}\, f \to \mathbb{R}$ e x_0 un punto interno al $\mathrm{dom}\, f$. Se x_0 è un punto di estremo relativo per f in cui esistono le derivate destra e/o sinistra, allora

1. se x_0 è punto di massimo relativo allora $f'_-(x_0) \geq 0$, $f'_+(x_0) \leq 0$;
2. se x_0 è punto di minimo relativo allora $f'_-(x_0) \leq 0$, $f'_+(x_0) \geq 0$.

Esempio 8.61. $f(x) = x^2$, $\mathrm{dom} f = \mathbb{R}$. $f'(x) = 2x \Rightarrow x = 0$ è l'unico punto stazionario per f (e di minimo assoluto, e quindi anche relativo).

Il teorema di Fermat fornisce solo una condizione necessaria, ma non sufficiente per i punti di estremo relativo. Infatti, in generale, i punti stazionari possono non essere di estremo per una funzione, ossia:

$$\boxed{x_0 \quad \text{punto stazionario di } f \quad \not\Rightarrow \quad x_0 \quad \text{punto di estremo relativo per } f}.$$

Esempio 8.62. $f(x) = x^3$, $\mathrm{dom} f = \mathbb{R}$. $f'(x) = 3x^2 \Rightarrow x = 0$ è l'unico punto stazionario per f (ma NON PUNTO DI ESTREMO RELATIVO).

Esempio 8.63. $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0, \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$

Calcoliamo

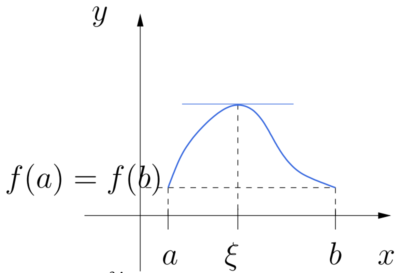
$$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{h}\right) - 0}{h} = 0.$$

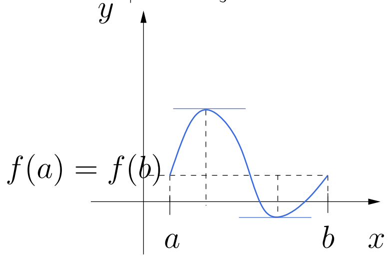
Quindi $x = 0$ è punto stazionario per f. Ma $x = 0$ NON è di ESTREMO RELATIVO per f, poiché in ogni suo intorno ci sono punti per cui f è positiva e punti per cui f è negativa.

Osservazione 8.64. Il Teorema 8.59 fornisce una 'tecnica' per la ricerca di estremi (relativi) ma solo in punti interni al dominio e in cui f derivabile. Infatti, se f è derivabile, i punti di estremo relativi interni al dominio saranno da ricercarsi fra i punti stazionari.

8.5 I teoremi di Rolle, Cauchy e Lagrange

Teorema 8.65 (di Rolle). *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$, e derivabile in $]a, b[$, tale che $f(a) = f(b)$. Allora **esiste almeno un punto** $\xi \in]a, b[$ tale che $f'(\xi) = 0$.*





Dimostrazione.
- Se $f(x) = c$ per ogni $x \in [a, b]$, $c \in \mathbb{R}$, allora $f'(x) = 0$, $\forall x \in]a, b[$.
- Se f non costante, per il Teorema di Weierstrass (f continua in $[a, b]$) f ammette minimo assoluto m e massimo assoluto M, con $m < M$ poichè f non è costante. Siano $x_m \in [a, b]$ un punto di minimo e $x_M \in [a, b]$ un punto di massimo tali che $f(x_m) = m$ e $f(x_M) = M$.
  - Se $x_m \notin \{a, b\}$, allora x_m è un punto stazionario e quindi $f'(x_m) = 0$.
  - Altrimenti $f(x_m) = f(a) = f(b)$, e quindi $x_M \notin \{a, b\}$ (dato che f non è costante); perciò x_M è un punto interno ad $[a, b]$, ed è di estremo. Allora $f'(x_M) = 0$.

$\square$

Osservazione 8.66. Nessuna delle ipotesi del teorema può essere eliminata.

1. Se si elimina l'ipotesi di continuità in $[a, b]$ il teorema non vale. Infatti, la funzione

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0, 1) \\ 0 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

   è continua in $[0, 1)$, derivabile nell'intervallo aperto $(0, 1)$ e verifica $f(0) = f(1)$, ma non esistono punti in cui $f' = 0$.

2. Se si elimina l'ipotesi di derivabilità in (a, b), il teorema non vale. Per esempio la funzione $f(x) = |x|$ è continua in $[-1, 1]$ e verifica $f(-1) = f(1)$, ma non esistono punti in $(-1, 1)$ in cui $f' = 0$.

3. Se si elimina l'ipotesi $f(a) = f(b)$ il teorema non vale. Infatti se si considera la la funzione $f(x) = x$, essa è continua in $[0, 1]$ e derivabile in $(0, 1)$, ma non esistono punti in $(0, 1)$ in cui $f' = 0$.

Teorema 8.67 (di Cauchy)**.** *Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ due funzioni continue in $[a, b]$, e derivabili in $]a, b[$. Allora **esiste almeno un punto** $\xi \in]a, b[$ tale che*

$$f'(\xi)[g(b) - g(a)] = g'(\xi)[f(b) - f(a)].$$

Dimostrazione. Si applica il Teorema di Rolle alla funzione

$$h(x) = f(x)[g(b) - g(a)] - g(x)[f(b) - f(a)],$$

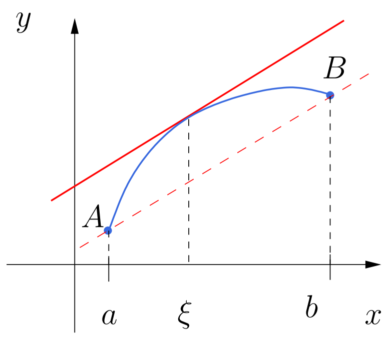
notando che

$$h(a) = f(a)g(b) - g(a)f(b) = h(b).$$

$\square$

Teorema 8.68 (del valor medio, o di Lagrange)**.** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$, e derivabile in $]a, b[$. Allora* ***esiste almeno un punto*** *$\xi \in]a, b[$ tale che*

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$



Significato geometrico: esiste almeno un punto $\xi \in]a, b[$ per cui la tangente al grafico di f in $(\xi, f(\xi))$ è parallela alla retta passante per i punti

$$A = (a, f(a)) \quad \text{e} \quad B = (b, f(b)).$$

Dimostrazione. Si prende $g(x) = x$ nel Teorema di Cauchy.

Oppure, si applica il Teorema di Rolle alla funzione $h(x) = f(x) - (x - a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$, notando che $h(a) = h(b) = f(a)$. □

Teorema 8.69 (della derivata nulla)**.** *Sia $f' = 0$ su un intervallo I, allora f è costante su I.*

Dimostrazione. Se f non è costante, allora $\exists a, b \in I$ tali che $a < b$ e $f(b) \neq f(a)$. Allora per il Teorema del valor medio esiste $\xi \in]a, b[$ tale che $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \neq 0$, contro l'ipotesi. □

Nel teorema della derivata nulla è essenziale l'ipotesi che la funzione f sia definita su un intervallo. Se cade tale ipotesi, non si può in generale dire che una funzione con derivata nulla è costante.

Esempio 8.70. $f(x) = \arctan x + \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$, $\text{dom} f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Si ha

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^2} + \frac{1}{1 + x^{-2}}\left(\frac{-1}{x^2}\right) = 0.$$

Non si può concludere però che f sia costante sul suo dominio poiché esso non è un intervallo. Infatti f non è costante, essendo

$$f(1) = 2\arctan 1 = \frac{\pi}{2}, \quad f(-1) = 2\arctan(-1) = -\frac{\pi}{2}.$$

Vale infatti

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} & \text{se } x < 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

8.6 Derivate di funzioni monotone

Teorema 8.71 (Monotonia e derivata)**.** *Sia* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, ***derivabile*** *in* $]a,b[$.

(i) $f' \geq 0$ *(rispettivamente* $f' \leq 0$*) in* (a,b) *se e solo se* f *crescente (rispettivamente decrescente) in* $[a,b]$.

(ii) Se $f' > 0$ *(rispettivamente* $f' < 0$*) in* (a,b)*, allora* f *strettamente crescente (rispettivamente strettamente decrescente) in* $[a,b]$*. Non vale il viceversa.*

Dimostrazione. Dimostriamo (i). Supponiamo che f sia crescente in $[a,b]$, allora per ogni $x,y \in [a,b]$ con $x \neq y$ si ha

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} \geq 0$$

e quindi, passando al limite per $x \to y$, si ha

$$f'(y) \geq 0.$$

Viceversa, sia $f' \geq 0$. Siano $x,y \in [a,b]$ con $x < y$. Per il Teorema del valor medio si ha che $\exists \xi \in]x,y[$ tale che $f(y) - f(x) = f'(\xi)(y-x) \geq 0$ e quindi f è crescente in $[a,b]$.

Per quanto riguarda (ii), la dimostrazione è come sopra con le disuguaglianze strette.

□

Osservazione 8.72. Non vale il viceversa nell'implicazione (ii) del teorema precedente: considerate $f(x) = x^3$, funzione strettamente crescente in $\mathbb{R}$, ma tale che $f'(0) = 0$.
In generale, quindi, per una funzione f strettamente crescente e derivabile si ha ancora che $f' \geq 0$ e non $f' > 0$.

Osservazione 8.73. Il Teorema 8.71 è fondamentale per il *disegno di grafici qualitativi di funzioni*. La 'tecnica' che esso consiglia è la seguente:

- calcolare la derivata prima;
- determinare (eventualmente solo qualitativamente) gli intervalli in cui la funzione derivata prima è positiva e quelli in cui è negativa;
- calcolare i valori (o i limiti) agli estremi di questi intervalli;
- tracciare il grafico usando il Teorema 8.71.

8.7 Il teorema di de l'Hopital

Molti dei limiti che danno luogo a una forma indeterminata sono in una delle forme $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\infty}{\infty}$, o si possono ricondurre ad una di esse. Il teorema di de l'Hopital fornisce un metodo utile per la determinazione del valore del limite.

Teorema 8.74 (de l'Hopital forma $\frac{0}{0}$)**.** *Siano* $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ *due funzioni continue, e sia* $x_0 \in (a, b)$ *tale che* $f(x_0) = g(x_0) = 0$. *Supponiamo inoltre che:*

1. f, g ***derivabili*** *in* $(a, b) \setminus \{x_0\}$;
2. $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$;
3. *esiste il limite* $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \boxed{L}$.

Allora esiste anche il limite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \boxed{L}.$$

Dimostrazione. Cominciamo ad osservare che $g(x) \neq 0$ in $(a, b) \setminus \{x_0\}$. Infatti, consideriamo l'intervallo (a, x_0). Se esistesse un punto x_1 in tale intervallo in cui $g(x_1) = 0$, allora, applicando il teorema di Rolle alla funzione g nell'intervallo (x_0, x_1), si troverebbe un altro punto $\xi \in (x_0, x_1)$ tale che $g'(\xi) = 0$, contro l'ipotesi su g'. In maniera analoga si ragiona sull'intervallo (x_0, b). Si ottiene così che il rapporto fra f e g risulta ben definito per ogni $x \in (a, b) \setminus \{x_0\}$.

Usando la caratterizzazione di limite per successioni, vogliamo dimostrare che per ogni successione $\{x_n\} \subset (a, b) \setminus \{x_0\}$ che tende a x_0 si ha

$$\lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = L.$$

Applicheremo poi il seguente risultato:

$$\lim_{x \to x_0} h(x) = L \quad \Leftrightarrow \quad \forall \{x_n\} \subset (a, b) \setminus \{x_0\},\ x_n \to x_0 \quad \text{si ha} \quad \lim_{n \to \infty} h(x_n) = L.$$

Applichiamo il Teorema di Cauchy ad f e a g scegliendo come a e b nel teorema di Cauchy precisamente $a = x_0$, $b = x_n$ (si suppone, senza perdita di generalità che $x_0 < x_n$). Esiste quindi almeno un punto $\xi_n \in]x_0, x_n[$ tale che

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f(x_n) - f(x_0)}{g(x_n) - g(x_0)} = \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)}.$$

Per il Teorema dei due carabinieri $(x_0 < \xi_n < x_n)$ si ha $\xi_n \to x_0$, e quindi

$$L = \lim_{n \to \infty} \frac{f'(\xi_n)}{g'(\xi_n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)}.$$

□

Osservazione 8.75. Sono possibili vari enunciati del teorema precedente, per casi analoghi. Ad esempio, il teorema resta valido se x_0 coincide con a o b, oppure se si tratta solo di un limite destro o sinistro in x_0.

Osservazione 8.76. L'ipotesi $f(x_0) = g(x_0) = 0$ può essere sostituita dalla seguente: non è necessario che il punto x_0 appartenga al dominio di f e g, ma

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0.$$

In tal caso basta cosiderare al posto di f la funzione

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq x_0 \\ 0 & \text{se } x = x_0, \end{cases}$$

e al posto di g la funzione $\tilde{g}$ definita in modo analogo e applicare il teorema sopra alle funzioni $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$.

Osservazione 8.77. Il Teorema di de l'Hopital vale anche nel caso in cui f, g sono funzioni derivabili in $(a, +\infty)$ con $x_0 = +\infty$ (limite da sinistra) e nel caso in cui siano derivabili in $(-\infty, a)$ con $x_0 = -\infty$ (limite da destra). Se

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} g(x) = 0,$$

allora

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

purché questo secondo limite esista.

Bisogna applicare il Teorema 8.74 in $t = 0$ alle funzioni $F(t) = f\left(\frac{1}{t}\right)$ e $G(t) = g\left(\frac{1}{t}\right)$, continue e derivabili in un intorno (destro o sinistro) di $t = 0$, tranne che, al più, nel punto stesso $t = 0$. Si ha

$$\lim_{t\to 0^\pm} F(t) = \lim_{t\to 0^\pm} f\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} f(x), \quad (x = \frac{1}{t})$$
$$\lim_{t\to 0^\pm} G(t) = \lim_{t\to 0^\pm} g\left(\frac{1}{t}\right) = \lim_{x\to\pm\infty} g(x),$$

dove $\pm$ si legga in modo opportuno $+$ o $-$, a seconda che si consideri un intorno destro o sinistro di $t = 0$ nell'ipotesi. Il Teorema di de l'Hopital si applica al quoziente $\frac{F}{G}$ nel caso $t \to 0^+$ o $t \to 0^-$. Si osservi che

$$F'(t) = -\frac{1}{t^2} f'\left(\frac{1}{t}\right) \quad \text{e} \quad G'(t) = -\frac{1}{t^2} g'\left(\frac{1}{t}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{F'(t)}{G'(t)} = \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)}.$$

Pertanto, se esiste $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, tale limite sarà uguale a

$$\lim_{t\to 0^\pm} \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} = \lim_{t\to 0^\pm} \frac{F'(t)}{G'(t)}.$$

Il prossimo teorema tratta la forma indeterminata $\dfrac{\infty}{\infty}$: il teorema di de l'Hopital sussiste anche nel caso in cui f e g tendano a infinito per $x \to x_0$. Vale infatti il seguente risultato.

Teorema 8.78 (de l'Hopital forma $\frac{\infty}{\infty}$)**.** *Siano $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili in (a, b). Supponiamo inoltre che:*

1. $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = +\infty$;
2. $g'(x) \neq 0 \ \forall x \in (a, b)$;
3. *esiste il limite* $\displaystyle\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \boxed{L} \in \overline{\mathbb{R}}$.

Allora esiste anche il limite

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \boxed{L}.$$

Osservazione 8.79. Il Teorema 8.78 resta valido se $\lim_{x\to b^-} f(x) = \lim_{x\to b^-} g(x) = +\infty$ o $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = +\infty$ con $x_0 \in (a, b)$, pur di modificare le formule nell'enunciato.
Inoltre esso continua a valere nel caso in cui le funzioni siano definite in una semiretta e f e g divergano per $x \to +\infty$ (o per $x \to -\infty$).

