Elementi di logica

SCOPO: introdurre nozioni di logica & vocabolario per una corretta interpretazione delle dimostrazioni.

♣ **Quantificatori:** elementi fondamentali del linguaggio matematico.

- $\forall$ quantificatore universale: "per ogni"
- $\exists$ quantificatore esistenziale: "esiste"
- $\exists\,!$ quantificatore esiste unico: "esiste uno e uno solo".

♣ **Proposizione:** frase di **senso compiuto**, della quale si può inequivocabilmente dire se è vera o falsa. Indichiamo le proposizioni con le lettere $\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \ldots$

Esempi di proposizioni:

1. $\mathcal{P}_1$: quest'aula contiene studenti di ingegneria **(proposizione VERA)**
2. $\mathcal{P}_2$: Brescia è una città di mare
   (proposizione FALSA)

Una proposizione può essere VERA o FALSA, ma NON, contemporaneamente, vera e falsa
Una frase che non dà informazioni NON è una proposizione, ad esempio:

1. Che ora è? **(non è una prop.)**
2. Domani **(non è una prop.)**

♣ **Predicato:** frase contenente una o più variabili libere, ad es.:

$$\begin{array}{lll} \mathcal{P}(x) & \text{predicato dipendente da} & x \\ \mathcal{Q}(x,y) & \text{predicato dipendente da} & x,\ y \end{array}$$

Esempi:

1. $\mathcal{P}(x) =$"L'intero x è un numero primo"
2. $\mathcal{Q}(x,y) =$"Il numero x è maggiore di y"

I predicati NON hanno un valore di verità intrinseco: quest'ultimo dipende dai valori attribuiti alle variabili libere. Con riferimento agli esempi 1 e 2 abbiamo:

$\mathcal{P}(2)\ V\,, \qquad \mathcal{P}(4)\ F$

$\mathcal{Q}(3, \frac{7}{2})\ F\,, \qquad \mathcal{Q}(2, \frac{1}{5})\ V$

(ove le lettere V e F stanno per VERA, FALSA).

• Un modo per trasformare predicati in proposizioni è tramite uno dei quantificatori.
Esempio:
$\mathcal{P}(x) =$ "nel luogo x piove"

1. *Piove in ogni luogo*: $\forall\, x\ :\ \mathcal{P}(x)$
2. *Esiste un luogo in cui piove*: $\exists\, x\ :\ \mathcal{P}(x)$

- Quando un predicato dipende da più variabili i quantificatori possono essere mescolati.

MAI invertire l' ordine dei quantificatori in una proposizione! Può alterare il senso!

Esempio

$\mathcal{Q}(x, y) =$ "nel luogo x piove nel giorno y"
Allora:

1. *In ogni luogo cè almeno un giorno in cui piove*: $\forall x \quad \exists y \, : \, \mathcal{Q}(x, y)$ **(prop. VERA)**
2. *Esiste un giorno in cui piove in ogni luogo*:
   $\exists y \quad \forall x \, : \mathcal{Q}(x, y)$ **(prop. FALSA)**

♣ **Connettivi logici:** sono operatori che trasformano una o più proposizioni in altre proposizioni, il cui valore di verità dipende dai valori di verità delle proposizioni di partenza. Qui di seguito gli elenchiamo:

non (NEGAZIONE)

trasforma $\mathcal{P}$ nella proposizione **non**($\mathcal{P}$) che ha valore di verità **contrario** a $\mathcal{P}$.
- L'operatore di negazione, applicato due volte, si elide,

$$\mathbf{non}(\mathbf{non}(\mathcal{P})) = \mathcal{P}$$

---

e (CONGIUNZIONE) $\wedge$

Date $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$,

$\mathcal{P}$**e**$\mathcal{Q}$ è la proposizione nella quale valgono <u>sia</u> la prima, <u>sia</u> la seconda.

- $\mathcal{P}$**e**$\mathcal{Q}$ è vera unicamente se <u>sia</u> $\mathcal{P}$ <u>sia</u> $\mathcal{Q}$ sono vere.

---

o (DISGIUNZIONE) $\vee$

Date $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$,

$\mathcal{P}$**o**$\mathcal{Q}$ è la proposizione nella quale <u>vale almeno delle due</u>.

