

Integrali tripli

Esercizio 4

Calcolare

$$I = \iiint_T (x + z) \, dx \, dy \, dz,$$

ove T è il tetraedro

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}.$$

Passo 1: interpretiamo T come dominio normale rispetto al piano xy :

- esplicito i vincoli su z :

$$\begin{cases} z \geq 0 \\ z \leq 1 - x - y \end{cases}$$

- trovo D imponendo che $1 - x - y \geq 0$:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$$

Passo 2: applico la formula di riduzione per fili

$$I = \iint_D \left(\int_0^{1-x-y} (x+z) dz \right) dx dy$$

$$= \iint_D \left[\frac{(x+y)^2}{2} \right]_{z_1=0}^{z_2=1-x-y} dx dy$$

$$= \frac{1}{2} \iint_D ((1-y)^2 - x^2) dx dy$$

Passo 3: osservo che $D \subset \mathbb{R}^2$ è dominio normale risp. all'asse x :

$$D : \begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ 0 \leq y \leq 1-x \end{cases}$$

Quindi

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} ((1-y)^2 - x^2) dy \right) dx \\ &= \dots \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(-x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{3} \right) dx \\ &= \dots = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Esercizio: ritrovare il risultato usando la formula di riduzione per strati per calcolare I !

Integrali tripli

Esercizio 5

Calcolare

$$I = \iiint_T x^5 y^3 z \, dx dy dz,$$

ove T è il dominio

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x, 0 \leq z \leq xy\}.$$

Chiaramente T è dominio normale rispetto al piano xy :

$$T : \begin{cases} (x, y) \in D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, \\ \quad \quad \quad 0 \leq y \leq x\} \\ 0 \leq z \leq xy \end{cases}$$

Applico la formula di riduzione per fili

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \left(\int_0^{xy} x^5 y^3 z \, dz \right) \, dx \, dy \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^x x^5 y^3 \left(\int_0^{xy} z \, dz \right) \, dy \right) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\int_0^x x^5 y^3 (xy)^2 \, dy \right) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 x^7 \left(\int_0^x y^5 \, dy \right) \, dx \\ &= \frac{1}{12} \int_0^1 x^{13} \, dx = \frac{1}{168}. \end{aligned}$$

Integrali tripli

Esercizio 7

Calcolare

$$I = \iiint_T z \, dx \, dy \, dz,$$

con

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \leq 0, z \geq 0 \right\}$$

date $a, b, c > 0$.

T : porzione di *ellissoide solido* nel semi-spazio $\{z \geq 0\}$.

T è normale rispetto al piano xy , cioè:

$$T = \{(x, y, z) : (x, y) \in D, \alpha(x, y) \leq z \leq \beta(x, y)\}$$

• vincoli su z :

$$\begin{cases} z \geq 0 \\ \frac{z^2}{c^2} \leq 1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq z \leq c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$$

- trovo D imponendo $1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \geq 0$:

$$D = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

Riduzione per fili

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \left(\int_0^{c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} z \, dz \right) dx dy \\ &= \frac{c^2}{2} \iint_D \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right) dx dy \end{aligned}$$

Calcolo l'integrale doppio passando alle coordinate polari “ellittiche”

$$\begin{cases} x = a\rho \cos(\vartheta), \\ y = b\rho \sin(\vartheta), \end{cases} \quad \begin{cases} J(\rho, \theta) = ab\rho \\ D \rightarrow \tilde{D} = [0, 1] \times [0, 2\pi] \end{cases}$$

quindi

$$I = \frac{c^2}{2} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 (1 - \rho^2) ab\rho \, d\rho \right) d\vartheta$$

$$= \pi abc^2 \left[\frac{1}{2}\rho^2 - \frac{1}{4}\rho^4 \right]_0^1$$

$$= \frac{\pi abc^2}{4}$$

Integrali tripli

Esercizio 8

Calcolare

$$I = \iiint_T z \, dx \, dy \, dz,$$

ove T è il solido delimitato dalla superficie conica

$$z^2 = \frac{h^2}{a^2}(x^2 + y^2), \quad h, a > 0,$$

e dai piani $z = 0$, $z = h$.