Osservazione 8.80. Mediante i Teoremi di de l'Hopital possiamo ritrovare la maggior parte dei limiti notevoli. Per esempio:

- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1;$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{1} = 1;$
- $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{1}{x+1} = 1;$
- $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{(H)}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty;$
- $\displaystyle(\alpha > 0) \ \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = \left(\frac{+\infty}{+\infty}\right) \overset{(H)}{=} \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{\alpha x^\alpha} = 0.$

Osservazione 8.81. Mediante l'applicazione dei Teoremi di de l'Hopital si possono risolvere anche altri tipi di forme indeterminate, dopo averle ricondotte ai casi $\frac{\infty}{\infty}$ o $\frac{0}{0}$. Per esempio:

- $\lim_{x\to 0} x\ln|x| = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to 0} \frac{\ln|x|}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right) \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0.$
- $\lim_{x\to 0}(\cos 3x)^{1/x} = (1^\infty) = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln(\cos 3x)} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(\cos 3x)}$. Poiché
$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos 3x)}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{-3\sin 3x}{\cos 3x} = 0,$$
risulta
$$e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(\cos 3x)} = e^0 = 1.$$
-
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right) = \left(\begin{array}{ll} \infty-\infty, & x\to 0^+ \\ -\infty+\infty, & x\to 0^- \end{array}\right) =$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{(H)}{=}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2\cos x - x\sin x} = 0.$$

Osservazione 8.82. Il Teorema di de l'Hopital può semplificare il calcolo di limiti complicati ma attenzione a non 'eccedere' nell'uso. Il limite $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^5 x}{x^5}$ è uguale a 1 (ciò si può verificare applicando il limite fondamentale). Tale limite può essere anche calcolato usando solo il teorema di De L'Hôpital, ma si deve applicare la derivazione 5 volte:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^5 x}{x^5} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{5\sin^4 x\cos x}{5x^4} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0}\frac{4\sin^3 x\cos^2 x - \sin^5 x}{4x^3} \overset{(H)}{=}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{12\sin^2 x\cos^3 x - 8\sin^4 x\cos x - 5\sin^4 x\cos x}{12x^2} = \dots$$

Osservazione 8.83. Il Teorema di de l'Hopital fornisce delle condizioni SUFFICIENTI affinché esista il limite
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = L.$$
Tali condizioni NON sono NECESSARIE: dalla convergenza del rapporto $\frac{f}{g}$ non segue, in generale, quella di $\frac{f'}{g'}$.

Ad esempio, siano $f(x) = x^2\sin\frac{1}{x}$ e $g(x) = \sin x$. Risulta
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x} = 1\cdot 0 = 0,$$
mentre
$$\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}}{\cos x} \quad \underline{\text{non esiste}}.$$

Osservazione 8.84. Molti dei limiti precedenti possono essere risolti anche attraverso strumenti diversi dal Teorema di de l'Hopital:

- utilizzo dei limiti notevoli;
- confronto tra infiniti e infinitesimi;
- polinomi di Taylor ($\rightsquigarrow$ nelle prossime lezioni).

Teorema 8.85 (del limite della derivata)**.** *Sia $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ **continua in** a **e derivabile in** $]a, b[$. Se esiste (finito o no) $\lim_{x \to a^+} f'(x)$, allora esiste anche $f'_+(a)$ e vale*

$$f'_+(a) = \lim_{x \to a^+} f'(x).$$

Dimostrazione. Le funzioni $f(x) - f(a)$ e $g(x) = x - a$ soddisfano le ipotesi del Teorema di de l'Hopital, dunque $\lim_{x \to a^+} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \overset{(H)}{=} \lim_{x \to a^+} f'(x)$. □

8.8 Derivate di ordini successivi

Definizione 8.86. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile sull'intervallo I. Se esiste la derivata della funzione $x \mapsto f'(x)$ in $x_0 \in I$, allora $(f')'(x_0)$ si dice la* derivata seconda *di f in x_0, e si denota con i simboli $f''(x_0)$ o $f^{(2)}(x_0)$.*

Osservazione 8.87. Allo stesso modo si definiscono per induzione le derivate di ordine k, con $k \in \mathbb{N}$:

- si definisce la funzione *derivata* 0*-ima* di f ponendo $f^{(0)} = f$;
- si definisce la derivata k-esima $f^{(k)}$ come la derivata (prima) della derivata la $(k-1)$-esima $f^{(k-1)}$:
$$f^{(k)}(x_0) = D(f^{(k-1)})(x_0) \quad \forall k \geq 1.$$
  k è detto l'ordine di derivazione.

Esempio 8.88. Sia $f(x) = 3^x$, $x \in \mathbb{R}$. Verificare che $f^{(k)}(x) = 3^x(\ln 3)^k$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Esempio 8.89. Sia $f(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$. Verificare che $f^{(k)}(x) = e^x$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Esempio 8.90. Sia $f(x) = \sin x$, $x \in \mathbb{R}$. Verificare che per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha $f^{(4k)}(x) = \sin x$, $f^{(4k+1)}(x) = \cos x$, $f^{(4k+2)}(x) = -\sin x$, $f^{(4k+3)}(x) = -\cos x$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

Definizione 8.91. *Sia I un intervallo. Definiamo per ogni $k \in \mathbb{N}$ l'insieme $C^k(I)$ delle funzioni k volte derivabili su I, tali che la derivata k-ima sia una funzione continua su I.*

Quindi:

- $C^0(I)$ è l'insieme delle funzioni continue su I;
- $C^1(I)$ è l'insieme delle funzioni derivabili su I, la cui derivata è una funzione continua; ecc.

Osservazione 8.92. L'esistenza della derivata k-esima implica la continuità della derivata $(k-1)$-esima e quindi, per induzione, di tutte le precedenti.

Osservazione 8.93. Si noti che valgono le inclusioni:

$$\ldots \subset C^2(I) \subset C^1(I) \subset C^0(I).$$

Le inclusioni sopra descritte sono strette.

Definizione 8.94. *Definiamo lo spazio delle funzioni la cui derivata k-ima esiste, ed è una funzione continua, per ogni $k \in \mathbb{N}$:*

$$C^\infty(I) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} C^k(I).$$

Esempio 8.95.
- I polinomi, a^x (con $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$), $\sin x$, $\cos x$, appartengono a $C^\infty(\mathbb{R})$.
- La funzione $\log_a x$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$) appartiene a $C^\infty(\mathbb{R}^+)$.

Osservazione 8.96. Dai teoremi di linearità delle derivate si ha che per ogni k vale, per induzione, il teorema di linearità per funzioni di classe C^k.
In particolare, ogni $C^k(I)$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Infatti, dalla linearità della derivazione, si ha

$$\forall f_1, f_2 \in C^k(I), \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R} : \quad c_1 f_1 + c_2 f_2 \in C^k(I).$$

Usando la derivata seconda si può stabilire la natura di un punto stazionario. Vale il seguente criterio.

Teorema 8.97 (Criterio della derivata seconda)**.** *Sia $f \in C^1(I)$ e x_0 un punto stazionario per f.*

- *Se esiste $f''(x_0) > 0$, allora x_0 è un punto di minimo relativo per f.*
- *Se esiste $f''(x_0) < 0$, allora x_0 è un punto di massimo relativo per f.*

Osservazione 8.98. Il Teorema 8.97 suggerisce *un metodo per la ricerca di punti di estremo relativo per funzioni due volte derivabili*.

Attenzione: la condizione nel Teorema 8.97 è SOLO SUFFICIENTE (ad esempio, si consideri la funzione $f(x) = x^4$ nel punto $x_0 = 0$).

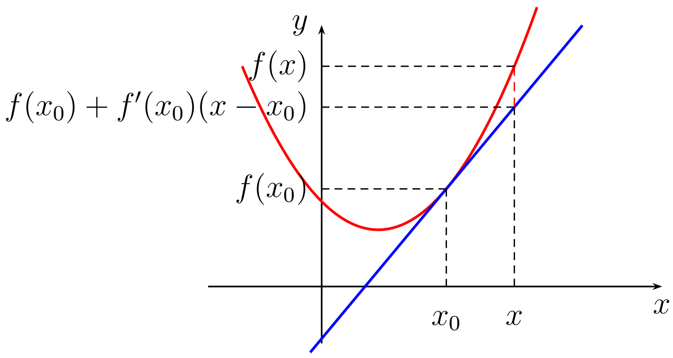
8.9 Differenziabilità

Osservazione 8.99 (Premessa)**.** Sia I intervallo aperto, $f : I \to \mathbb{R}$ derivabile in $x_0 \in I$. L'equazione della retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$ è data da

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

La differenza $\Lambda(x)$ tra l'ordinata del punto di ascissa x appartenente al grafico della funzione e quella del punto di ascissa x appartenente alla retta tangente è

$$\Lambda(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0).$$



Calcoliamo

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0} \frac{\Lambda(x)}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right] = 0.\end{aligned}$$

Pertanto, l'errore che si commette approssimando il valore della funzione $f(x)$ con l'ordinata $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ del punto di ascissa x sulla retta tangente al grafico di f in $(x_0, f(x_0))$, è un $o(x - x_0)$ per $x \to x_0$, cioè

$$\begin{aligned}&f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0) = \Lambda(x) = o(x - x_0) \\ &\qquad \Rightarrow \quad f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \text{per } x \to x_0.\end{aligned}$$

Definizione 8.100. *Sia I intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$. Diciamo che f è differenziabile in x_0 quando esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che si abbia*

$$f(x) = f(x_0) + \lambda(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \textit{per } x \to x_0,$$

cioè

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \lambda(x - x_0)}{x - x_0} = 0.$$

Il numero λ viene detto differenziale di f nel punto x_0, e viene indicato abitualmente con il simbolo $df(x_0)$.

Osservazione 8.101 (Significato geometrico)**.** La retta $y = f(x_0) + \lambda(x - x_0)$ approssima per $x \to x_0$ la curva $y = f(x)$ ad un ordine superiore a $x - x_0$. Una funzione differenziabile in un punto x_0 è quindi tale che il suo grafico, nell'intorno del punto $(x_0, f(x_0))$, può essere approssimato "bene" dalla retta $y = f(x_0) + \lambda(x - x_0)$ con coefficiente angolare λ. Tale retta è la retta tangente al grafico della funzione in quel punto. Vale infatti il seguente teorema.

Teorema 8.102. *f differenziabile in x_0 $\Leftrightarrow$ f derivabile in x_0. In tal caso $\lambda = f'(x_0)$.*

Dimostrazione.

$$f(x) = f(x_0) + \lambda(x - x_0) + o(x - x_0) \quad \text{per} \quad x \to x_0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - \lambda(x - x_0)}{x - x_0} = 0 \qquad \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lambda.$$

□

Osservazione 8.103. L' equivalenza data nel Teorema 8.102 vale solo per le funzioni in UNA variabile. Dall'equivalenza segue che, per le funzioni di una variabile reale, i due concetti di differenziabilità e derivabilità coincidono.

Osservazione 8.104. Ricordando le relazioni che legano la derivabilità e la continuità si ha che

$$\boxed{f \quad \text{differenziabile in } x_0 \quad \Rightarrow \quad f \quad \text{continua in } x_0}.$$

8.10 Il polinomio di Taylor

In questa sezione vogliamo studiare l'approssimazione di una funzione nell'intorno di un punto con un polinomio. Vedremo che potremo stimare l'ordine di infinitesimo della differenza fra la funzione e il polinomio che l'approssima. Sotto ipotesi di regolarità sulla funzione tale differenza potrà essere stimata poi in maniera ancora più precisa.

Cominciamo con la seguente osservazione. Sia x_0 punto di accumulazione per dom f:

1. se f è continua nel punto x_0 si ha
$$f(x) = f(x_0) + o(1) \quad \text{per } x \to x_0.$$
Infatti, ricordiamo che, essendo x_0 un punto di accumulazione per dom f, la continuità di f in x_0 si caratterizza tramite il limite $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$. D'altra parte:
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{1} = 0 \Longleftrightarrow f(x)-f(x_0) = o(1), \quad \text{per } x \to x_0.$$

2. Se f è derivabile in x_0, allora è differenziabile in x_0 e per la definizione di *differenziabilità*, si ha
$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + o(x-x_0) = = P_1(x) + o(x-x_0) \quad \text{per } x \to x_0, \tag{8.2}$$
dove $P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ è un polinomio di primo grado.

Il problema che ci poniamo ora è il seguente: approssimando f con un **polinomio di grado** $n > 1$, si commette un errore '*più piccolo*', cioè un $o\left((x-x_0)^n\right)$?

Vogliamo *generalizzare* la formula (8.2) a funzioni n volte derivabili: il problema è

1. trovare un polinomio P_n di grado n tale che si possa scrivere
$$f(x) = P_n(x) + o\left((x-x_0)^n\right) \quad \text{per } x \to x_0,$$
2. se possibile, esprimere P_n mediante le derivate di f in x_0 fino all'ordine n.

8.10.1 Il polinomio di Taylor con il resto di Peano

Teorema 8.105. *Siano $n \in \mathbb{N}$ e f una funzione definita in un intorno del punto $x_0 \in \mathbb{R}$ e derivabile $\boxed{n}$ volte in x_0. Allora esiste un unico polinomio P_n di grado $\leq \boxed{n}$ tale che*
$$f(x) = P_n(x) + o\left((x-x_0)^n\right) \quad \text{per } x \to x_0.$$
P_n è caratterizzato da $P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ per $k = 0, \dots, n$, ed è quindi dato da
$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k. \tag{8.3}$$
Questo polinomio viene detto polinomio di Taylor di f di ordine n e di centro x_0, e indicato con $T^n_{x_0} f$.

Nel caso in cui $x_0 = 0$, P_n è detto polinomio di Mac Laurin di f di ordine n e di centro x_0 *e indicato con $T^n f$.*

Come conseguenza del teorema, si ha quindi la formula

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^n\right) \quad \text{per } x \to x_0},$$

detta **formula di Taylor con il resto di Peano**. Questa formula è di estrema utilità nel calcolo dei limiti.

Dimostrazione. Possiamo supporre mediante una traslazione che $x_0 = 0$. Consideriamo il polinomio (che indichiamo con P al posto di P_n per semplicità di notazioni)

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n.$$

Osserviamo che $P^{(k)}(0) = f^{(k)}(0)$ per $k = 0, \cdots, n$.

Calcoliamo il limite $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x) - P(x)}{x^n}$, $n > 1$.

Questa è una forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Possiamo applicare l'Hopital, ottendo l'equivalenza con il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - P'(x)}{nx^{n-1}}.$$

Si ha di nuovo una forma indeterminata $\frac{0}{0}$. Possiamo riapplicare l'Hopital, ottendo l'equivalenza con il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{f^{(2)}(x) - P^{(2)}(x)}{n(n-1)x^{n-2}}.$$

In genere si applica l'Hopitale $n-1$ volte, ottenendo alla fine l'equivalenza con il limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x) - P^{(n-1)}(x)}{n!x}.$$

A questo punto non si può piú applicare l'Hopital poichè $f^{(n-1)}$ è derivabile in $x_0 = 0$ ma, in generale, non in un intorno di x_0. Procediamo quindi così:

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x) - P^{(n-1)}(x)}{n!x} = \\
&\lim_{x\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{n!x} - \lim_{x\to 0} \frac{P^{(n-1)}(x) - P^{(n-1)}(0)}{n!x} = \\
&\frac{1}{n!}\left(f^{(n)}(0) - P^{(n)}(0)\right) = 0.
\end{aligned}$$

Dunque $f(x) - P(x) = o(x^n)$ per $x \to 0$, dunque il polinomio P costruito come sopra è il polinomio cercato.

Dimostriamo ora l'unicità del polinomio di Taylor.

Sia $Q = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ un polinomio di grado $\leq n$ diverso da P. Allora esiste almeno un indice $k \in 0, \cdots, n$ tale che

$$c_k \neq \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

Sia $m = \min\left\{k : \quad c_k \neq \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\right\}$. Applicando l'Hopital come sopra si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - Q(x)}{x^n} = (H) = \cdots = (H) = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(m)}(0) - c_m m!}{n(n-1)\cdots(n-m+1)x^{n-m}} \neq 0,$$

e quindi $f(x) - Q(x) \neq o(x)^n$ per $x \to 0$. Dunque il polinomio P è univocamente determinato. $\square$

Osservazione 8.106. Scriviamo alcuni casi particolari della formula (8.3):

$$\begin{aligned}
&T^0_{x_0} f = P_0(x) = f(x_0)\\
&T^1_{x_0} f = P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)\\
&T^2_{x_0} f = P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \tfrac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2\\
&T^3_{x_0} f = P_3(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \tfrac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \tfrac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x - x_0)^3
\end{aligned}$$

$$T^n_{x_0} f = P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

Osservazione 8.107. Se $f(x) = \sum_{k=0}^{m} c_k (x - x_0)^k$ (f è un polinomio di grado $m \in \mathbb{N}$ in $(x - x_0)$), allora per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$T^n_{x_0}(f(x)) = \sum_{k=0}^{\min\{n,m\}} c_k (x - x_0)^k.$$

Esempio 8.108. Sia $f(x) = e^x$, poichè $f^{(n)}(x) = e^x$, $\forall n \in \mathbb{N}$, risulta $f^{(n)}(1) = e$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Pertanto

$$T^n_1(e^x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{e}{k!}(x - 1)^k.$$

In particolare si ha

$$\begin{aligned}
T^1_1(e^x) =& e + e(x - 1),\\
T^2_1(e^x) =& e + e(x - 1) + \frac{e}{2}(x - 1)^2.
\end{aligned}$$

Esempio 8.109. Sia $f(x) = \sin x$. $\forall j \in \mathbb{N}$ si trova

$$\begin{aligned}
f^{(4j)}(x) &= \sin x, & f^{(4j+1)}(x) &= \cos x,\\
f^{(4j+2)}(x) &= -\sin x, & f^{(4j+3)}(x) &= -\cos x.
\end{aligned}$$

In particolare, $\forall m \in \mathbb{N}$, si ha $f^{(2m)}(0) = 0$, $f^{(2m+1)}(0) = (-1)^m$. Pertanto

$$T^{2n+1}(\sin x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}.$$

Ad esempio $T^1(\sin x) = x$,
$T^3(\sin x) = x - \frac{x^3}{6}$.