- Quindi, $\mathcal{P}$**o**$\mathcal{Q}$ è vera se <u>almeno una</u> fra $\mathcal{P}$ o $\mathcal{Q}$ è vera.
- Scrivendo $\mathcal{P}$**o**$\mathcal{Q}$, non escludo che siano vere entrambe.

Qualche esempio

$\mathcal{P}$: "3 è un numero pari" FALSA
$\mathcal{Q}$: "4 non è un numero primo" VERA

- **non** $\mathcal{P}$: "3 **non** è un numero pari" VERA
- $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$: "3 è un numero pari **e** 4 non è un numero primo" FALSA
- $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$: "3 è un numero pari **oppure** 4 non è un numero primo" VERA
- **non** ($\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$): "3 **non** è un numero pari **oppure** 4 **è** un numero primo"=(**non** $\mathcal{P}$) $\vee$ (**non** $\mathcal{Q}$) VERA
- **non** ($\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$): "3 **non** è un numero pari **e** 4 **è** un numero primo"= (**non** $\mathcal{P}$) $\wedge$ (**non** $\mathcal{Q}$) FALSA

$\Rightarrow$ (IMPLICAZIONE)

Date $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$, il connettivo $\Rightarrow$ crea la proposizione $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$, che si legge

- $\mathcal{P}$ implica $\mathcal{Q}$
- se $\mathcal{P}$, allora $\mathcal{Q}$

Terminologie alternative per $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$:

- $\mathcal{P}$ è **condizione sufficiente** per $\mathcal{Q}$
- $\mathcal{Q}$ è **condizione necessaria** per $\mathcal{P}$

Implicazione: un esempio (banale)

$\mathcal{P}$: "Fido è un cane"

$\mathcal{Q}$: "Fido è un mammifero"

$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$: "**Se** Fido è un cane **allora** è un mammifero"

Con la terminologia alternativa:

- $\mathcal{P}$ è condizione SUFFICIENTE per $\mathcal{Q}$: l'essere un cane basta per essere un mammifero.
- $\mathcal{Q}$ è condizione NECESSARIA per $\mathcal{P}$: l'essere mammifero è un requisito indispensabile per essere cane, ovvero **se** Fido non è un mammifero **allora** non può essere un cane.

Quindi:

$$[\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}] \quad \text{equivale a} \quad [\textbf{non}\,\mathcal{Q} \Rightarrow \textbf{non}\,\mathcal{P}]$$

Un esempio matematico

Data $f : I \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in I$:

$$f \text{ derivabile in } x_0 \Rightarrow f \text{ continua in } x_0$$

• La derivabilità in x_0 è condizione SUFFICIENTE per la continuità in x_0

• La continuità in x_0 è condizione NECESSARIA per la derivabilità in x_0 (ovvero se f NON è continua in x_0 allora f NON è derivabile in x_0).

• **Negare** $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$: significa negare che $\mathcal{Q}$ sia indispensabile per la validità di $\mathcal{P}$, ovvero significa affermare che $\mathcal{P}$ può valere (essere vera) quando non vale $\mathcal{Q}$, cioè:

$$[\textbf{non}\,(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})] \quad \Leftrightarrow \quad [\mathcal{P}\,\textbf{e}(\text{non}\,\mathcal{Q})]$$

• In generale:

$$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q} \qquad \text{è DIVERSO da} \qquad \mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$$

$\Leftrightarrow$ (DOPPIA IMPLICAZIONE)

Date $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$, il connettivo $\Leftrightarrow$ crea la proposizione

$$\mathcal{P} \Leftrightarrow \mathcal{Q} \qquad = \qquad \big(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}\ \textbf{e}\ \mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}\big)$$

Si legge:

- $\mathcal{P}$ equivale a $\mathcal{Q}$
- $\mathcal{P}$ è **condizione necessaria e sufficiente** per $\mathcal{Q}$
- $\mathcal{P}$ se e solo se $\mathcal{Q}$

N.B.:

$$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q} \;\Leftrightarrow\; \text{(equivale a) } \mathbf{non}(\mathcal{Q}) \Rightarrow \mathbf{non}(\mathcal{P})$$