T è dominio normale rispetto all'asse z :

$$T : \begin{cases} 0 \leq z \leq h, \\ (x, y) \in T_z = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq \frac{a^2}{h^2}z^2\} \end{cases}$$

N.B. T_z è il disco chiuso di centro $(0, 0)$ e raggio $r = \frac{a}{h}z$.

Uso la formula di riduzione per strati

$$\begin{aligned} I &= \int_0^h \left(\iint_{T_z} z \, dx \, dy \right) dz \\ &= \int_0^h z \cdot \text{area}(T_z) \, dz \\ &= \int_0^h z \cdot \left(\pi \frac{a^2}{h^2} z^2 \right) \, dz = \frac{\pi}{4} a^2 h^2. \end{aligned}$$

Integrali tripli

Esercizio 10

Calcolare

$$I = \iint_D \left(\int_{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}^2 \exp(z^2) dz \right) dx dy$$

ove

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}.$$

- La primitiva della funzione $z \mapsto \exp(z^2)$ non è una funzione elementare,

impossibile calcolare $\int_{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}^2 \exp(z^2) dz$

- Calcolo I cambiando l'ordine di integrazione.

$$I = \iiint_T \exp(z^2) dx dy dz,$$

con

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 4, \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \leq z \leq 2\}$$

T è intersezione fra

- il cilindro solido retto infinito, di base $x^2 + y^2 \leq 4$,
- e il volume racchiuso dal paraboloide $(x^2 + y^2) = z$.

Di fatto

$$T : 0 \leq z \leq 2, (x^2 + y^2) \leq z$$

è un dominio normale rispetto all'asse z .

- Calcolo I integrando per strati

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 \left(\iiint_{\{x^2+y^2 \leq 2z\}} \exp(z^2) \, dx \, dy \right) dz \\ &= \int_0^2 \exp(z^2) \cdot \text{area}(\{x^2 + y^2 \leq 2z\}) \, dz \\ &= \pi \int_0^2 2z \exp(z^2) \, dz \\ &= \pi [\exp(z^2)]_0^2 = \pi(e^4 - 1). \end{aligned}$$

Integrali tripli

Esercizio (scritto 11 gennaio 2006)

Calcolare $I = \iiint_E \frac{x}{1+x^2+y^2} dx dy dz$, dove E è la zona del semispazio $z \geq 0$ determinata dall'intersezione del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e della semisfera $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$.

Si trova:

$$E = \left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq \sqrt{2 - x^2 - y^2} \right\}.$$

Si osserva che:

$$(x, y, z) \in E \Leftrightarrow (-x, y, z) \in E,$$

e posto $f(x, y, z) = \frac{x}{1+x^2+y^2}$, si ha:

$$f(-x, y, z) = -f(x, y, z).$$

Allora $I = 0$.

Integrali tripli

Esercizio (scritto 17 dicembre 2007)

Calcolare l'integrale triplo

$$I = \iiint_V x^2 z \, dx dy dz,$$

dove V è la regione di spazio delimitata dal cilindro parabolico $y = 3 - x^2$ e dai piani $y = 0$, $z = 0$ e $z = 1$.