Osservazione 8.110 (IMPORTANTE)**.** Le formule seguenti descrivono come si costruisce il polinomio di Taylor della somma, prodotto e composizione di due funzioni f e g, a partire dai polinomi di Taylor delle funzioni f e g rispettivamente.

1. $T^n_{x_0}(f+g) = T^n_{x_0} f + T^n_{x_0} g$,
2. $T^n_{x_0}(fg) = T^n_{x_0}\left(T^n_{x_0} f \cdot T^n_{x_0} g\right)$,
3. $T^n_{x_0}(g \circ f) = T^n_{x_0}\left(T^n_{f(x_0)} g \circ T^n_{x_0} f\right)$.

8.10.2 Polinomi di Mac Laurin notevoli

Ricordiamo che, nel caso in cui $x_0 = 0$, il polinomio di Taylor P_n è detto *polinomio di Mac Laurin di f di ordine n e di centro x_0* e indicato con $T^n f$. Riportiamo qui di seguito i polinomi di Mac Laurin di alcune funzioni notevoli.

$$T^n(e^x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!},$$

$$T^n(\ln(1+x)) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k}, \quad x \neq -1$$

$$T^{2n+1}(\sin x) = T^{2n+2}(\sin x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

$$T^{2n}(\cos x) = T^{2n+1}(\cos x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!},$$

$$T^{2n+1}(\sinh x) = T^{2n+2}(\sinh x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

$$T^{2n}(\cosh x) = T^{2n+1}(\cosh x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!},$$

$$T^n((1+x)^\alpha) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{n} x^n, \quad x > -1,\ \alpha > 0$$

$$T^n((1-x)^{-1}) = \sum_{k=0}^{n} x^k, \quad x \neq 1$$

$$T^{2n+1}(\arctan)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)}.$$

8.10.3 Sviluppi di Mac Laurin notevoli

Per $x \to 0$ si ha

$$e^x = 1 + x + \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{3!} + \ldots + \tfrac{x^n}{n!} + o(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$$

$$\log(1+x) = x - \tfrac{x^2}{2} + \tfrac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^{n+1}\tfrac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\sin x = x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} + \ldots + (-1)^n \tfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cos x = 1 - \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} + \ldots + (-1)^n \tfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sinh x = x + \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} + \ldots + \tfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\cosh x = 1 + \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} + \ldots + \tfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \tfrac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \ldots + \tbinom{\alpha}{n}x^n + o(x^n)$$

$$\tfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \tfrac{x}{2} - \tfrac{x^2}{8} + \tfrac{x^3}{16} + o(x^3)$$

$$\tan(x) = x + \tfrac{x^3}{3} + \tfrac{2}{15}x^5 + o(x^5)$$

$$\arctan(x) = x - \tfrac{x^3}{3} + \tfrac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^n \tfrac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+1})$$

Esempio 8.111. Calcoliamo il polinomio di Taylor di ordine 2 e centro 0 della funzione

$$f(x) = \begin{cases} \ln\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right) & \text{se } x \in \left]-\frac{1}{3}, 0\right[\cup \left]0, \frac{1}{3}\right[\\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Ricordando che si ha

$$\sin 3x = 3x - \frac{9}{2}x^3 + o(x^3)$$

e che $\ln(1+y) = y + o(y)$, si ha

$$\ln\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right) = \ln\left(1 - \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)\right) = -\frac{3}{2}x^2 + o(x^2),$$

cioè

$$T^2 f(x) = -\frac{3}{2}x^2.$$

I polinomi di Taylor possono essere molto utili nel calcolo dei limiti.

Esempio 8.112. Calcolare il limite

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^{\frac{1}{x\sin 2x}}.$$

Possiamo scrivere in forma esponenziale

$$\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)^{\frac{1}{x\sin 2x}} = e^{\frac{1}{x\sin 2x}\ln\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)}.$$

Il limite dell'esponente (ricordando il limite fondamentale di $\frac{\sin y}{y}$ e l'Esempio 8.111) vale

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x\sin 2x}\ln\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2x^2}\ln\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{3}{2}x^2+o(x^2)\right)\frac{1}{2x^2} = -\frac{3}{4}.$$

Dunque il nostro limite vale $e^{-3/4}$.

Esempio 8.113. Calcoliamo il polinomio di Taylor di ordine 6 in 0 della funzione

$$f(x) = \ln(1+x^2) - x^2\cos x.$$

Ricordiamo che

$$\ln(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 + o(z^3) \quad \text{per } z\to 0$$

e che

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4) \quad \text{per } x\to 0$$

per cui

$$\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^6 + o(x^6) \quad \text{per } x\to 0$$

e anche

$$x^2\cos x = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{24}x^6 + o(x^6) \quad \text{per } x\to 0.$$

Quindi si ha

$$f(x) = \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{24}\right)x^6 + o(x^6) = \frac{7}{24}x^6 + o(x^6) \quad \text{per } x\to 0,$$

e dunque

$$T^6 f(x) = \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{24}\right)x^6 = \frac{7}{24}x^6.$$

Esempio 8.114. Calcoliamo il limite

$$L = \lim_{x\to 0^+}\frac{x^2\cos x - \ln(1+x^2)}{7x^2\tan(x^4)}.$$

Ricordando che
$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x^4}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1,$$
il limite è uguale a
$$\lim_{x\to 0+}\frac{x^2\cos x-\ln(1+x^2)}{7x^6}.$$
Per l'Esempio 8.113 si ha quindi
$$L=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{7x^6}\left(-\frac{7}{24}x^6+o(x^6)\right)=-\frac{1}{24}.$$

Esempio 8.115. Calcolare il limite
$$L=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{\sin(x^{\frac{3}{2}})}}{(x-\sin x)\sqrt{x}}.$$
Per prima cosa semplifichiamo il limite ricordandoci che $\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$, per cui
$$L=6\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt[3]{\sin(x^{\frac{3}{2}})}}{x^3\sqrt{x}}.$$
Per avere solo potenze intere cambiamo variabile, ponendo $y=\sqrt{x}$. Il limite diventa
$$\begin{aligned}6\lim_{y\to 0^+}\frac{y-\sqrt[3]{\sin(y^3)}}{y^6y}&=6\lim_{y\to 0^+}\frac{1-\sqrt[3]{\frac{\sin(y^3)}{y^3}}}{y^6}\\&=6\lim_{t\to 0^+}\frac{1-\sqrt[3]{\frac{\sin t}{t}}}{t^2}\end{aligned}$$
(abbiamo usato il cambiamento di variabili $t=y^3$). Si ha
$$\frac{\sin t}{t}=\frac{t-\frac{1}{6}t^3+o(t^3)}{t}=1-\frac{1}{6}t^2+o(t^2)$$
e $\sqrt[3]{1+z}=(1+z)^{1/3}=1+\frac{1}{3}z+o(z)$, per cui
$$\sqrt[3]{\frac{\sin t}{t}}=\sqrt[3]{1-\frac{1}{6}t^2+o(t^2)}=1-\frac{1}{18}t^2+o(t^2).$$
Dunque
$$\begin{aligned}L&=6\lim_{t\to 0^+}\frac{1-\sqrt[3]{\frac{\sin t}{t}}}{t^2}\\&=6\lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{1}{18}t^2+o(t^2)}{t^2}=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Esempio 8.116. *Calcolare il limite*

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin x}{x(1-\cos x)}.$$

Si ha

$$\begin{aligned}\sin x =& T^3(\sin x)+o(x^3) = x-\frac{x^3}{6}+o(x^3),\\ \cos x =& T^3(\cos x)+o(x^3) = T^2(\cos x)+o(x^3) = 1-\frac{x^2}{2}+o(x^3).\end{aligned}$$

Quindi si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\left[x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right]}{x\left\{1-\left[1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)\right]\right\}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^3}{6}+o(x^3)}{\frac{x^3}{2}+o(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3}{6}\frac{2}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

8.10.4 Formula di Taylor con il resto di Lagrange

Sia f derivabile, in un intorno I di x_0, $(n+1)$ volte . Allora applicando il Teorema di Cauchy si dimostra che se $x \in I$,

- per $x > x_0$, esiste $\xi \in]x_0, x[$,
- per $x < x_0$, esiste $\xi \in]x, x_0[$,

tale che

$$f(x) = T^n_{x_0}(f(x)) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1},$$

cioè il **resto** della formula di Taylor si può esprimere nella forma (detta **di Lagrange**)

$$\boxed{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}}.$$

Si osservi che nel caso in cui $n=0$ si ritrova il Teorema di Lagrange.

Esempio 8.117. Consideriamo $f(x) = e^x$. Tale funzione è derivabile infinite volte. La formula di Taylor con il resto di Lagrange diventa (per $x_0 = 0$)

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + e^{\xi}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

8.10.5 Criterio della derivata n-esima

Sia x_0 un punto stazionario per una funzione f. Preso $x \in I$, intorno di x_0, *studiando il segno di* $f(x) - f(x_0)$ si può stabilire

- se x_0 sia un punto di massimo relativo: $f(x) - f(x_0) \leq 0$,
- se x_0 sia un punto di minimo relativo: $f(x) - f(x_0) \geq 0$,
- se x_0 **NON** è né un punto di massimo né un punto di minimo: $f(x) - f(x_0)$ **cambia il segno**.

Proposizione 8.118 (Criterio della derivata n-esima)**.** *Sia* $f :]a, b[\to \mathbb{R}$*,* n *volte derivabile in* $x_0 \in]a, b[$*,* $n \geq 2$*, e supponiamo che*

$$f'(x_0) = f^{(2)}(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

Allora si hanno le seguenti alternative:

- *se* n *è pari e* $\begin{cases} f^{(n)}(x_0) < 0, & \text{allora si ha un punto di massimo relativo per } f \text{ in } x_0; \\ f^{(n)}(x_0) > 0, & \text{allora si ha un punto di minimo relativo per } f \text{ in } x_0; \end{cases}$
- *se* n *è dispari e* $\begin{cases} f^{(n)}(x_0) < 0, & \text{allora } f \text{ è strettamente decrescente in un intorno di } x_0; \\ f^{(n)}(x_0) > 0, & \text{allora } f \text{ è strettamente crescente in un intorno di } x_0. \end{cases}$

Idea della dimostrazione. Il Teorema sui polinomi di Taylor (Teorema 8.105) ci assicura che f si comporta come $f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n$ nel senso che la formula di Taylor con il resto di Peano ci dà:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o\left((x - x_0)^n\right).$$

□

Capitolo 9

Cenni sulle funzioni convesse

Definizione 9.1. *Sia I in intervallo di $\mathbb{R}$. Una funzione $f : I \to \mathbb{R}$ si dice convessa se, comunque si prendano due punti $x_1, x_2 \in I$ e λ, $0 \leq \lambda \leq 1$, si ha*

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2).$$

La funzione $g : I \to \mathbb{R}$ si dice concava se $-g$ è convessa.

Se si pone $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, al variare di $\lambda \in [0,1]$ il punto x descrive tutto l'intervallo chiuso di estremi x_1 e x_2. La condizione di convessità si può anche enunciare dicendo che, per ogni $x_1, x_2 \in I$, con $x_1 < x_2$, e per ogni $x \in [x_1, x_2]$, si ha

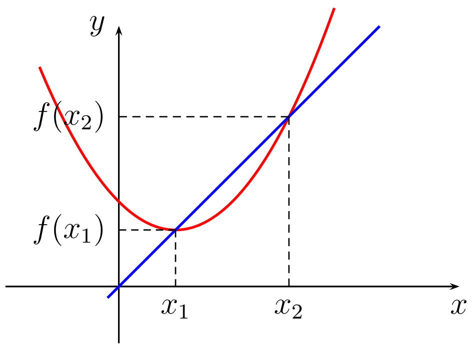
$$f(x) \leq \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} f(x_1) + \frac{x_1 - x}{x_1 - x_2} f(x_2) = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1).$$

L'ultima espressione descrive la retta passante per i punti $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$, cosicché, dal punto di vista geometrico, la convessità di una funzione si può definire così:

sia $f : I \to \mathbb{R}$.

- *f è convessa* in I $\Leftrightarrow$ $\forall x_1, x_2 \in I$ il segmento che congiunge $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ è **al di sopra** del grafico di f $(\geq)$ nell'intervallo di estremi x_1 e x_2.

- *f è strettamente convessa* in I $\Leftrightarrow$ $\forall x_1, x_2 \in I$ il segmento che congiunge $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ è **strettamente al di sopra** del grafico di f $(>)$ nell'intervallo di estremi x_1 e x_2.

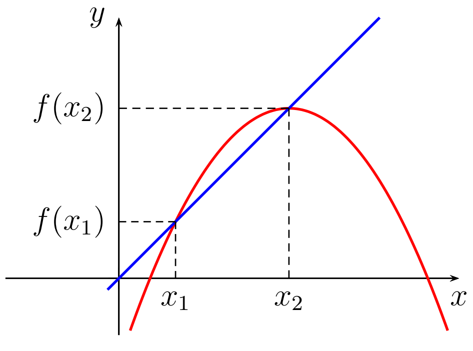


Analogamente, la concavità si caratterizza dal punto di vista geometrico nella forma seguente:

sia $f : I \to \mathbb{R}$.

- *f è concava* in I $\Leftrightarrow$ $\forall x_1, x_2 \in I$ il segmento che congiunge $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ è **al di sotto** del grafico di f $(\leq)$ nell'intervallo di estremi x_1 e x_2.

- *f è strettamente concava* in I $\Leftrightarrow$ $\forall x_1, x_2 \in I$ il segmento che congiunge $(x_1, f(x_1))$ e $(x_2, f(x_2))$ è **strettamente al di sotto** del grafico di f $(<)$ nell'intervallo di estremi x_1 e x_2.



Si può dimostrare il seguente risultato importante.

Teorema 9.2. *Sia I un intervallo di $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ convessa e x_0 un punto di I. Allora la funzione*

$$F(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

è crescente in $I \setminus \{x_0\}$.

Segue il seguente corollario:

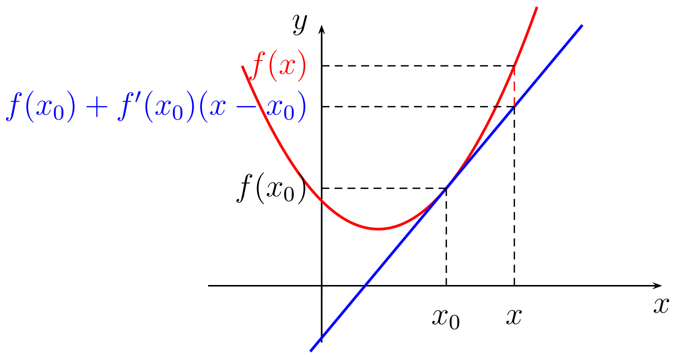
Corollario 9.3. *Una funzione convessa in un intervallo I è continua in ogni punto interno a I. Se f non è derivabile in un punto interno x, allora x è un punto angoloso. Gli unici punti di eventuale discontinuità sono gli estremi dell'intervallo I.*

9.1 Convessità e derivabilità

Supponiamo ora che la funzione f sia derivabile in I. Allora la convessità si caratterizza con il seguente teorema.

Theorem 9.4. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile in I. Condizione necessaria e sufficiente affinché f sia convessa in I è che, per ogni $x, x_0 \in I$, risulti*

$$f(x) \geq f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \tag{9.1}$$



Osservazione 9.5. La **retta tangente** è sempre (tranne il punto di contatto) **sotto** il grafico della funzione f.

Osservazione 9.6. Nelle ipotesi del Teorema 9.4, sia x_0 un punto stazionario. Allora, se f è convessa, da (9.1) segue che

$$f(x) \geq f(x_0), \quad \forall x \neq x_0$$

quindi $x_0 = \min_I f(x)$, cioè x_0 è un punto di minimo assoluto.

Teorema 9.7. *Sia $f : I \to \mathbb{R}$.*

1. *Se f derivabile in I, allora*

(a) *f convessa $\Leftrightarrow$ f' crescente,*

(b) *f concava $\Leftrightarrow$ f' decrescente.*

2. *Se f è derivabile due volte in I, allora*

   (a) *f convessa $\Leftrightarrow$ $f''(x) \geq 0$, $\forall x \in I$,*

   (b) *f concava $\Leftrightarrow$ $f''(x) \leq 0$, $\forall x \in I$.*

Esempio 9.8. Sia $f(x) = a^x$, dove $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$. Si ha

$$f'(x) = a^x \ln a \quad \text{e} \quad \boxed{f''(x) = a^x(\ln a)^2 > 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}}.$$

Quindi f è STRETTAMENTE CONVESSA su $\mathbb{R}$.

Esempio 9.9. Sia $f(x) = \log_a x$, dove $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ e $x \in \text{dom} f = \mathbb{R}^+$. Si ha

$$f'(x) = \frac{1}{x \ln a} \quad \text{e} \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2 \ln a}.$$

Quindi

- se $0 < a < 1$, $\ln a < 0$, $f''(x) > 0$, $\forall x \in \text{dom} f$ e f è STRETTAMENTE CONVESSA su $\mathbb{R}^+$,
- se $a > 1$ $\ln a > 0$, $f''(x) < 0$, $\forall x \in \text{dom} f$ e f è STRETTAMENTE CONCAVA su $\mathbb{R}^+$.