♣ **Negare proposizioni (predicati) contenenti connettivi**: valgono le seguenti regole:

$$\mathbf{non}(\mathcal{P}\,\mathbf{e}\,\mathcal{Q}) = \mathbf{non}(\mathcal{P})\,\mathbf{o}\,\mathbf{non}(\mathcal{Q})$$

Ad esempio: "Non è vero che entrambe le figlie del medico sono alte" = "Almeno una delle due figlie del medico non è alta".

$$\mathbf{non}(\mathcal{P}\,\mathbf{o}\,\mathcal{Q}) = \mathbf{non}(\mathcal{P})\,\mathbf{e}\,\mathbf{non}(\mathcal{Q})$$

Ad esempio: "Non è vero che mio fratello, a cena, mangia carne o pesce" = "A cena, mio fratello non mangia né carne, né pesce".

$$\mathbf{non}(\mathcal{P} \;\Rightarrow\; \mathcal{Q}) = \mathcal{P}\,\mathbf{e}\,\mathbf{non}(\mathcal{Q})$$

Ad esempio: "È falso che Lucia, se prende correnti d'aria fredda, si ammala" = "Lucia prende correnti d'aria fredda e non si ammala".

♣ **Negare proposizioni contenenti quantificatori**

- **non**($\forall$) equivale a $\exists$ **non**

$$\begin{array}{ll} \mathbf{non}(\forall\, x, \quad \mathcal{P}(x)) & \Leftrightarrow \\ \text{“non è vero che } \mathcal{P}(x) \text{ è vera per ogni } x\text{”} & \Leftrightarrow \\ \text{“c'è almeno un } x \text{ per il quale } \mathcal{P}(x) \text{ è falsa”} & \Leftrightarrow \\ \exists\, x : \quad \mathbf{non}(\mathcal{P}(x)) & \end{array}$$

Per negare che una proprietà sia verificata universalmente bisogna esibire un esempio in cui essa non sia verificata: un **controesempio**.

- **non**($\exists$) equivale a $\forall$ **non**

$$\begin{array}{ll} \mathbf{non}(\exists\, x : \quad \mathcal{P}(x)) & \Leftrightarrow \\ \text{“non è vero che esiste un } x \text{ per cui } \mathcal{P}(x) \text{ è vera”} & \Leftrightarrow \\ \text{“per ogni } x, \mathcal{P}(x) \text{ è falsa”} & \Leftrightarrow \\ \forall\, x : \quad \mathbf{non}(\mathcal{P}(x)) & \end{array}$$

♣ **Teoremi**

Un teorema è costituito da un **enunciato** e da una **dimostrazione**.

- L'**enunciato** ha

  1. una IPOTESI ($\mathcal{P}$, il punto di partenza)
  2. una TESI ($\mathcal{Q}$ l'obiettivo da dimostrare)

L'enunciato di un teorema si sintetizza con

$$\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$$

- **Dimostrazione:** procedimento logico per dedurre la tesi dall'ipotesi.
- **Dimostrazione per assurdo:** è un procedimento per dimostrare che

$$\underset{\textbf{Ipotesi}}{\mathcal{P}} \Rightarrow \underset{\textbf{Tesi}}{\mathcal{Q}}$$

L'equivalenza

$$[\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}] \quad \Leftrightarrow \quad [\textbf{non}\,\mathcal{Q} \Rightarrow \textbf{non}\,\mathcal{P}]$$

viene utilizzata nella dimostrazione per assurdo: si parte dalla negazione della tesi e si cerca di arrivare (tramite un processo deduttivo) alla negazione dell'ipotesi (il che è un <u>assurdo</u>, perché l'ipotesi $\mathcal{P}$ è vera!). Dunque la negazione della tesi è falsa. Allora la tesi è vera.

<u>Seconda forma della dimostrazione per assurdo:</u>

È noto che l'Ipotesi $\mathcal{P}$ è vera e si vuole provare la veridicità dell'implicazione $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ (quindi della Tesi $\mathcal{Q}$). Si parte ancora dalla negazione di $\mathcal{Q}$ e, attraverso una sequenza di deduzioni logiche, si perviene a dimostrare la veridicità di una terza proposizione $\mathcal{R}$ che, a priori, è già noto essere FALSA (da cui l'**ASSURDO**).