- V è normale rispetto all'asse z :

$$V = \{(x, y, z) : z \in [0, 1], (x, y) \in V_z\},$$

$$V_z = D = \{(x, y) : -\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}, 0 \leq y \leq 3 - x^2\}.$$

- Riduzione rispetto all'asse z :

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 \left(\iint_D x^2 z \, dx \, dy \right) dz = \int_0^1 z \left(\iint_D x^2 \, dx \, dy \right) dz \\
 &= \int_0^1 z \, dz \cdot \iint_D x^2 \, dx \, dy = \frac{1}{2} \iint_D x^2 \, dx \, dy \\
 &= \iint_{D^+} x^2 \, dx \, dy, \quad D^+ := D \cap \{x \geq 0\}.
 \end{aligned}$$

- Riduzione rispetto ad x dell'int. doppio

$$\begin{aligned}
 \iint_{D^+} x^2 \, dx \, dy &= \int_0^{\sqrt{3}} \left(\int_0^{3-x^2} x^2 \, dy \right) dx \\
 &= \int_0^{\sqrt{3}} x^2 (3 - x^2) dx = \left[x^3 - \frac{x^5}{5} \right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{5}.
 \end{aligned}$$

Integrali tripli

Esercizio (scritto 13 gennaio 2010)

Calcolare il volume del solido

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{1}{2}(x^2 - y^2) \leq z \leq 3 - \frac{x^2}{2} - y^2 \right\}.$$

- Si calcola

$$\frac{1}{2}(x^2 - y^2) \leq z \leq 3 - \frac{x^2}{2} - y^2$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} \leq 3 - \frac{x^2}{2} - y^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{6} \leq 1$$

Quindi V è normale rispetto al piano xy :

$$V = \left\{ (x, y, z) : \begin{array}{l} (x, y) \in D, \\ \frac{1}{2}(x^2 - y^2) \leq z \leq 3 - \frac{x^2}{2} - y^2 \end{array} \right\},$$

$$D := \left\{ (x, y) : \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{6} \leq 1 \right\}.$$

- $\text{Vol}(V) = \iiint_V dxdydz$. Riduzione rispetto al piano xy :

$$\begin{aligned}\text{Vol}(V) &= \iint_D \left(\int_{\frac{1}{2}(x^2-y^2)}^{3-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}} dz \right) dxdy \\ &= \iint_D 3 - x^2 - \frac{y^2}{2} dxdy\end{aligned}$$

- Coordinate polari ellittiche:

$$\begin{cases} x = \sqrt{3}\rho \cos(\vartheta), \\ y = \sqrt{6}\rho \sin(\vartheta), \end{cases} \quad J(\rho, \vartheta) = \sqrt{3}\sqrt{6}\rho \quad D \rightarrow \tilde{D} = [0, 1] \times [0, 2\pi]$$

$$\begin{aligned}&\iint_D 3 - x^2 - \frac{y^2}{2} dxdy \\ &= \iint_{\tilde{D}} (3 - 3\rho^2 \cos^2(\vartheta) - 3\rho^2 \sin^2(\vartheta)) \sqrt{3}\sqrt{6}\rho d\rho d\vartheta \\ &= 3\sqrt{3}\sqrt{6} \int_0^1 (1 - \rho^2)\rho d\rho \int_0^{2\pi} d\vartheta \\ &= 18\sqrt{2}\pi \left[-\frac{(1 - \rho^2)^2}{4} \right]_0^1 = \frac{9}{2}\sqrt{2}\pi\end{aligned}$$

Integrali tripli

Richiami di teoria

Formula per il cambiamento di variabili:

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz =$$

$$\iiint_S f(\varphi_1(u, v, w), \varphi_2(u, v, w), \varphi_3(u, v, w)) |J(u, v, w)| du dv dw,$$

con

$\vec{\varphi} : S \rightarrow T$, di classe C^1 e biiettiva

$$\vec{\varphi}(u, v, w) = (\varphi_1(u, v, w), \varphi_2(u, v, w), \varphi_3(u, v, w))$$

e con

$$J(u, v, w) = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial v} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial w} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial v} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial w} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial u} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial v} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial w} \end{bmatrix} \neq 0$$

Integrali tripli – Richiami di teoria

Coordinate polari sferiche

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\vartheta) \sin(\phi) \\ y = \rho \sin(\vartheta) \sin(\phi) \\ z = \rho \cos(\phi) \end{cases}$$

$$\rho \in [0, +\infty), \quad \phi \in [0, \pi], \quad \vartheta \in [0, 2\pi]$$