Esempio 9.10. Sia $f(x) = x^\alpha$, dove $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x > 0$. Si ha $f''(x) = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2}$.
Quindi

- se $\alpha < 0$ o $\alpha > 1$, $f''(x) > 0$, $\forall x > 0$ e f è STRETTAMENTE CONVESSA,
- se $0 < \alpha < 1$, $f''(x) < 0$, $\forall x > 0$ e f è STRETTAMENTE CONCAVA.
- se $\alpha = 0$, $f(x) = 1$, $\forall x > 0$, f è SIA CONVESSA CHE CONCAVA
- se $\alpha = 1$, $f(x) = x$, $\forall x > 0$, f è SIA CONVESSA CHE CONCAVA.

Definizione 9.11. *Siano $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ e $x_0 \in]a, b[$. Diciamo che x_0 è PUNTO DI FLESSO per f se*

(i) *esiste un intorno **destro** di x_0 nel quale f è **convessa** (**concava**)*

ed

(ii) *esiste un intorno **sinistro** di x_0 nel quale f è **concava** (**convessa**).*

Proposizione 9.12. *Sia x_0 un punto di flesso per f. Se esiste $f''(x_0)$, allora $f''(x_0) = 0$.*

Osservazione 9.13. La condizione è NECESSARIA ma NON SUFFICIENTE. Per esempio, sia $f(x) = x^4$. Si ha $f'(0) = 0$ e $f''(0) = 0$. $x_0 = 0$ è PUNTO DI MINIMO, NON DI FLESSO.

Capitolo 10

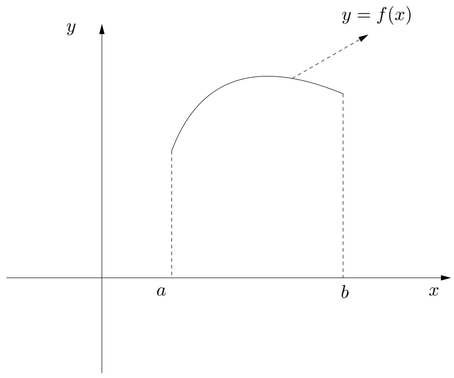
Integrale di Riemann

In questo capitolo svilupperemo la teoria dell'integrazione secondo Riemann per funzioni di una variabile reale.

10.1 Motivazioni

Consideriamo i seguenti problemi.

1. **Calcolo di un'area.** Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e positiva il cui grafico sia quello rappresentato in figura.



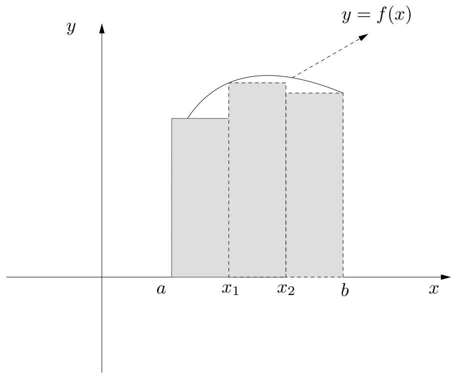
L'area A della regione di piano compresa tra il grafico di f e il segmento $[a, b]$ riportato sull'asse delle x non è calcolabile elementarmente se il grafico di f non è rettilineo. Un modo per calcolare A può essere quello di usare il seguente processo di approssimazione. Dividiamo l'intervallo $[a, b]$ tramite dei punti di suddivisione $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e poniamo per comodità $x_0 = a$ e $x_{n+1} = b$. Sia I_j l'intervallo $[x_j, x_{j+1}]$. Se I_j è abbastanza piccolo, la variazione di f su I_j sarà piccola, cioè f sarà approssimativamente costante. Sia $\xi_j \in I_j$: un'approssimazione dell'area A_j sottesa da f su I_j è dunque

$$A_j \sim f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j).$$

Concludiamo che un'approssimazione di A è data dalla somma delle A_j, cioè

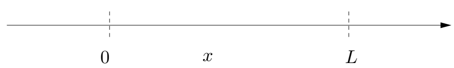
$$A \sim \tilde{A} = \sum_{j=0}^{n} f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j). \tag{10.1}$$

Se la scelta dei punti di suddivisione è operata in modo da risultare abbastanza fitta, ci si aspetta che $\tilde{A}$ sia una buona approssimazione di A: anzi, più la suddivisione è fitta, più il valore $\tilde{A}$ si avvicinerà ad A.



2. **Calcolo della massa di una trave.** Consideriamo una trave di lunghezza L riportata sull'asse reale in modo che un estremo sia in $x = 0$ e l'altro in $x = L$. Sia $\rho(x)$ la densità di massa per unità di lunghezza nel punto $x \in [0, L]$: ciò significa che una piccola zona di lunghezza ε vicino a x ha massa

$$m_\varepsilon \sim \rho(x)\varepsilon.$$



La funzione $\rho(x)$ non è supposta continua: in questo modo è possibile tenere conto del fatto che la trave sia composta di diversi materiali nelle sue diverse parti, un caso che può essere utile nelle applicazioni.

Un'approssimazione della massa M della trave può ottenersi nel seguente modo: scegliamo dei punti di suddivisione $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ponendo per comodità $x_0 = 0$ e $x_{n+1} = L$, ed includendo in essi i punti di discontinuità di ρ. Se l'intervallo $I_j = [x_j, x_{j+1}]$ è sufficientemente piccolo, la massa del tratto I_j è data circa da

$$m_j \sim \rho(\xi_j)(x_{j+1} - x_j)$$

dove ξ_j è un punto di I_j, ad esempio il suo punto medio. Dunque un'approssimazione della massa M della trave è data dall'espressione

$$M \sim \tilde{M} = \sum_{j=0}^{n} \rho(\xi_j)(x_{j+1} - x_j).$$

All'infittirsi della suddivisione, $\tilde{M}$ diverrà un'approssimazione sempre migliore di M. Abbiamo ottenuto un risultato simile a quello della formula (10.1).

10.2 Definizione di integrale

Sia $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo limitato con $a < b$, e sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata, cioè esiste una costante $M \geq 0$ tale che per ogni $x \in [a, b]$

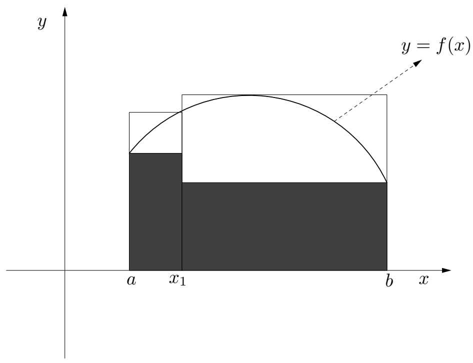
$$-M \leq f(x) \leq M.$$

Diamo ora una formulazione matematica rigorosa delle idee viste nella sezione precedente.

1. Diciamo che $S = \{x_0, x_1, \dots, x_{n+1}\}$ è una **suddivisione** di $[a, b]$ se
$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} = b.$$

2. Sia $\xi_j \in [x_j, x_{j+1}]$: diremo che la quantità
$$\sum_{j=0}^{n} f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j)$$
è una **somma di Riemann** di f relativa alla suddivisione S. Come visto nella sezione precedente, le somme di Riemann nascono in modo naturale nelle applicazioni.

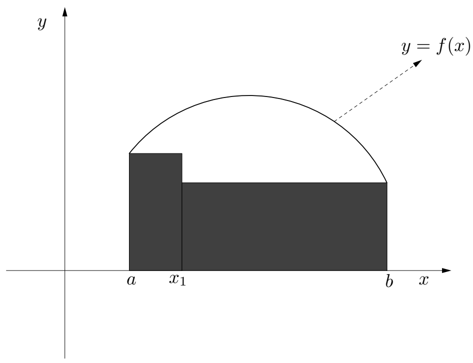
3. Poniamo
$$\Sigma'(f, S) := \sum_{j=0}^{n} \left[\inf_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x) \right] (x_{j+1} - x_j)$$
e
$$\Sigma''(f, S) := \sum_{j=0}^{n} \left[\sup_{x \in [x_j, x_{j+1}]} f(x) \right] (x_{j+1} - x_j)$$
I numeri reali $\Sigma'(S, f)$ e $\Sigma''(S, f)$ si chiamano rispettivamente **somma inferiore** e **somma superiore** associate alla funzione f e alla suddivisione S. Chiaramente, ogni somma di Riemann relativa a S è compresa tra $\Sigma'(f, S)$ e $\Sigma''(f, S)$.



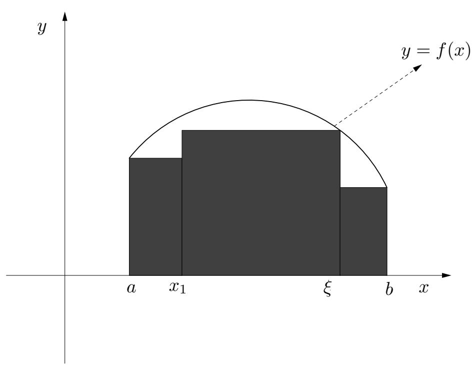
4. Diciamo che una suddivisione T è un raffinamento della suddivisione S se T contiene i punti di suddivisione di S, cioè $S \subseteq T$. In tal caso si ha che

$$\Sigma'(f,S) \leq \Sigma'(f,T) \qquad \text{e} \qquad \Sigma''(f,S) \geq \Sigma''(f,T).$$

E' facile capire queste disuguaglianze nel caso in cui T si ottiene da S aggiungendo un punto di suddivisione ξ: il risultato generale discende da questo, aggiungendo un punto alla volta. Se $S = \{a, x_1, b\}$ e $T = \{a, x_1, \xi, b\}$ si ha per le somme inferiori



e



Dunque "raffinando la suddivisione di $[a, b]$ la somma inferiore cresce, mentre quella superiore decresce.

5. Poniamo

$$\mathcal{I}'(f) := \sup_S \Sigma'(f,S) \quad \text{e} \quad \mathcal{I}''(f) := \inf_S \Sigma''(f,S).$$

I numeri reali $\mathcal{I}'(f)$ e $\mathcal{I}''(f)$ si dicono rispettivamente **integrale inferiore** e **integrale superiore** di f su $[a, b]$.

Abbiamo immediatamente la disuguaglianza $\mathcal{I}'(f) \leq \mathcal{I}''(f)$.

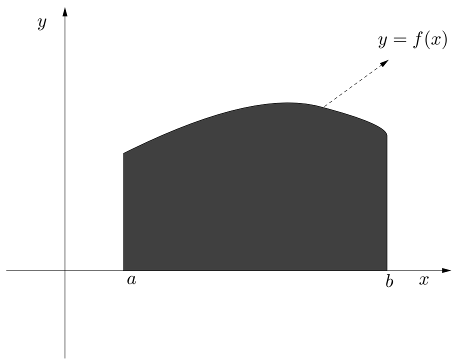
6. Possiamo ora dare la definizione di integrabilità nel senso di Riemann.

Definizione 10.1 (Integrabilità secondo Riemann). *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, e sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Diciamo che f è integrabile secondo Riemann se $\mathcal{I}'(f) = \mathcal{I}''(f)$. Tale valore si dice* integrale di f sull'intervallo $[a, b]$*, e si indica con i simboli*

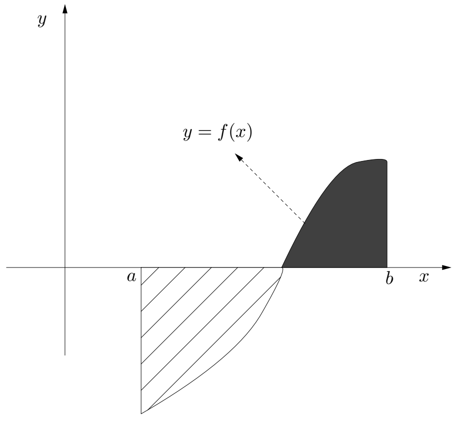
$$\int_a^b f(x)\,dx \qquad \textit{oppure} \qquad \int_a^b f\,dx.$$

Poiché in questo corso useremo solo l'integrazione secondo Riemann, ometteremo di indicare che l'integrabilità è intesa nel senso di Riemann.

Se f è positiva, $\int_a^b f(x)\,dx$ può interpretarsi come l'area compresa tra l'asse delle ascisse e il grafico di f.



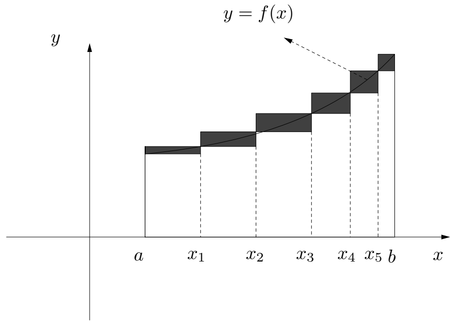
Nel caso in cui $f(x) \leq 0$ per ogni $x \in [a, b]$, $\int_a^b f(x)\,dx$ rappresenta l'area tra f e l'asse delle ascisse ma con il segno negativo. Se f cambia segno sull'intervallo $[a, b]$, $\int_a^b f(x)\,dx$ tiene conto del "bilanciamento" tra le aree positive e quelle negative.



7. La seguente proposizione contiene una caratterizzazione della classe delle funzioni integrabili.

Proposizione 10.2 (C.n.s. per l'integrabilità). *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, e sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Allora f è integrabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una suddivisione S_ε di $[a, b]$ tale che*

$$\Sigma''(f, S_\varepsilon) - \Sigma'(f, S_\varepsilon) \leq \varepsilon. \tag{10.2}$$



Geometricamente possiamo interpretare il risultato in questo modo: f è integrabile se e solo se il suo grafico può ricoprirsi con un numero finito di rettangoli, associati ad una suddivisione la somma delle cui aree è piccola a piacere.

Dimostrazione. Supponiamo che f sia integrabile, cioè si abbia $\mathcal{I}'(f) = \mathcal{I}''(f)$, e sia $\eta > 0$. Possiamo trovare due suddivisioni T_1 e T_2 di $[a, b]$ tali che

$$\mathcal{I}'(f) \leq \Sigma'(f, T_1) + \eta \quad \text{e} \quad \Sigma''(f, T_2) \leq \mathcal{I}''(f) + \eta.$$

Considerando la suddivisione $S_\eta = T_1 \cup T_2$ si ha

$$\mathcal{I}'(f) \leq \Sigma'(f, S_\eta) + \eta \quad \text{e} \quad \Sigma''(f, S_\eta) \leq \mathcal{I}''(f) + \eta.$$

Otteniamo

$$\Sigma''(f, S_\eta) \leq \mathcal{I}''(f) + \eta = \mathcal{I}'(f) + \eta \leq \Sigma'(f, S_\eta) + 2\eta$$

da cui

$$\Sigma''(f, S_\eta) - \Sigma'(f, S_\eta) \leq 2\eta.$$

Se $2\eta < \varepsilon$, la suddivisione S_η è quella cercata.

Viceversa supponiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esista una suddivisione S_ε di $[a, b]$ tale che

$$\Sigma''(f, S_\varepsilon) - \Sigma'(f, S_\varepsilon) \leq \varepsilon.$$

Allora si ha

$$\mathcal{I}''(f) \leq \Sigma''(f, S_\varepsilon) \leq \Sigma'(f, S_\varepsilon) + \varepsilon \leq \mathcal{I}'(f) + \varepsilon.$$

Poiché ε è arbitrario, si ha $\mathcal{I}''(f) \leq \mathcal{I}'(f)$. Poiché è sempre $\mathcal{I}'(f) \leq \mathcal{I}''(f)$, si ottiene $\mathcal{I}'(f) = \mathcal{I}''(f)$, cioè f è integrabile. ∎

8. Sia S_ε una suddivisione di $[a, b]$ tale che valga (10.2), e sia

$$\Sigma = \sum_{j=0}^{n} f(\xi_j)(x_{j+1} - x_j)$$

una somma di Riemann associata a S_ε. Dalle disuguaglianze

$$\Sigma'(f, S_\varepsilon) \leq \Sigma \leq \Sigma''(f, S_\varepsilon)$$

e

$$\Sigma'(f, S_\varepsilon) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq \Sigma''(f, S_\varepsilon)$$

ricaviamo la disuguaglianza

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx - \Sigma \right| < \varepsilon. \tag{10.3}$$

Dunque una qualsiasi somma di Riemann relativa S_ε fornisce una approssimazione dell'integrale di f su $[a, b]$.

10.3 Classi di funzioni integrabili

In questa sezione vediamo che la classe di funzioni integrabili è molto ampia, così da coprire gran parte delle funzioni utili nelle applicazioni all'ingegneria.

1. Chiaramente **sono integrabili le funzioni costanti**, ed anzi sappiamo calcolare anche il valore del loro integrale

$$\int_a^b c\, dx = c(b - a).$$

2. **Sono sicuramente integrabili le funzioni continue** $f : [a, b] \to \mathbb{R}$.

Innanzitutto, se f è continua su $[a, b]$, f è limitata per il teorema di Weierstrass. Per vedere l'integrabilità , fissiamo $\eta > 0$ e dividiamo l'intervallo $[a, b]$ in n parti uguali, dunque di lunghezza $(b - a)/n$. Essendo f continua, se n è molto grande avremo che l'oscillazione di f su ogni intervallo sarà minore di η: di conseguenza, la parte di grafico di f relativa ad ogni intervallo potrà essere inclusa in un rettangolo di base $(b - a)/n$ e di altezza η. Sommando le aree di tutti questi rettangoli otterremo una quantità uguale a

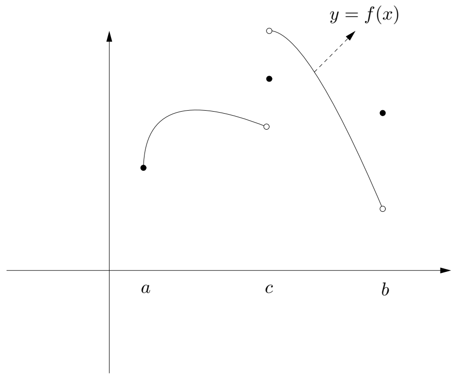
$$n \frac{b - a}{n} \eta = (b - a)\eta,$$

che per l'arbitrarietà di η può essere resa piccola a piacere.

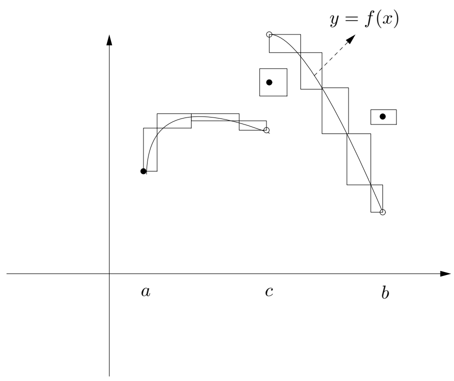
3. Siamo però interessati ad integrare anche funzioni discontinue (come nell'esempio del calcolo della massa). Una classe di funzioni discontinue molto utili nelle applicazioni sono le funzioni **continue a tratti**. Diciamo che $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua a tratti se esiste una suddivisione $S = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n+1}\}$ di $[a, b]$ tale che f è continua su ogni intervallo aperto $]x_j, x_{j+1}[$ ed esistono finiti i limiti

$$\lim_{x \to x_j^+} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to x_{j+1}^-} f(x).$$

Un grafico tipico di funzioni continue a tratti è il seguente.



Anche le funzioni continue a tratti sono integrabili. A parte i valori in corrispondenza dei punti della suddivisione S, il grafico di f è contenuto nell'unione di grafici di funzioni continue: dunque in base al punto precedente, possiamo ricoprirlo tramite un numero finito di rettangoli di area piccola a piacere. I punti eccezionali sono poi in numero finito: dunque possiamo ricoprirli con un numero finito di quadrati di area piccola a piacere. Globalmente, il grafico di f viene così ricoperto con rettangoli la somma delle cui aree è piccola a piacere: dunque f è integrabile.



4. Non tutte le funzioni limitate sono integrabili. Ad esempio non lo è la funzione $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ data da
$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ è razionale} \\ 0 & \text{se } x \text{ è irrazionale} \end{cases}$$
poiché $\mathcal{I}'(f) = 0$ e $\mathcal{I}''(f) = 1$. f è detta *funzione di Dirichlet*.

10.4 Proprietà dell'integrale

Vediamo ora alcune proprietà del calcolo integrale molto utili nelle applicazioni.

1. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ due funzione integrabili, e siano $\alpha, \beta, \lambda \in \mathbb{R}$. Si può innanzitutto dimostrare che le funzioni
$$f + g, \qquad \lambda f, \qquad |f|$$
e la restrizione di f a qualsiasi sottointervallo sono a loro volta integrabili. Inoltre valgono le seguenti proprietà .

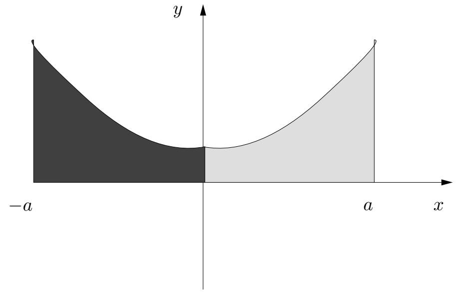
   (a) **Linearità** :
   $$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))\, dx = \alpha \int_a^b f(x)\, dx + \beta \int_a^b g(x)\, dx;$$

   (b) **Confronto**: se $f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [a, b]$, si ha
   $$\int_a^b f(x)\, dx \leq \int_a^b g(x)\, dx;$$

   (c) **Suddivisione**: se $c \in]a, b[$
   $$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx;$$

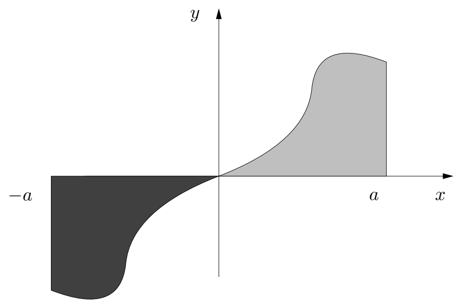
   (d) **Confronto con il modulo**:
   $$\left| \int_a^b f(x) \right| dx \leq \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

2. Se la funzione f è definita su un intervallo simmetrico rispetto all'origine, cioè del tipo $[-a, a]$ con $a > 0$, e f possiede particolari **simmetrie**, esse si riflettono sul calcolo dell'integrale. Se $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ è una funzione **pari** (cioè $f(-x) = f(x)$), allora
$$\int_{-a}^a f(x)\, dx = 2 \int_0^a f(x)\, dx.$$



Se invece f è una funzione **dispari** (cioè $f(-x) = -f(x)$) si ha

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$



10.5 La media integrale

L'integrale può essere usato per fornire una generalizzazione del concetto di media per grandezze che variano.

1. Per capire il collegamento tra l'integrale ed il concetto di media, torniamo al caso delle funzioni continue. Abbiamo visto che esse sono integrabili considerando la suddivisione S di $[a, b]$ in n intervalli uguali di ampiezza $(b-a)/n$ e vedendo che, relativamente ad essa, somma inferiore e somma superiore si discostano di una quantità sempre più piccola al crescere di n. Scegliamo un punto ξ_i qualsiasi all'interno dell'i-esimo intervallo: per definizione di somma inferiore e superiore abbiamo la disuguaglianza

$$\Sigma'(f, S) \leq f(\xi_1)\frac{b-a}{n} + f(\xi_2)\frac{b-a}{n} + \cdots + f(\xi_n)\frac{b-a}{n} \leq \Sigma''(f, S).$$

   Poiché $\Sigma'(f, S)$ e $\Sigma''(f, S)$ sono sempre più vicini tra loro e vicini all'integrale di f al crescere di n, concludiamo che per n sempre più grande la quantità

$$\frac{f(\xi_1) + f(\xi_2) + \cdots + f(\xi_n)}{n}(b-a) \sim \int_a^b f(x)\,dx$$

e cioè

$$\frac{f(\xi_1) + f(\xi_2) + \cdots + f(\xi_n)}{n} \sim \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Dunque l'integrale di f diviso per $b-a$ rappresenta una sorta di media aritmetica dei valori della f (i valori di f sono infiniti, noi abbiamo operato in un certo senso un campionamento).

2. In base a quanto visto, siamo portati a dare la seguente definizione per una qualsiasi funzione integrabile: chiamiamo **media integrale** di una funzione integrabile f su $[a, b]$ il valore

$$M_f = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Scrivendo la relazione precedente nella forma

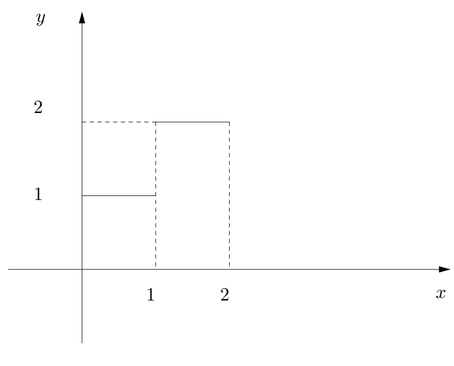
$$\int_a^b f(x)\,dx = M_f(b-a),$$

deduciamo che M_f ha il seguente significato geometrico: tenendo conto della convenzione sui segni sulle aree, l'area associata al grafico di f è equivalente ad un rettangolo di base $b-a$ e altezza M_f.

Bisogna notare che se f è discontinua, il valore M_f è un valore medio in un senso molto debole. Sicuramente

$$\inf_{[a,b]} f \leq M_f \leq \sup_{[a,b]} f$$

ma non è detto che esista $x \in [a, b]$ tale che $f(x) = M_f$: in altre parole M_f potrebbe non essere mai assunto dalla funzione. Questa situazione capita ad esempio per la funzione riportata in figura:



Si ha infatti $M_f = 3/2$, ed f assume solo i valori 1 e 2.

3. Nel caso delle funzioni continue, la media integrale M_f è effettivamente un valore assunto da f.

Teorema 10.3 (Teorema della media). *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora esiste $c \in [a, b]$ tale che $f(c) = M_f$ e cioè*

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(c)(b - a).$$

Dimostrazione. Siano m e M il minimo ed il massimo di f su $[a, b]$: dalla disuguaglianza

$$\forall x \in [a, b] : m \leq f(x) \leq M,$$

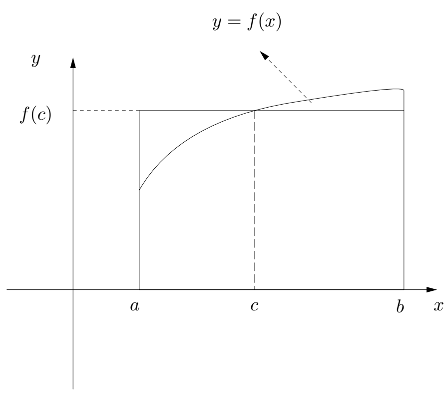
integrando su $[a, b]$ ed utilizzando la proprietà del confronto si ha la disuguaglianza

$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M(b - a),$$

che dividendo per $b - a$ porta a

$$m \leq M_f \leq M.$$

Poiché f assume, essendo continua, tutti i valori intermedi tra m e M, si ha che esiste $c \in [a, b]$ tale che $f(c) = M_f$, ed il teorema è così dimostrato. ■



10.6 I teoremi fondamentali del calcolo

In questa sezione collegheremo il problema dell'integrazione al problema del calcolo della primitiva di una funzione: in ciò consistono i teoremi fondamentali del calcolo.

10.6.1 Il problema della primitiva

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo aperto, e siano $f : I \to \mathbb{R}$ e $F : I \to \mathbb{R}$ due funzioni. Diciamo che F è una **primitiva** di f su I se F è derivabile su I e si ha

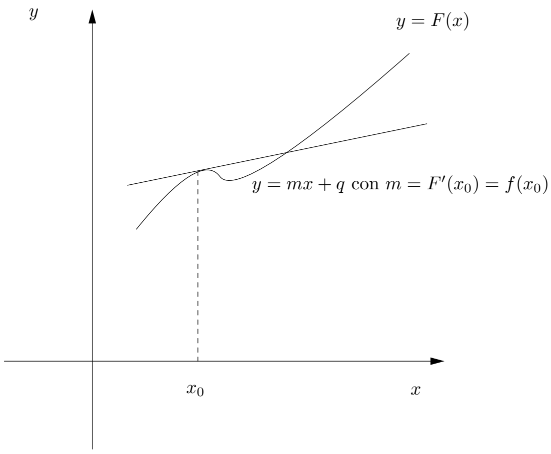
$$\forall x \in I \, : \, F'(x) = f(x).$$

Ad esempio, $F(x) = x^2$ è una primitiva su $\mathbb{R}$ di $f(x) = 2x$, così come $G(x) = \frac{\sin(2x)}{2}$ è una primitiva su $\mathbb{R}$ di $g(x) = \cos(2x)$.

L'insieme delle primitive di f (se esistono) si usa indicare con il simbolo

$$\int f(x)\,dx;$$

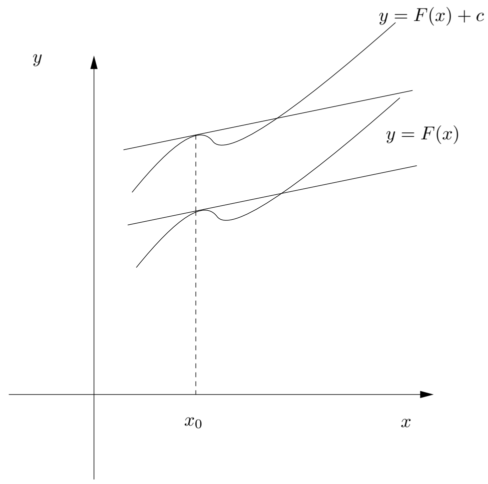
la scelta del simbolo già anticipa il legame con il problema dell'integrazione. Geometricamente, una primitiva F di f è una funzione tale che per ogni $x_0 \in I$ la tangente al grafico di F nel punto x_0 è una retta il cui coefficiente angolare è proprio pari a $f(x_0)$.



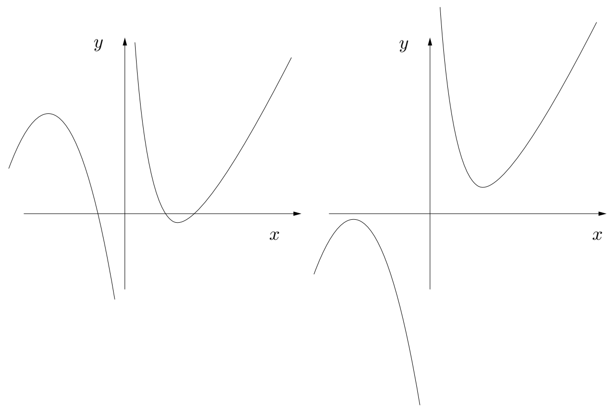
Il **problema delle primitive** può enunciarsi così : **determinare l'insieme di tutte le primitive su** I **della funzione** $f : I \to \mathbb{R}$. Tale problema non è affatto semplice: innanzitutto f potrebbe non ammettere primitive; oppure potrebbe ammetterne, ma esse non risultano facili da calcolare esplicitamente. Una cosa che possiamo facilmente notare è che se f ammette una primitiva F, allora anche $F + c$, con $c \in \mathbb{R}$, è una primitiva di f: infatti derivando si ha che la costante sparisce, così che

$$(F + c)'(x) = F'(x) = f(x).$$

Lo stesso fatto può capirsi geometricamente in termini di traslazioni del grafico di F.



Infatti traslando in verticale il grafico di F, si ottiene una nuova curva tale che la retta tangente nel punto x_0 ha chiaramente coefficiente angolare pari ancora a $f(x_0)$: dunque la nuova funzione è ancora una primitiva di f. Concludiamo che, **se l'insieme delle primitive è non vuoto, esso contiene infinite funzioni**, in particolare quelle ottenute sommando una costante arbitraria. Il ragionamento geometrico sopra illustrato può farci capire una cosa molto importante: se il grafico di F si compone di più pezzi, cioè f non è definita su un intervallo ma su un'unione di intervalli, allora ogni tratto del grafico può essere traslato in maniera indipendente dagli altri. Di conseguenza la generica primitiva di f può venire a dipendere da tante costanti arbitrarie.



Ad esempio la funzione

$$f(x) = -\frac{1}{x^2}$$

ammette come primitive tutte le funzioni della forma

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} + c_1 & \text{se } x < 0 \\ \frac{1}{x} + c_2 & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

con in generale $c_1 \neq c_2$.

Nel caso in cui f sia definita su un intervallo, le primitive dipendono da una sola costante arbitraria.

Proposizione 10.4 (Due primitive su un intervallo differiscono per una costante). *Siano $F, \tilde{F}$ due primitive di f sull'intervallo I. Allora esiste una costante $c \in \mathbb{R}$ tale che $\tilde{F} = F + c$ (cioè $\tilde{F}(x) = F(x) + c$ per ogni $x \in \mathbb{R}$).*

Dimostrazione. Per vederlo, basta provare che la funzione $G(x) = \tilde{F}(x) - F(x)$ è costante. Infatti si ha

$$G'(x) = (\tilde{F}(x) - F(x))' = \tilde{F}'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

e cioè la funzione G ha derivata nulla in ogni punto: poiché G è definita su un intervallo I, per ogni $[a, b] \subseteq I$ si ha per il Teorema di Lagrange che esiste $c \in]a, b[$ tale che

$$G(b) - G(a) = G'(c)(b - a) = 0,$$

cioè $G(b) = G(a)$. Dunque G è una funzione costante. ∎

Per formulare i teoremi fondamentali del calcolo, abbiamo bisogno della seguente convenzione sui segni. Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è integrabile e se $\alpha, \beta \in [a, b]$ con $\alpha < \beta$, poniamo

$$\int_\alpha^\alpha f(x)\,dx = 0 \quad \text{e} \quad \int_\beta^\alpha f(x)\,dx := -\int_\alpha^\beta f(x)\,dx.$$

Anche con questa convenzione abbiamo che per ogni $\alpha, \beta, \gamma \in [a, b]$ si ha

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = \int_\alpha^\gamma f(x)\,dx + \int_\gamma^\beta f(x)\,dx,$$

cioè vale ancora una formula di suddivisione per l'integrale.

10.6.2 Il primo teorema fondamentale del calcolo

Possiamo enunciare ora il primo teorema fondamentale del calcolo.