Si calcola

$$J = \rho^2 \sin(\phi) \Rightarrow dx dy dz \rightarrow \rho^2 \sin(\phi) d\rho d\phi d\vartheta$$

Quindi

$$\begin{aligned} & \iiint_T f(x, y, z) dx dy dz \\ &= \iiint_{\tilde{T}} f(\rho \cos(\vartheta) \sin(\phi), \rho \sin(\vartheta) \sin(\phi), \rho \cos(\phi)) \rho^2 \sin(\phi) d\rho d\phi d\vartheta \end{aligned}$$

-
- Il passaggio alle coordinate sferiche è conveniente se
 - sia nell'espressione di f ,
 - sia nell'espressione di T ,

compaiono espressioni con

$$x^2 + y^2 + z^2 \quad (\text{in coordinate sferiche} \rightarrow \rho^2)$$

Integrali tripli

Esercizio 1

Calcolare

$$I = \iiint_T \sqrt{|z|} \, dx \, dy \, dz$$

ove T è la porzione di sfera (solida) nel primo ottante

$$T = \{(x, y, z) : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

Passaggio a coordinate sferiche:

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\vartheta) \sin(\phi) \\ y = \rho \sin(\vartheta) \sin(\phi) \\ z = \rho \cos(\phi) \end{cases}$$

$$J(\rho, \vartheta, \phi) = \rho^2 \sin(\phi)$$

$$T \rightarrow \tilde{T} = \{(\rho, \vartheta, \phi) : \rho \in [0, 1], \phi \in [0, \frac{\pi}{2}], \vartheta \in [0, \frac{\pi}{2}] \}$$

Quindi

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\tilde{T}} \rho^{1/2} |\cos(\phi)|^{1/2} \rho^2 \sin(\phi) d\rho d\phi d\vartheta \\ &= \iiint_{\tilde{T}} \rho^{5/2} \cos(\phi)^{1/2} \sin(\phi) d\rho d\phi d\vartheta \\ &= \int_0^1 \rho^{5/2} \left(\iint_{[0,\pi/2] \times [0,\pi/2]} \cos(\phi)^{1/2} \sin(\phi) d\phi d\vartheta \right) d\rho \\ &= \left(\int_0^{\pi/2} 1 d\vartheta \right) \left(\int_0^{\pi/2} \cos(\phi)^{1/2} \sin(\phi) d\phi \right) \left(\int_0^1 \rho^{5/2} d\rho \right) \\ &= \frac{2}{7} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \left[-\frac{2}{3} (\cos(\phi))^{3/2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{2}{21} \pi \end{aligned}$$

Integrali tripli

Esercizio 2

Calcolare il volume del solido T racchiuso dall'*ellissoide*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

con $a, b, c > 0$.

Quindi

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$$

e

$$\text{vol}(T) = \iiint_T 1 \, dx \, dy \, dz.$$

La geometria del dominio suggerisce il passaggio alle *coordinate “sferiche generalizzate”*

$$\begin{cases} x = a\rho \cos(\vartheta) \sin(\phi) \\ y = b\rho \sin(\vartheta) \sin(\phi) \\ z = c\rho \cos(\phi) \end{cases}$$

$$T \rightarrow \tilde{T} = \{(\rho, \vartheta, \phi) : \rho \in [0, 1], \vartheta \in [0, \pi], \phi \in [0, 2\pi]\}$$

Si calcola

$$J(\rho, \vartheta, \phi) = abc\rho^2 \sin(\phi)$$

Quindi

$$\begin{aligned} \text{vol}(T) &= \iiint_{[0,1] \times [0,\pi] \times [0,2\pi]} abc\rho^2 \sin(\phi) \, d\rho d\phi d\vartheta \\ &= abc \left(\int_0^{2\pi} 1 \, d\vartheta \right) \cdot \left(\int_0^1 \rho^2 \, d\rho \right) \cdot \left(\int_0^\pi \sin(\phi) \, d\phi \right) \\ &= \frac{4}{3}\pi abc. \end{aligned}$$

N.B. Per $a = b = c = 1$, l'ellissoide si riduce a una superficie sferica, quindi T è la sfera (solida) di centro $(0, 0, 0)$ e raggio 1.