Teorema 10.5 (Primo Teorema Fondamentale del Calcolo). *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Sia $c \in [a, b]$ e sia $A : [a, b] \to \mathbb{R}$ definita da*

$$A(x) := \int_c^x f(t)\,dt.$$

Allora A è derivabile per ogni $x \in]a, b[$ e si ha

$$A'(x) = f(x) \quad \forall x \in]a, b[.$$

Dimostrazione. Notiamo che la funzione A è ben definita essendo f continua e dunque integrabile. Inoltre, se $x \leq c$ bisogna considerare la convenzione sui segni precedentemente introdotta.

La derivata di A in $x \in]a, b[$ è data dal limite del rapporto incrementale

$$\lim_{h \to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h}.$$

Esso è ben definito perché per h piccolo si ha sicuramente $x + h \in]a, b[$. Inoltre abbiamo che

$$\begin{aligned} A(x+h) - A(x) &= \int_c^{x+h} f(t)\,dt - \int_c^x f(t)\,dt \\ &= \int_c^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt - \int_c^x f(t)\,dt \\ &= \int_x^{x+h} f(t)\,dt. \end{aligned}$$

Se $h > 0$, per il teorema della media esiste $\xi_h \in [x, x+h]$ tale che

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(\xi_h)h.$$

Se $h < 0$, per la convenzione sui segni si ha

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt = -\int_{x+h}^x f(t)\,dt$$

così che per il teorema della media esiste $\xi_h \in [x+h, x]$ tale che

$$\int_x^{x+h} f(t)\,dt = -f(\xi_h)(-h) = f(\xi_h)h.$$

Concludiamo che per ogni h positivo o negativo esiste ξ_h appartenente all'intervallo determinato da x e $x + h$ tale che

$$A(x+h) - A(x) = f(\xi_h)h$$

e cioè

$$\frac{A(x+h) - A(x)}{h} = f(\xi_h).$$

Facciamo ora tendere $h \to 0$: si ha $\xi_h \to x$, ed essendo f continua $f(\xi_h) \to f(x)$. Dunque si ha

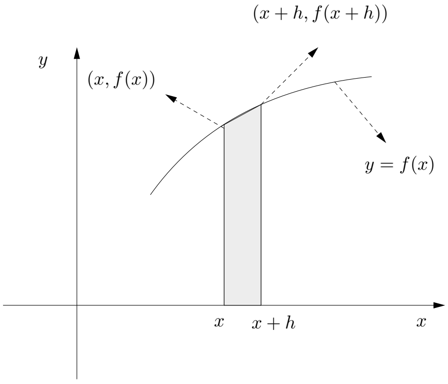
$$\lim_{h \to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = f(x)$$

e la tesi è dimostrata. ■

Il risultato del primo teorema fondamentale del calcolo può essere compreso tramite il seguente ragionamento geometrico: la quantità

$$A(x+h) - A(x)$$

rappresenta l'area della regione R_h determinata da f sull'intervallo $[x, x+h]$.



R_h è un poligono con un lato curvilineo, quello relativo al grafico di f che congiunge i punti $(x, f(x))$ e $(x+h, f(x+h))$: essendo f continua, per h piccolo il lato curvilineo differisce poco da quello orizzontale ad altezza $f(x)$. L'area di R_h è dunque approssimativamente quella del rettangolo di base $[x, x+h]$ e altezza $f(x)$, e tale approssimazione è sempre migliore al tendere di h a zero. Ricaviamo

$$A(x+h) - A(x) \sim f(x)h$$

da cui

$$\lim_{h\to 0} \frac{A(x+h) - A(x)}{h} = A'(x) = f(x).$$

Questo ragionamento intuitivo mostra che il risultato del teorema è valido nella sola ipotesi della continuità di f in x.

Come conseguenza del Primo Teorema Fondamentale del Calcolo deduciamo che le funzioni continue $f : I \to \mathbb{R}$ ammettono sempre una primitiva: anzi sappiamo che esse si ottengono aggiungendo una costante arbitraria alla funzione

$$A(x) = \int_c^x f(t)\, dt$$

dove c è un elemento di I. Dunque le primitive di una funzione continua si costruiscono facendo uso del procedimento di integrazione.

10.6.3 IL secondo teorema fondamentale del calcolo

Guardiamo ora il legame tra primitiva ed integrazione osservato al punto precedente nel senso opposto. Di questo si occupa il Secondo Teorema Fondamentale del Calcolo.

Teorema 10.6 (**Secondo Teorema Fondamentale del Calcolo**). *Sia $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervallo, e sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora per ogni $a, b \in I$ si ha*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

dove F è una qualsiasi primitiva di f.

Dimostrazione. Sappiamo che f ammette primitive su I, ed, anzi, una primitiva di f è data ad esempio da

$$A(x) = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Poiché due primitive di f differiscono per una costante su I, si ha che esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che per ogni $x \in I$

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) + c.$$

Se scegliamo $x = a$, si ottiene

$$0 = \int_a^a f(t)\,dt = F(a) + c$$

e cioè $c = -F(a)$. Si ha dunque

$$\int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a).$$

Sostituendo $x = b$ si ha

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$$

che è la tesi. ∎

Si scrive spesso $F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$, così che la conclusione del teorema si scrive

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b\,.$$

Dunque concludiamo che il procedimento di integrazione di una funzione continua f, anziché compiersi secondo definizione analizzando somme inferiori e superiori (che è laborioso), può svolgersi trovando una primitiva F e calcolando la differenza $F(b) - F(a)$. Vediamo alcuni esempi.

1. Calcolare $\int_1^5 x^3\,dx$. Una primitiva su $\mathbb{R}$ di $f(x)=x^3$ è $F(x)=\frac{x^4}{4}$ poiché
$$\left(\frac{x^4}{4}\right)' = \frac{1}{4}(x^4)' = \frac{1}{4}4x^3 = x^3.$$
Dunque
$$\int_1^5 x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^5 = \frac{5^4-1}{4}.$$

2. Calcolare
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\,dx.$$
Una primitiva di $\sin(2x)$ è $-\frac{\cos 2x}{2}$. Dunque
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x)\,dx = \left[-\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\pi/2} = -\frac{\cos\pi}{2}+\frac{1}{2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1.$$

Il Secondo Teorema Fondamentale del Calcolo sposta l'attenzione dalle somme inferiori e superiori al problema di trovare una primitiva. A partire dalle regole di derivazione, bisogna dunque capire cosa succede andando all'"indietro". Il teorema è dunque efficace per risolvere gli integrali se disponiamo di un bagaglio sufficientemente ampio di funzioni di cui sappiamo calcolare la primitiva.

10.7 Formule di integrazione

In questa sezione vediamo due procedimenti di integrazione molto utili nelle applicazioni: l'integrazione per parti e l'integrazione per sostituzione.

10.7.1 Integrazione per parti

L'integrazione per parti riguarda essenzialmente l'integrazione di funzioni che si presentano sotto forma di prodotto.

Proposizione 10.7 (Calcolo dell'integrale per parti). *Sia I un intervallo in $\mathbb{R}$ e siano $f,g: I\to\mathbb{R}$ due funzioni derivabili con derivata continua. Allora per ogni $a,b\in I$ abbiamo che*
$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

Dimostrazione. Dalla derivazione di un prodotto si ha $(fg)'=f'g+fg'$ da cui
$$fg' = (fg)' - f'g.$$

Per l'ipotesi su f e g, le funzioni che compaiono nella formula sono continue e dunque integrabili. Se integriamo tra a e b, applicando le proprietà dell'integrale ed il Secondo Teorema Fondamentale del Calcolo si ha

$$\int_a^b fg'\,dx = \int_a^b [(fg)' - f'g]\,dx = \int_a^b (fg)'\,dx - \int_a^b f'g\,dx = [fg]_a^b - \int_a^b f'g\,dx$$

che è la tesi. ■

Per applicare l'integrazione per parti occorre decidere quale funzione considerare come f e quale come g: la scelta è dettata dall'esperienza. La formula sottintende che il problema del calcolo di una primitiva di $f'g$ debba essere più semplice di quello di partenza fg'.

Esempio 10.8. Consideriamo

$$\int_0^1 xe^x\,dx.$$

Scegliendo $f(x) = x$ e $g'(x) = e^x$ si ha $g(x) = e^x$ da cui

$$\int_0^1 xe^x\,dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x\,dx = e - [e^x]_0^1 = 1.$$

10.7.2 Integrazione per sostituzione

L'integrazione per sostituzione consiste essenzialmente in un cambio di variabile, cioè nel passaggio dalla variabile $x \in [a, b]$ ad una nuova variabile, chiamiamola t, legata ad x dalla relazione

$$x = \varphi(t).$$

La funzione φ deve essere invertibile così da potersi scrivere

$$t = \varphi^{-1}(x),$$

cioè trovare t in funzione di x.

Proposizione 10.9 (Calcolo dell'integrale per sostituzione). *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e sia $x = \varphi(t)$ un cambiamento di variabile tale che φ sia derivabile con derivata continua. Allora si ha*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt.$$

Dimostrazione. Basta tenere presente che per il Secondo Teorema Fondamentale del Calcolo si ha che se F è una primitiva di f allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

D'altro canto la funzione $F(\varphi(t))$ è derivabile con

$$(F(\varphi(t)))' = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

da cui

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)).$$

La tesi è dunque dimostrata scegliendo $\alpha = \varphi^{-1}(a)$ e $\beta = \varphi^{-1}(b)$. ■

Notiamo che nell'integrazione per sostituzione, passando da x a t occorre cambiare ovviamente gli estremi di integrazione, ma soprattutto la nuova funzione da integrare non è solo $f(\varphi(t))$ ma $f(\varphi(t))\varphi'(t)$.

Fare un cambiamento di variabile presuppone che il calcolo della primitiva di $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ sia più semplice di quello di $f(x)$.

Esempio 10.10. Calcoliamo l'integrale

$$\int_{\ln 2}^7 \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x - 1}}\,dx.$$

Se poniamo $e^x = t$, si ha $x = \ln t$. Scegliamo allora come funzione φ nella formula d'integrazione per sostituzione l'applicazione $\varphi(t) = \ln t$, che è invertibile. Si ha

$$\begin{aligned} &x = \ln 2 \Longrightarrow t = e^{\ln 2} = 2 \\ &x = 7 \Longrightarrow t = e^7 \end{aligned}$$

e

$$\varphi'(t) = \frac{1}{t}.$$

Otteniamo

$$\int_{\ln 2}^7 \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x - 1}}\,dx = \int_2^{e^7} \frac{t^2}{\sqrt{t-1}}\left(\frac{1}{t}\,dt\right) = \int_2^{e^7} \frac{t}{\sqrt{t-1}}\,dt.$$

Il secondo membro è più facile da integrare. Una primitiva su $]0, +\infty[$ è data da

$$\int \frac{t}{\sqrt{t-1}}\,dt = \int \left(\sqrt{t-1} + \frac{1}{\sqrt{t-1}}\right)dt = \frac{2}{3}(t-1)^{3/2} + 2(t-1)^{1/2}.$$

Dunque si ottiene

$$\int_2^{e^7} \frac{t}{\sqrt{t-1}}\,dt = \left[\frac{2}{3}(t-1)^{3/2} + 2(t-1)^{1/2}\right]_2^{e^7} = \frac{2}{3}(e^7-1)^{3/2} + 2(e^7-1)^{1/2} - \frac{2}{3} - 2.$$

Capitolo 11

Integrali impropri

Abbiamo definito l'integrale di Riemann

$$\int_a^b f(x)dx$$

nel caso in cui $[a,b]$ sia un intervallo chiuso e limitato e $f(x)$ sia una funzione limitata su $[a,b]$. Vogliamo ora generalizzare la definizione di integrale anche al caso in cui l'intervallo (a,b) sia aperto, oppure illimitato (cioè quando uno o ambedue gli estremi siano infiniti) e nel caso in cui la funzione f non sia limitata.

11.1 Integrali impropri su intervalli limitati

Cominciamo a trattare il caso di intervalli limitati e funzioni f non necessariamente limitate.

Definizione 11.1. *Una funzione $f:(a,b]\to\mathbb{R}$, con $a,b\in\mathbb{R}$, si dice localmente integrabile su $(a,b]$ se è integrabile su $[c,b]$ $\forall c\in(a,b]$.*

Definizione 11.2. *Sia $f:(a,b]\to\mathbb{R}$ localmente integrabile. Se esiste finito il limite*

$$\lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)\,dx$$

allora si dice che f è integrabile in senso improprio su $(a,b]$ e si pone

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)\,dx.$$

Se il $\lim_{c\to a^+}\int_c^b f(x)\,dx$ risulta infinito, allora si dice che l'integrale improprio di f su $(a,b]$ è divergente, oppure che f non è integrabile in senso improprio.

Osservazione 11.3. La Definizione 11.2 è opportuna per funzioni f che non sono limitate nell'intorno destro di a, i.e. $\lim_{x\to a^+} f(x)=\infty$.

Analogamente, se la funzione $f : [a, b) \to \mathbb{R}$ non è limitata nell'intorno sinistro di b, ma risulta sempre localmente integrabile su $[a, c]$ per ogni $c \in [a, b)$, si pone

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{c\to b^-} \int_a^c f(x)\,dx.$$

Se tale limite è finito si dice che f è integrabile in senso improprio su $[a, b)$, altrimenti si dice che l'integrale improprio è divergente o che la funzione f non è integrabile in senso improprio.

Osservazione 11.4. Se la funzione $f(x)$ non è limitata nell'intorno di un punto x_0 interno ad $[a, b]$, allora si dirà che f è integrabile in senso improprio in $[a, b]$ se lo è nei due intervalli $[a, x_0)$ e $(x_0, b]$. In tal caso si pone:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_0} f(x)\,dx + \int_{x_0}^b f(x)\,dx.$$

Un'analoga definizione vale nel caso in cui la funzione sia illimitata nell'intorno di più punti $x_1, x_2, \cdots, x_n$ dell'intervallo $[a, b]$. In tal caso si dovrà suddividere l'intervallo $[a, b]$ nell'unione di sotto-intervalli (semi-aperti a destra o sinistra) $I_1, \cdots I_n$. Si dirà integrale improprio di f su $[a, b]$ la somma degli integrali impropri di f su $I_1, \cdots I_n$ (nel caso ovviamente che tutti esistano finiti).

Esempio 11.5. Siano $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}, \alpha > 0$ e $(a, b] = (0, 1]$. Osserviamo che la funzione f non è limitata nell'intorno di $a = 0$. Cerchiamo di capire, al variare di α, se la funzione f risulta integrabile (in senso improprio) su $(0, 1]$.

Per ogni $c \in (0, 1]$ $(c > 0)$ la funzione $f(x)$ risulta continua e limitata su $[c, 1]$ e quindi possiamo calcolare l'integrale (di Riemann)

$$\int_c^1 f(x)\,dx = \int_c^1 x^{-\alpha} dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} x^{1-\alpha}|_c^1 = \frac{1}{1-\alpha}(1 - c^{1-\alpha}) & \text{se } \alpha \neq 1 \\ -\log c & \text{se } \alpha = 1 \end{cases}.$$

Allora

$$\lim_{c\to 0^+} \int_c^1 f(x)\,dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

dunque $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ risulta integrabile su $(0, 1]$ solo se $\alpha < 1$, mentre non è integrabile in senso improprio su $(0, 1]$ per $\alpha \geq 1$.

Esempio 11.6. Siano $f(x) = \frac{1}{x^2}$ e $(a, b] = (0, 1]$. Allora, dall'esempio sopra, segue che f non è integrabile su $(0, 1]$ (qui, $\alpha = 2$).

Esempio 11.7. Siano $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ e $(a, b] = (0, 1]$. Allora, dall'esempio sopra, segue che $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ è integrabile su $(0, 1]$ (qui $\alpha = 1/2 < 1$).

11.2 Integrali impropri su intervalli illimitati

Vediamo la definizione di integrale improprio per funzioni definite ora su un intervallo illimitato del tipo $[a, +\infty)$, con $a \in \mathbb{R}$.

Definizione 11.8. *Data la funzione $f(x)$ definita su $[a, +\infty)$, diciamo che f è localmente integrabile su $[a, +\infty)$ se per ogni $c > a$ esiste l'integrale*

$$\int_a^c f(x)\, dx.$$

Definizione 11.9. *Sia $f(x)$ definita su $[a, +\infty)$ localmente integrabile su $[a, +\infty)$. Se esiste finito il limite*

$$\lim_{c\to+\infty} \int_a^c f(x)\, dx$$

allora si dice che f è integrabile in senso improprio su $[a, +\infty)$ e si pone

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{c\to+\infty} \int_a^c f(x)\, dx.$$

Analoga definizione può essere data nel caso $(-\infty, b]$. In questo caso, affinché f sia integrabile su $(-\infty, b]$ occorrerà che

1. f sia localmente integrabile su $(-\infty, b]$, ossia per ogni $c > -\infty$ deve esistere l'integrale $\int_c^b f(x)\, dx$;

2. deve esistere finito il limite
$$\lim_{c\to-\infty} \int_c^b f(x)\, dx.$$
In tal caso porremo
$$\int_{-\infty}^b f(x)\, dx = \lim_{c\to-\infty} \int_c^b f(x)\, dx.$$

Esempio 11.10. Sia $f(x) = e^x$ su $(-\infty, 0]$. Abbiamo che:

$$\int_{-\infty}^0 e^x\, dx = \lim_{c\to-\infty} \int_c^0 e^x\, dx = \lim_{c\to-\infty} [e^x]_c^0 = \lim_{c\to-\infty} 1 - e^c = 1.$$

Dunque f è integrabile si $(-\infty, 0]$.

Esempio 11.11. Sia $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}, \alpha > 0$. Consideriamo l'intervallo $[1, +\infty)$. Vogliamo studiare, al variare di α, l'integrabilità di f su $[1, +\infty)$. Si ha

$$\int_1^c x^{-\alpha}\, dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}(1 - c^{1-\alpha}) & \text{se } \alpha \neq 1 \\ \log c & \text{se } \alpha = 1 \end{cases},$$

quindi

$$\lim_{c\to+\infty}\int_1^c x^{-\alpha}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \end{cases}.$$

Ne segue che la funzione $x^{-\alpha}$ è integrabile in senso improprio su $[1,+\infty)$ se $\alpha > 1$, e non lo è se $\alpha \leq 1$.

Osservazione 11.12. Dalle definizioni generali date per l' intervallo (a, b) con $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, con il cambio di variabili $Ax+B = t$ ci si può sempre ricondurre ad integrali sugli intervalli $(0, 1]$ e $[1,+\infty)$:

$$\int_0^1 f(t)\,dt \qquad \int_1^{+\infty} f(t)\,dt,$$

(ci si potrebbe ricondurre sempre a uno solo di questi usando il cambio di variabili $y = \frac{1}{t}$).

11.3 Esempi fondamentali

$$\int_0^1 x^{-\alpha}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} & \text{se } \alpha < 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \geq 1 \end{cases}$$

$$\int_1^{+\infty} x^{-\alpha}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1} & \text{se } \alpha > 1 \\ +\infty & \text{se } \alpha \leq 1 \end{cases}.$$

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(logx)^{\beta}}\,dx = \begin{cases} \frac{(log2)^{1-\beta}}{\beta-1} & \text{se } \beta > 1 \\ +\infty & \text{se } \beta \leq 1 \end{cases}.$$

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{x|logx|^{\beta}}\,dx = \begin{cases} \frac{(log2)^{1-\beta}}{\beta-1} & \text{se } \beta > 1 \\ +\infty & \text{se } \beta \leq 1 \end{cases}.$$

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{x^{\alpha}|logx|^{\beta}}\,dx = \begin{cases} \text{converge se } \alpha < 1,\ \forall\beta, \text{ oppure se } \alpha = 1 \text{ e } \beta > 1 \\ \text{diverge in tutti gli altri casi} \end{cases}.$$

$$\forall a > 1, \quad \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha}|logx|^{\beta}}\,dx = \begin{cases} \text{converge se } \alpha > 1,\ \forall\beta, \text{ oppure se } \alpha = 1 \text{ e } \beta > 1 \\ \text{diverge in tutti gli altri casi} \end{cases}.$$

11.4 Criteri di convergenza

Può essere interessante stabilire se una funzione f definita su $[a,+\infty)$ sia integrabile in senso improprio su $[a,+\infty)$, senza calcolare effettivamente il valore numerico di tale integrale, che potrebbe essere molto difficile. Il caso di f definita su (a, b) e non limitata si tratta in maniera analoga e può essere facilmente dedotto dal caso $[a,+\infty)$ usando il cambiamento di variabili segnalato nell'Osservazione 11.12.

In questa sezione ci occupiamo quindi di una funzione $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ tale che f sia localmente integrabile su $[a, +\infty)$, ossia per ogni $c > a$ esiste l'integrale

$$\int_a^c f(x)\, dx = F(c).$$

Si tratta di capire quando esiste finito il $\lim_{c\to+\infty} F(c)$.

Un caso importante è quando f è positiva. Allora la funzione integrale $F(c)$ è crescente e quindi esiste il limite

$$\lim_{c\to+\infty} F(c) = \sup_{c>a} F(c).$$

In questo caso il problema dell'integrabilità di f è ridotto a verificare che la funzione integrale $F(c)$ sia limitata o no. Abbiamo dimostrato il seguente teorema.

Teorema 11.13. *Sia $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ tale che $f \geq 0$ e f sia localmente integrabile su $[a, +\infty)$. Allora $\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ non oscilla e si ha*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \sup_{c>a} \int_a^c f(x)\, dx.$$

Teorema 11.14 (Criterio del confronto)**.** *Siano $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, localmente integrabili e verificanti $0 \leq f(x) \leq g(x)$ per ogni $x \in [a, +\infty)$. Se g è integrabile in senso improprio sull'intervallo $[a, +\infty)$, allora lo è anche f.*

Dimostrazione. La tesi segue dal confronto $F(x) = \int_a^x f(t)\, dt \leq \int_a^x g(t)\, dt = G(x)$ per ogni $x \in [a, +\infty)$. □

Teorema 11.15 (Confronto asintotico)**.** *Siano $f, g : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$, localmente integrabili con $f, g > 0$. Supponiamo che esista*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Allora,

1. *se $L \in (0, +\infty)$, f è integrabile in senso improprio su $[a, +\infty)$ se e solo se g è integrabile in senso improprio su $[a, +\infty)$;*
2. *se $L = 0$ e g è integrabile in senso improprio su $[a, +\infty)$, allora lo è anche f;*
3. *se $L = +\infty$ e g non è integrabile in senso improprio su $[a, +\infty)$, allora anche f non lo è.*

Teorema 11.16 (Teorema di McLaurin)**.** *Sia $f : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione positiva e decrescente in $[1, +\infty)$. Allora l'integrale improprio $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ e la serie $\sum_1^{+\infty} f(n)$ sono entrambi convergenti o entrambi divergenti.*

Dimostrazione. Poichè f è decrescente, per $n \leq x \leq n+1$ si ha

$$f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$$

e quindi (integrando fra n e $n+1$)

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x)\,dx \leq f(n).$$

Sommando da 1 a k

$$\sum_{n=1}^{k} f(n+1) = \sum_{n=2}^{k+1} f(n) \leq \int_1^{k+1} f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{k} f(n).$$

Passando al limite per $k \to +\infty$ si ottiene la tesi (le due serie hanno lo stesso carattere perché differiscono per un termine). □

11.5 Convergenza assoluta

Definizione 11.17. *Sia $f : [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ una funzione localmente integrabile. Diremo che f è integrabile assolutamente in senso improprio se $\int_a^{+\infty} |f(x)|\,dx$ converge.*

Teorema 11.18. *Sia f localmente integrabile su $[1,+\infty)$. Se $|f|$ è integrabile in senso improprio, allora anche f lo è e si ha*

$$\left|\int_1^{+\infty} f(x)\,dx\right| \leq \int_1^{+\infty} |f(x)|\,dx.$$

Osservazione 11.19. Non vale il viceversa. Ci sono integrali impropri che convergono grazie ai cambiamenti di segno della funzione integranda ma che non convergono assolutamente. Ad esempio, si può dimostrare (integrando per parti) che l'integrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

converge a $\frac{\pi}{2}$, mentre

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,dx$$

diverge.

Osservazione 11.20. Ci sono funzioni f con integrale improprio convergente in $I = [a,+\infty)$ anche se $\lim_{x\to+\infty} f(x) \neq 0$. Un esempio di questa situazione è dato dai seguenti integrali, detti di Fresnel, che intervengono nei fenomeni di diffrazione della luce:

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2)\,dx \qquad \int_0^{+\infty} \cos(x^2)\,dx.$$

Si sostituisce $t = x^2$, da cui $x = \sqrt{t}$ e $dx = \frac{1}{2\sqrt{t}}dt$, cosicché

$$\int_a^b \sin(x^2)\,dx = \frac{1}{2}\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}dt =$$

si integra per parti, osservando che $1-\cos x$ è una primitiva di $\sin x$

$$\begin{aligned} &= \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1-\cos t}{\sqrt{t}}\right]_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} - \tfrac{1}{2}\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}}(-\tfrac{1}{2})\tfrac{1-\cos t}{t^{3/2}}\,dt = \\ &= \tfrac{1}{2}\left[\tfrac{1-\cos\sqrt{b}}{\sqrt[4]{b}} - \tfrac{1-\cos\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}} + \tfrac{1}{2}\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}}\tfrac{1-\cos t}{t^{3/2}}dt\right] \end{aligned}$$

Per $a \to 0$, si ha

$$\frac{1-\cos\sqrt{a}}{\sqrt[4]{a}} = \frac{a+o(a)}{2\sqrt[4]{a}} \to 0;$$

mentre per $b \to +\infty$, si ha

$$\frac{1-\cos\sqrt{b}}{\sqrt[4]{b}} \to 0.$$

Inoltre, vicino a zero, si ha

$$\frac{1-\cos t}{t^{3/2}} \cong \frac{1/2t^2}{t^{3/2}} = 1/2\sqrt{t} \to 0;$$

mentre per t grande

$$|\frac{1-\cos t}{t^{3/2}}| \leq \frac{2}{t^{3/2}}$$

è convergente.

11.6 Integrali su intervalli aperti

Definizione 11.21. *Sia $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ con $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ localmente integrabile (ossia integrabile su ogni sottointervallo $[\alpha,\beta]$ di (a,b), con $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$). Diremo che f è integrabile in (a,b) se per ogni $c \in (a,b)$ si ha che f è integrabile su $(a,c]$ e su $[c,b)$. Scriveremo*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Osservazione 11.22. L'integrabilità di f non dipende dalla scelta di c.

Esempio 11.23. $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ non è integrabile su $(0,+\infty)$. Infatti

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx + \int_1^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$$

(almeno uno dei due integrali è sempre divergente).

Capitolo 12

Equazioni differenziali ordinarie

12.1 Formulazione del problema

In questa sezione formuleremo matematicamente il problema delle equazioni differenziali ordinarie e faremo alcune osservazioni elementari introduttive.

1. Un'equazione differenziale ordinaria è un'equazione in cui l'incognita è una funzione di una variabile reale: essa stabilisce un legame tra tale funzione incognita e le sue derivate. Equazioni differenziali ordinarie sono ad esempio

   $$y'(x) = x + \arctan(y(x))$$

   e

   $$z''(t) + 2z'(t) + z(t) = \sin t.$$

   Nella prima, l'incognita è una funzione $y(x)$ tale che la sua derivata nel punto x generico del suo dominio sia uguale a x sommato all'arcotangente del valore $y(x)$ stesso. Si dice che essa è un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, perché la funzione incognita vi compare derivata una volta. Essendo chiaro che la variabile indipendente è x, si usa indicare l'equazione anche nella forma

   $$y' = x + \arctan y.$$

   Nella seconda equazione, l'incognita è una funzione $z(t)$ tale che derivata due volte, sommata a due volte la sua derivata prima e sommata a lei stessa dà come risultato $\sin t$. È un'equazione differenziale ordinaria del secondo ordine che si può scrivere nella forma

   $$z'' + 2z' + z = \sin t$$

   omettendo la dipendenza da t.

2. Il problema della ricerca della primitiva di una data funzione f può essere visto come una particolare equazione differenziale: infatti trovare la primitiva di f equivale proprio a risolvere l'equazione differenziale

$$y'(x) = f(x).$$

Essendo la primitiva (su un intervallo) definita a meno di una costante, vediamo che in generale un'equazione differenziale del primo ordine ammette infinite soluzioni: dunque per determinare una precisa soluzione occorre assegnare una condizione ulteriore, ad esempio il valore della funzione in un punto. Similmente per un'equazione del secondo ordine sono necessarie in generale due condizioni per determinarne una soluzione precisa. In generale, per un'equazione di ordine n sono necessarie n condizioni.

3. Concludendo, un'equazione differenziale ordinaria è una equazione del tipo

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0.$$

Si dice che essa ha ordine n poiché la derivata massima che vi compare è quella n-esima. Per determinare una fra le funzioni che soddisfano all'equazione, si richiede che la funzione e le sue derivate fino all'ordine $n-1$ in un punto x_0 assumano alcuni valori assegnati. Dunque nelle applicazioni si incontra il problema

$$\begin{cases} F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \\ y(x_0) = a_0 \\ y'(x_0) = a_1 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = a_{n-1} \end{cases}$$

che si dice **problema di Cauchy associato all'equazione differenziale**. Non ci occuperemo dello studio del problema dell'esistenza e dell'unicità della soluzione di un problema di Cauchy generale, poiché esso richiede strumenti avanzati. Il risultato è che, sotto condizioni generali su f, problemi del tipo

$$\begin{cases} y^{(n)}(x) = f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \dots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

ammettono una ed una sola soluzione $y(x)$ definita in un intervallo sufficientemente piccolo contenente x_0. L'equazione precedente si dice **equazione differenziale ordinaria di ordine n in forma normale**. Nel seguito ci limiteremo allo studio e alla risoluzione di alcuni tipi di equazioni che ricorrono spesso nelle applicazioni.

12.2 Equazioni a variabili separabili

Si tratta di equazioni del tipo

$$y' = f(y)g(x) \tag{12.1}$$

dove f, g sono funzioni continue definite su due intervalli I e J. Il problema di Cauchy associato è

$$\begin{cases} y' = f(y)g(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{12.2}$$

con $x_0 \in J$ e $y_0 \in I$.

1. Per risolvere il problema di Cauchy (12.2), seguiamo un *procedimento formale* molto usato nelle applicazioni (esso può giustificarsi pienamente anche da un punto di vista teorico, ma non ce ne occuperemo): ponendo $y' = dy/dx$

   $$\frac{dy}{dx} = f(y)g(x)$$

   possiamo scrivere

   $$\frac{dy}{f(y)} = g(x)\,dx.$$

   Integrando ambo i membri, tenendo conto della condizione iniziale si ha

   $$\int_{y_0}^{y} \frac{1}{f(z)}\,dz = \int_{x_0}^{x} g(s)\,ds. \tag{12.3}$$

   Questa relazione definisce in forma implicita la soluzione y in funzione di x. Il procedimento di risoluzione giustifica il nome di *equazioni a variabili separabili*: esse si risolvono tramite due integrazioni nelle variabili y e x separatamente.

2. Il metodo pone qualche difficoltà se $f(y_0) = 0$, perché la formula prevederebbe di integrare una funzione con un asintoto verticale: ma in tal caso si vede subito che il problema di Cauchy è banale, perché la soluzione è data dalla funzione costante $y(x) = y_0$.

3. Se lasciamo y_0 generico in (12.3), cioè lo poniamo uguale ad una costante c, al variare di c si ottengono chiaramente tutte le soluzioni dell'equazione differenziale (12.1).

4. Vediamo alcuni esempi.

   Esempio 12.1. Risolviamo il seguente problema di Cauchy

   $$\begin{cases} y' = e^y \\ y(2) = 7. \end{cases}$$

Si ha $\frac{dy}{dx} = e^y$

$$\frac{dy}{e^y} = dx$$

da cui

$$\int_7^y \frac{1}{e^z}\, dz = \int_2^x \, ds$$

da cui

$$\left[-e^{-z}\right]_7^y = x - 2$$

$$-e^{-y} + e^{-7} = x - 2$$

$$e^{-y} = e^{-7} + 2 - x$$

ed infine

$$y = -\ln\left(e^{-7} + 2 - x\right).$$

Esempio 12.2. Risolviamo il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = x \sin t \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Qui l'incognita è una funzione $x(t)$. Ponendo $x' = dx/dt$ si ha

$$\frac{dx}{x} = \sin t\, dt$$

da cui

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \int \sin t\, dt$$

e quindi

$$\ln x = -\cos t + c.$$

Poiché $x(0) = 1$ si ha

$$\ln 1 = -1 + c$$

da cui $c = 1$. Otteniano dunque

$$\ln x = 1 - \cos t$$

da cui

$$x(t) = e^{1-\cos t}.$$

12.3 Equazioni lineari del primo ordine a coefficienti continui

Si tratta di equazioni del tipo

$$y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \tag{12.4}$$

dove $a, b : I \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue definite su un intervallo I. Il problema di Cauchy associato è

$$\begin{cases} y'(x) + a(x)y(x) = b(x) \\ y(x_0) = y_0, \end{cases} \tag{12.5}$$

con $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}$.

1. Vediamo come risolvere il problema di Cauchy (12.5). Sia A una primitiva di a su I. Allora
   $$e^{A(x)}\left[y'(x) + a(x)y(x)\right] = e^{A(x)}b(x).$$
   Ma si ha
   $$e^{A(x)}\left[y'(x) + a(x)y(x)\right] = \left[e^{A(x)}y(x)\right]'$$
   per cui
   $$\left[e^{A(x)}y(x)\right]' = e^{A(x)}b(x).$$
   Integrando da x_0 a x si ottiene
   $$e^{A(x)}y(x) - e^{A(x_0)}y(x_0) = \int_{x_0}^{x} e^{A(s)}b(s)\,ds,$$
   da cui, tenendo conto che $y(x_0) = y_0$, si ottiene
   $$y(x) = e^{-A(x)}\left[e^{A(x_0)}y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{A(s)}b(s)\,ds\right].$$
   Se supponiamo che $A(x_0) = 0$, cioè scegliamo come A la primitiva di a che vale 0 in x_0, otteniamo la formula
   $$y(x) = e^{-A(x)}\left[y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{A(s)}b(s)\,ds\right]. \tag{12.6}$$

2. Riassumendo, la **formula risolutiva per il problema di Cauchy** (12.5) è data da
   $$y(x) = e^{-A(x)}\left[y_0 + \int_{x_0}^{x} e^{A(s)}b(s)\,ds\right]$$
   dove A è la primitiva di a su I che vale 0 in x_0, cioè
   $$A(x) = \int_{x_0}^{x} a(s)\,ds.$$

3. Se poniamo $y_0 = c$ nella formula (12.6), al variare di $c \in \mathbb{R}$ otteniamo chiaramente tutte le soluzioni dell'equazione differenziale (12.4) (in questo caso $A(x)$ può essere una *qualunque* primitiva di $a(x)$).