Ritrovo che il volume della sfera è $\frac{4}{3}\pi$.

Integrali tripli – Richiami di teoria

Coordinate polari cilindriche

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\vartheta) \\ y = \rho \sin(\vartheta) \\ z = z \end{cases}$$

$$\rho \in [0, +\infty), \quad \vartheta \in [0, 2\pi], \quad z \in \mathbb{R}$$

Si calcola

$$J = \rho \Rightarrow dx dy dz \rightarrow \rho d\rho d\vartheta dz$$

Quindi

$$\iiint_T f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{\tilde{T}} f(\rho \cos(\vartheta), \rho \sin(\vartheta), z) \rho d\rho d\vartheta dz$$

-
- Passaggio alle coordinate cilindriche conveniente se nell'espressione di f ,
e/o
nell'espressione di T ,

compaiono espressioni con

$$x^2 + y^2 \quad (\text{in coordinate cilindriche} \rightarrow \rho^2)$$

Integrali tripli

Esercizio 5

Calcolare

$$\iiint_T x^2 \, dx \, dy \, dz$$

con

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z \geq 0, x^2 + y^2 + 1 \leq z^2 \leq 4\}$$

Passaggio a coordinate cilindriche

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\vartheta) \\ y = \rho \sin(\vartheta) \\ z = z \end{cases} \quad \begin{matrix} J(\rho, \vartheta, z) = \rho \\ T \rightarrow \tilde{T} \end{matrix}$$

T si trasforma in

$$\tilde{T} : \begin{cases} \rho^2 + 1 \leq z^2 \Rightarrow z^2 \geq 1 \\ z^2 \leq 4 \\ \vartheta \in [0, 2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vartheta \in [0, 2\pi], z \in [1, 2] \\ 0 \leq \rho \leq \sqrt{z^2 - 1} \end{cases}$$

Quindi

$$\tilde{T} = \left\{ (\rho, \vartheta, z) : (\vartheta, z) \in D, 0 \leq \rho \leq \sqrt{z^2 - 1} \right\},$$

con $D = [0, 2\pi] \times [1, 2]$, è dominio normale rispetto al “piano ϑz ” Allora

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\tilde{T}} \rho^2 \cos^2(\vartheta) \rho \, d\rho \, d\vartheta \, dz \\ &= \iint_{[0, 2\pi] \times [1, 2]} \left(\int_0^{\sqrt{z^2 - 1}} \rho^3 \cos^2(\vartheta) \, d\rho \right) \, d\vartheta \, dz \\ &= \iint_{[0, 2\pi] \times [1, 2]} \cos^2(\vartheta) \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^{\sqrt{z^2 - 1}} \, d\vartheta \, dz \\ &= \frac{1}{4} \iint_{[0, 2\pi] \times [1, 2]} \cos^2(\vartheta) (z^2 - 1)^2 \, d\vartheta \, dz \\ &= \frac{1}{4} \left(\int_0^{2\pi} \cos^2(\vartheta) \, d\vartheta \right) \left(\int_1^2 (z^4 + 1 - 2z^2) \, dz \right) \\ &= \frac{\pi}{4} \left[\frac{z^5}{5} + z - \frac{2z^3}{3} \right]_1^2 = \frac{19}{30}\pi. \end{aligned}$$

Integrali tripli

Esercizio 11

Calcolare

$$I = \iiint_T (x^2 + z) \, dx \, dy \, dz$$

dove

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq 4\}.$$

Il termine $x^2 + y^2$ in T suggerisce l'uso delle coordinate cilindriche:

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\vartheta) \\ y = \rho \sin(\vartheta) \\ z = z \end{cases}$$

$$T \rightarrow \tilde{T} : \begin{cases} \vartheta \in [0, 2\pi], 0 \leq z \leq 4, \\ \rho^2 \leq z \Leftrightarrow 0 \leq \rho \leq \sqrt{z} \end{cases}$$

N.B.: \tilde{T} normale “rispetto al piano ϑz ” Quindi

$$I = \iiint_{\tilde{T}} (\rho^2 \cos^2(\vartheta) + z) \rho \, d\rho \, d\vartheta \, dz = I_1 + I_2$$

- Calcolo di I_1 e I_2 . Riduzione per fili in ρ

$$\begin{aligned} I_1 &= \iiint_{\tilde{T}} \rho^3 \cos^2(\vartheta) \, d\rho \, d\vartheta \, dz \\ &= \iint_{[0,2\pi] \times [0,4]} \cos^2(\vartheta) \left(\int_0^{\sqrt{z}} \rho^3 \, d\rho \right) \, d\vartheta \, dz \\ &= \iint_{[0,2\pi] \times [0,4]} \cos^2(\vartheta) \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^{\sqrt{z}} \, dz \, d\vartheta \\ &= \iint_{[0,2\pi] \times [0,4]} \cos^2(\vartheta) \frac{z^2}{4} \, dz \, d\vartheta \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2(\vartheta) \, d\vartheta \int_0^4 \frac{z^2}{4} \, dz \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos(2\vartheta)}{2} \, d\vartheta \frac{16}{3} = \frac{16}{3}\pi \end{aligned}$$

$$I_2 = \iiint_{\tilde{T}} \rho z \, d\rho d\vartheta dz$$

$$= \iint_{[0,2\pi] \times [0,4]} z \left(\int_0^{\sqrt{z}} \rho \, d\rho \right) \, d\vartheta dz$$

$$= \iint_{[0,2\pi] \times [0,4]} \frac{z^2}{2} \, d\vartheta dz = 2\pi \int_0^4 \frac{z^2}{2} \, dz = \frac{64}{3}\pi$$

Quindi

$$I = I_1 + I_2 = \frac{80}{3}\pi.$$

Integrali tripli

Esercizio 12

Calcolare il volume del solido T definito da

$$T = \left\{ (x, y, z) : 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1 - (x^2 + y^2) \right\}$$

Si calcola:

$$1 - \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1 - (x^2 + y^2)$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1$$

Quindi:

$$T = \left\{ (x, y, z) : \begin{array}{l} (x, y) \in D \\ 1 - \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1 - (x^2 + y^2) \end{array} \right\}$$

e

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

- Coordinate cilindriche

$$\begin{cases} x = \rho \cos(\vartheta) \\ y = \rho \sin(\vartheta) \\ z = z \end{cases} \quad J(\rho, \vartheta, z) = \rho$$

$$T \rightarrow \tilde{T} = \left\{ (\rho, \vartheta, z) : \begin{array}{l} 0 \leq \rho \leq 1, \ 0 \leq \vartheta \leq 2\pi \\ 1 - \rho \leq z \leq 1 - \rho^2 \end{array} \right\}$$

normale rispetto al "piano $\rho\vartheta$ "

$$\text{Vol}(T) = \iiint_T 1 \, dx \, dy \, dz$$

$$= \iint_{[0,1] \times [0,2\pi]} \left(\int_{1-\rho}^{1-\rho^2} \rho \, dz \right) \, d\rho \, d\vartheta$$

$$= \iint_{[0,1] \times [0,2\pi]} \rho(1 - \rho - 1 + \rho^2) \, d\rho \, d\vartheta$$

$$= \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^1 (\rho^2 - \rho^3) \, d\rho = \frac{\pi}{6}$$