4. Vediamo un esempio.

   Esempio 12.3. Consideriamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + 2y = e^x \\ y(1) = 3. \end{cases}$$

   Si ha $a(x) = 2$ e $b(x) = e^x$. Dunque

$$A(x) = \int_1^x 2\, ds = [2s]_1^x = 2(x-1).$$

   Si ottiene

$$y(x) = e^{-2(x-1)} \left[3 + \int_1^x e^{2(s-1)} e^s\, ds \right].$$

   Dunque

$$\begin{aligned} y(x) =& e^{-2(x-1)} \left[3 + \int_1^x e^{3s-2}\, ds \right] = e^{-2(x-1)} \left[3 + \left[\frac{e^{3s-2}}{3} \right]_1^x \right] \\ =& e^{-2(x-1)} \left[3 + \frac{e^{3x-2}}{3} - \frac{e}{3} \right]. \end{aligned}$$

12.4 Equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti

Sono le equazioni della forma

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x) \tag{12.7}$$

dove $a, b \in \mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione continua. L'equazione

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0 \tag{12.8}$$

si dice l'equazione omogenea associata alla precedente. Il problema di Cauchy associato è della forma

$$\begin{cases} y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x) \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1, \end{cases} \tag{12.9}$$

dove $x_0 \in I$, $y_0, y_1 \in \mathbb{R}$.

1. Per risolvere le equazioni (12.7), facciamo la seguente osservazione fondamentale: se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ sono soluzioni dell'equazione, allora la differenza $v(x) = y_1(x) - y_2(x)$ è soluzione dell'equazione omogenea associata (12.8). Infatti si ha

$$\begin{aligned} & v''(x) + av'(x) + bv(x) \\ =& (y_1(x) - y_2(x))'' + a(y_1(x) - y_2(x))' + b(y_1(x) - y_2(x)) \\ =& [y_1''(x) + ay_1'(x) + by_1(x)] - [y_2''(x) + ay_2'(x) + by_2(x)] = f(x) - f(x) = 0. \end{aligned}$$

   Dunque la generica soluzione dell'equazione può esprimersi nella forma

$$y(x) = \tilde{y}(x) + (\text{soluzione generica dell'omogenea associata}),$$

   dove $\tilde{y}(x)$ è una soluzione particolare dell'equazione. Dunque la **strategia** per risolvere il problema di Cauchy (12.9) per equazioni lineari del secondo ordine a coefficienti costanti è la seguente.

   (a) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata.
   (b) Determinare una soluzione particolare $\tilde{y}$ dell'equazione di partenza.
   (c) Determinare le costanti generiche che compaiono utilizzando le condizioni iniziali.

2. Consideriamo l'**equazione omogenea**

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = 0.$$

   Per trovarne tutte le soluzioni, si considera il **polinomio caratteristico**

$$P(z) = z^2 + az + b$$

   e si pongono diverse alternative.

   (a) **Se P ammette due radici reali e distinte** λ_1 e λ_2 (caso $a^2 - 4b > 0$), la soluzione generica dell'equazione omogenea è della forma

$$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$$

   dove $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

   (b) **Se P ammette una sola radice reale λ di molteplicità due** (caso $a^2 - 4b = 0$), la soluzione generica dell'equazione è della forma

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{\lambda x}$$

   dove $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

(c) **Se P ammette due radici complesse coniugate** $\alpha+i\beta$ e $\alpha-i\beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (caso $a^2 - 4b < 0$), la soluzione generica dell'equazione è della forma

$$y(x) = e^{\alpha x} \left(c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x)\right)$$

dove $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

Esempio 12.4. Data l'equazione

$$y'' - 4y = 0,$$

il polinomio caratteristico $P(z) = z^2 - 4$ ammette le soluzioni $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -2$. Dunque la generica soluzione è

$$y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}.$$

Esempio 12.5. Data l'equazione

$$y'' - 2y' + y = 0,$$

il polinomio caratteristico $P(z) = z^2 - 2z + 1$ ammette come soluzione doppia $\lambda = 1$. Dunque la generica soluzione è

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)e^x.$$

Esempio 12.6. Data l'equazione

$$y'' + y' + y = 0$$

il polinomio caratteristico $P(z) = z^2 + z + 1$ ammette come soluzioni $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\lambda_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Dunque la generica soluzione è

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x} \left[c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right].$$

3. La **determinazione di una soluzione particolare** $\tilde{y}$ dell'equazione (12.7) è in generale un problema difficile. Esso può semplificarsi se il termine forzante $f(x)$ è della forma

$$f(x) = R_k(x)e^{\alpha x} \cos(\beta x) \tag{12.10}$$

o

$$f(x) = R_k(x)e^{\alpha x} \sin(\beta x) \tag{12.11}$$

dove R_k è un polinomio di grado k. Esempi di termini forzanti f di questo tipo sono

$$f(x) = x^2 e^x, \quad f(x) = x, \quad f(x) = \sin(2x)$$

oppure
$$f(x) = x^3 e^{2x} \cos(3x).$$
Per trovare una soluzione particolare, si considera il numero complesso
$$\tilde{z} = \alpha + i\beta$$
e si pongono due alternative.

(a) Se $\tilde{z} = \alpha + i\beta$ non è radice del polinomio caratteristico $P(z)$ dell'equazione omogenea associata, allora esiste una soluzione particolare della forma
$$e^{\alpha x} \left[Q_k(x) \cos(\beta x) + S_k(x) \sin(\beta x) \right],$$
dove Q_k e S_k sono polinomi di grado k.

(b) Se $\tilde{z} = \alpha + i\beta$ è radice del polinomio caratteristico $P(z)$ con molteplicità h, allora esiste una soluzione particolare dell'equazione è della forma
$$x^h e^{\alpha x} \left[Q_k(x) \cos(\beta x) + S_k(x) \sin(\beta x) \right]$$
dove Q_k e S_k sono polinomi di grado k.

I polinomi generici Q_k e S_k si determinano sostituendo direttamente nell'equazione ed imponendo che essa sia verificata.

Esempio 12.7. Consideriamo l'equazione
$$y'' - 2y = 2e^x.$$
Il polinomio caratteristico è $P(z) = z^2 - 2$ che ammette come radici $z = \pm\sqrt{2}$. Il termine forzante $f(x) = 2e^x$ è della forma (12.10) con la scelta $k = 0$, $\alpha = 1$ e $\beta = 0$. Dunque $\tilde{z} = 1$, ed esso non è radice di $P(z)$. Dunque esiste una soluzione della forma
$$\tilde{y}(x) = ce^x.$$
Sostituendo nell'equazione si ha che deve essere
$$ce^x - 2ce^x = 2e^x,$$
da cui $c = -2$. Concludiamo che una soluzione particolare è $\tilde{y}(x) = -2e^x$.

Esempio 12.8. Consideriamo l'equazione
$$y'' + 4y = 2 + \sin 2x. \tag{12.12}$$
Il termine forzante $f(x) = 2 + \sin 2x$ è somma di due termini forzanti
$$f_1(x) = 2 \qquad \text{e} \qquad f_2(x) = \sin 2x.$$

Per trovare una soluzione particolare dell'equazione, grazie alla sua linearità basta trovare due soluzioni particolari relative a f_1 e f_2 e sommarle tra loro, cioè basta trovare $\tilde{y}_1(x)$ e $\tilde{y}_2(x)$ tali che

$$\tilde{y}_1''(x) + 4\tilde{y}_1(x) = 2 \tag{12.13}$$

e

$$\tilde{y}_2''(x) + 4\tilde{y}_2(x) = \sin(2x) \tag{12.14}$$

e considerare $\tilde{y}(x) = \tilde{y}_1(x) + \tilde{y}_2(x)$. Per quanto riguarda $f_1(x) = 2$, esso è del tipo (12.10) con $k = \alpha = \beta = 0$. Si ha $\tilde{z} = 0$, che non è radice del polinomio caratteristico $P(z) = z^2 + 4$. Dunque esiste una soluzione particolare $\tilde{y}_1(x)$ di (12.13) della forma

$$\tilde{y}_1(x) = c.$$

Sostituendo in (12.13) si ricava

$$4c = 2 \Longrightarrow c = \frac{1}{2}$$

cioè $\tilde{y}_1(x) = \frac{1}{2}$. Per quanto riguarda $f_2(x) = \sin(2x)$, esso è della forma (12.11) con $k = \alpha = 0$ e $\beta = 2$. Dunque $\tilde{z} = 2i$, che è radice di molteplicità uno del polinomio caratteristico $P(z) = z^2 + 4$. Esiste allora una soluzione particolare $\tilde{y}_2$ di (12.14) della forma

$$\tilde{y}_2(x) = x\left[c\cos 2x + d\sin 2x\right].$$

Dunque

$$\tilde{y}_2'(x) = c\cos 2x + d\sin 2x + x\left[-2c\sin 2x + 2d\cos 2x\right].$$

e

$$\tilde{y}_2''(x) = -4c\sin 2x + 4d\cos 2x + x\left[-4c\cos 2x - 4d\sin 2x\right].$$

Sostituendo in (12.14) si ha

$$-4c\sin 2x + 4d\cos 2x = \sin 2x$$

da cui

$$c = -\frac{1}{4} \qquad \text{e} \qquad d = 0.$$

Si ha dunque

$$\tilde{y}_2(x) = -\frac{1}{4}x\cos 2x.$$

In conclusione, una soluzione particolare dell'equazione (12.12) è data da

$$\tilde{y}(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x\cos 2x.$$

4. Vediamo un esempio di risoluzione di un problema di Cauchy seguendo la strategia vista al punto 1. Consideriamo il problema

$$\begin{cases} y'' - 2y = 2 \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 1. \end{cases}$$

Il polinomio caratteristico è $P(z) = z^2 - 2$ e

$$z^2 - 2 = 0 \Longrightarrow z = \pm\sqrt{2}.$$

Si hanno due radici reali distinte $z_1 = \sqrt{2}$ e $z_2 = -\sqrt{2}$. La soluzione generica dell'equazione omogenea associata è data da

$$c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x}.$$

Cerchiamo una soluzione particolare: il termine forzante $f(x) = 2$ è della forma particolare considerata al punto precedente, con la scelta $k = \alpha = \beta = 0$. Dunque $\tilde{z} = 0$, ed esso non è radice di $P(z)$. Dunque esiste una soluzione particolare $\tilde{y}$ della forma

$$\tilde{y}(x) = c.$$

Sostituendo nell'equazione si ha che deve essere

$$-2c = 2,$$

cioè $c = -1$. Abbiamo dunque che la soluzione generica dell'equazione completa è

$$y(x) = -1 + c_1 e^{\sqrt{2}x} + c_2 e^{-\sqrt{2}x}.$$

Le costanti c_1, c_2 si determinano attraverso le condizioni iniziali. Poiché $y'(x) = \sqrt{2}c_1 e^{\sqrt{2}x} - \sqrt{2}c_2 e^{-\sqrt{2}x}$, otteniamo da $y(0) = -1$ e $y'(0) = 1$

$$\begin{cases} -1 + c_1 + c_2 = -1 \\ \sqrt{2}c_1 - \sqrt{2}c_2 = 1 \end{cases}$$

da cui

$$c_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \qquad \text{e} \qquad c_2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

La soluzione del problema è

$$y(x) = -1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left[e^{\sqrt{2}x} - e^{-\sqrt{2}x} \right].$$

12.5 Equazioni differenziali lineari di ordine n a coefficienti costanti

Si tratta di equazioni del tipo

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x),$$

dove $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$ è una funzione continua. Il problema di Cauchy associato è

$$\begin{cases} y^{(n)}(x) + a_{n-1}y^{(n-1)}(x) + \cdots + a_1 y'(x) + a_0 y(x) = f(x), \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \\ \ldots \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

dove $x_0 \in I$, $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1} \in \mathbb{R}$.

1. **La risoluzione di equazioni di questo tipo è analoga a quanto già visto per le equazioni di ordine due**. Si ha che le generica soluzione è della forma

   $$y(x) = \tilde{y}(x) + (\text{soluzione generica dell'omogenea associata}),$$

   dove $\tilde{y}(x)$ è una soluzione particolare dell'equazione. La soluzione generica dell'omogenea associata dipende da n costanti che vengono determinate attraverso le condizioni iniziali del problema.

2. La **generica soluzione dell'omogenea associata** si trova considerando il polinomio caratteristico

   $$P(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0.$$

   Esso ha in generale n radici: a differenza del caso $n = 2$, tali soluzioni possono avere molteplicità $h > 2$. Per scrivere la generica soluzione dell'equazione omogenea, si procede come segue.

   (a) Si individuano tutte le radici di $P(z)$.

   (b) Se $\lambda \in \mathbb{R}$ è una radice di $P(z)$ di molteplicità h, ad essa è associata una soluzione della forma

   $$(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{h-1}x^{h-1})e^{\lambda x},$$

   dove $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ sono costanti generiche.

   (c) Se $\alpha \pm i\beta$ è una coppia di radici complesse coniugate di $P(z)$ con molteplicità h, allora ad essa è associata una soluzione della forma

   $$\begin{aligned} e^{\alpha x} \big[&(d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \cdots + d_{h-1}x^{h-1}) \cos(\beta x) \\ &+ (f_0 + f_1 x + f_2 x^2 + \cdots + f_{h-1}x^{h-1}) \sin(\beta x) \big], \end{aligned}$$

   dove $d_0, d_1, \ldots, d_{h-1}, f_0, f_1, \ldots, f_{h-1}$ sono costanti generiche.

(d) La generica soluzione dell'equazione omogenea è data dalla somma delle soluzioni dei punti (a) e (b), al variare di tutte le radici di $P(z)$.

Esempio 12.9. Consideriamo ad esempio l'equazione

$$y'''' - 2y''' + 5y'' - 8y' + 4y = 0.$$

Il polinomio caratteristico è

$$P(z) = z^4 - 2z^3 + 5z^2 - 8z + 4$$

che si può fattorizzare nel seguente modo

$$P(z) = (z-1)^2(z^2+4).$$

Dunque le radici di $P(z)$ sono $\lambda = 1$ con molteplicità 2, e la coppia di radici complesse coniugate $\pm 2i$. Dunque la generica soluzione dell'equazione è data da

$$y(x) = (c_0 + c_1 x)e^x + d_0 \cos 2x + f_0 \sin 2x,$$

con $c_0, c_1, d_0, f_0 \in \mathbb{R}$.

3. Come nel caso $n = 2$, **la determinazione di una soluzione particolare dell'equazione diviene semplice se il termine forzante è del tipo**

$$f(x) = R_k(x)e^{\alpha x}\cos(\beta x)$$

o

$$f(x) = R_k(x)e^{\alpha x}\sin(\beta x)$$

dove R_k è un polinomio di grado k. In tal caso si considera il numero complesso $\tilde{z} = \alpha + i\beta$ e si procede come segue.

(a) Se $\tilde{z}$ non è radice del polinomio caratteristico $P(z)$ dell'equazione omogenea associata, allora esiste una soluzione particolare della forma

$$e^{\alpha x}\left[Q_k(x)\cos(\beta x) + S_k(x)\sin(\beta x)\right],$$

dove Q_k e S_k sono polinomi di grado k.

(b) Se $\tilde{z}$ è radice del polinomio caratteristico $P(z)$ di molteplicità h, allora esiste una soluzione particolare dell'equazione della forma

$$x^h e^{\alpha x}\left[Q_k(x)\cos(\beta x) + S_k(x)\sin(\beta x)\right]$$

dove Q_k e S_k sono polinomi di grado k.

I polinomi generici Q_k e S_k si determinano sostituendo nell'equazione ed imponendo che essa sia verificata.

Esempio 12.10. Consideriamo l'equazione

$$y'''' - 2y''' + 5y'' - 8y' + 4y = e^{2x}$$

e determiniamone una soluzione particolare: si ha $\tilde{z} = 2$, ed esso non è radice del polinomio caratteristico $P(z)$, le cui radici sono, per quanto visto all'esempio precedente, $z = 1$ e $z = \pm 2i$. Dunque l'equazione ammette una soluzione particolare della forma $\tilde{y}(x) = ce^{2x}$. Sostituendo nell'equazione si ha

$$(16c - 16c + 20c - 16c + 4c)e^{2x} = e^{2x}$$

da cui $c = 1/8$. Dunque una soluzione particolare è data da $\tilde{y}(x) = \frac{1}{8}e^{2x}$. La soluzione generale dell'equazione è data dunque da

$$y(x) = \frac{1}{8}e^{2x} + (c_0 + c_1 x)e^x + d_0 \cos 2x + f_0 \sin 2x,$$

dove c_0, c_1, d_0, f_0 sono generiche costanti.